俄罗斯数学
教材选译

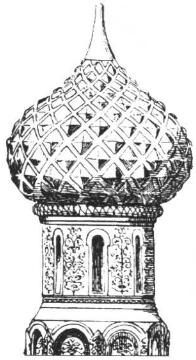
代数学引论(第一卷)

基础代数 (第2版)

□ A. И. 柯斯特利金 著

□ 张英伯 译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

代数学引论 (第一卷)

基础代数 (第2版)

□ А. И. 柯斯特利金 著

□ 张英伯 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2005-5732 号

图书在版编目 (CIP) 数据

代数学引论 (第一卷) 基础代数: 第 2 版 / (俄罗斯) 柯斯特利金著; 张英伯译. —北京: 高等教育出版社, 2006.12
ISBN 7-04-020525-4

I.代… II.①柯…②张… III.代数 IV.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 141090 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 朱 静
版式设计 余 杨 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2006 年 12 月第 1 版
印　　张	16	印　　次	2006 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	310 000	定　　价	33.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 20525－00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起，在当时全面学习苏联的大背景下，国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密，论证严谨，有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础，培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代，国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材，但还在很大程度上保留着苏联教材的影响，同时，一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说，从解放初一直到文化大革命前夕，苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用，起了不可忽略的影响，是功不可没的.

改革开放以来，通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材，大家眼界为之一新，并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中，尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革，引进却基本中断，更没有及时地进行跟踪，能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少，事实上已造成了很大的隔膜，不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初，在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上，有数学家提出，莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材，建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持，并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论，大家一致认为：在当前着力引进俄罗斯的数学教材，有助于扩大视野，开拓思路，对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下，经数学天元基金资助，由高等教育

出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

“代数是慷慨的，它提供给人们的
常常比人们要求的还要多.”

—— 达朗贝尔

前　　言

人们很早就感到有必要把代数、线性代数和几何放到一个统一的教程中. 而教科书《代数学引论》(M. 科学, 1977) 自出版后的 22 年来可以看作是这种统一处理的初步尝试. 代数是数学中一个充满活力的分支，具有强烈的吸引力，它基于为数不多的几个清晰而直观的原理. 代数概念的意义可能有数论或几何的特征，常常根植于数学计算和解方程. 从这种历史观点产生的原则和要求是通用的，它已经贯彻到现代大学的代数教程中. 全部困难在于，如何使这些众所周知的想法或多或少地实现. 对传统作法的自然改进 —— 有时在统一线性代数和多维解析几何教材方面，有时在将初等数论分散插入代数教材方面，都在《代数学引论》中有所反映. 本书的写作基于前面提到过的同名教科书，但进行了大力度的扩充，并为读者方便起见分为三个部分. 不言而喻，这些部分合在一起显然囊括了前述教程稳定的核心内容，那是所有此类教科书都应该满足的最低要求. 另一方面，书中材料的安排对应于最近十年来莫斯科大学数学力学系学生代数教学的顺序：第一学期 ——“代数基础”；第二学期 ——“线性代数与几何”；第三学期 ——“代数的基本结构”(这里的代数属初等水平，但充分包含了当代每个数学家所需的代数系统). 为方便起见，今后引用这些书时利用相应的缩写 [BAI],[BAII],[BAIII]. 材料编排的顺序依照如下原则：不仅力求思路合理，还按照贺拉斯 ① 聪明的忠告：“今

①贺拉斯 (Horace)，罗马诗人，拉丁语全名为昆图斯 · 贺拉斯 · 弗拉库斯 (Quintus Horatius Flaccus). —— 译者注.

天只说今天该说的，其余的到适当时候再说.”换言之，我们的风格是集中表述内容，不计较多次返回同样的议题或同一个例子．于是，当群、环、域、同构的概念出现在 [BAI] 时是作为例子进行讨论的，然后集中在 [BAII], 对这些概念更本质的研究在 [BAIII] 中进行．抽象的向量空间及其线性算子在 [BAII] 研究，尽管在本书的最前面几章已经伴随着线性方程组出现过类似的具体概念．当然，只有读者有权判断这种途径是否有利于对事物的理解，伟大的数学家庞加莱在他的著名论文《科学与方法》(第 2 章，数学的定义与教学) 中就是这样说的．根据作者的经验，实际的课程 (第一学期每周三小时，第二学期每周四小时，第三学期每周两小时), 显然不可能涵盖教科书的全部材料，这样做也是不应该的．按照作者的构想，课程寄希望于主讲人的自由发挥 (当然是在教科书的明确框架之内). 作者希望读者把这本书看作一本参考书或是大学生的补充读物．现代代数学的丰富多彩不可能削足适履地安排进任何一本“代数学引论”中，但教科书应当成为创造性思维的推动力．刻意安排的围绕某一基本问题的大量习题促进了这一点的实现．此外，每一部分都分为若干章节，列举出某些未解决的或难解决的问题并有必要的说明 (都是根据作者个人的想法), 它们直接与课程的内容衔接，且几乎接近于解决．这些问题未必能引起普遍的兴趣，但是如果能在一些人心中点燃探索数学真理的火花，那就太美好了．

谈谈 [BAI]. 可以认为这本书是小型的代数．群、环、域等基本概念对于大多数大学生来说都是新的，它们的引入尽量采用非正式和最少量的方式，尽管由此得到的诱导概念的总量是相当大的．它们无需记忆，在独立解决问题和完成练习之后，这些概念是可以被掌握的．为方便起见，我们抽出若干最常用的代数系统，如群 $(\mathbb{Z},+), S_n, A_n, \mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n$, 多项式环，域 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{Z}_p$. 代数语言以它们为背景展示出来．按照传统并顾及到从中学到大学之间的过渡，首先讲解了矩阵和行列式，并用它们讨论了线性方程组的解．基本的代数结构就在这时自然产生了．更为详尽的研究放在 [BAIII] 中，而我们现在的任务是积累生动的例子.

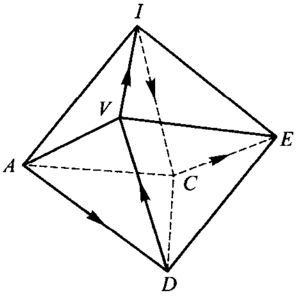
应该特别注意在补充文献中所列出的沙法列维奇的书 [4], 从中可以看到在代数乃至整体数学中新的、高水平的非传统观念的发展．

感谢《代数学引论》原版教科书的全体读者，感谢英文、保加利亚文、西班牙文、波兰文、法文、中文的译者和评注者，感谢莫斯科大学高等代数教研室的成员们，在那里，本书仍然在经受着年复一年的检验.

我非常高兴地对柯斯特利金娜、伊莲娜和奥斯特利克在本书成稿时提供的无法估量的帮助表示深切的感谢.

А. И. 柯斯特利金

给读者的建议



根据前言中阐述的总体规划，书中各章节之间的关系图是线性的，事实上，一年级大学生按照次序学习本书是有益的，特别要注意书中大量的例子和习题，它们当中的相当部分通常在考试时出现.

对于有经验的读者 (比如教师或二年级学生)，实际上不难从任何地方开始阅读此书，但要准备不时地返回前面章节的概念. 在各段各节中引入新概念时，不都是冠以 "定义" 这两个字的. 详细的目录和索引可以帮助读者找到它们在书中所处的位置.

每一章分成若干节，每一节分成若干段，各有自己的名称. 在每一段内部，定理、命题、引理、推论有各自的编号：定理 1, 定理 2,$\cdots$; 引理 1, 引理 2,$\cdots$. 这是一个原始的但相当直观的命名法，在从其他段落引用结论时应注明 "$\S j$ 的定理 i"，或 "第 k 章 $\S j$ 的定理 i"，这样做不会引起混乱.

证明的结尾用记号 $\square$ 表示.

为简洁起见，书中使用最简单的逻辑符号. 蕴含符号 $\Rightarrow$ 写成 $A \Rightarrow B$ 意味着 "A 推出 B" 或 "从 A 得到 B"，而 "$A \Leftrightarrow B$" 表示 A 和 B 等价，即 "A 当且仅当 B". 全称量词 $\forall$ 表示 "对所有的". 其余的符号可从上下文理解.

上面列出的希腊字母表注明了每个字母的读音. 由于希腊字母在数学中通行，对此产生的任何混淆都会引起麻烦.

目　　录

第 1 章　代数的起源

代数从何而来？粗略地说，代数起源于加法，乘法和求整数次方幂的计算艺术．如果用字母代替数 (这一点并非显而易见且有多种方式)，就使我们能够在更广泛的代数系统中使用类似的法则进行计算．对这一问题给出透彻回答的尝试将我们带进了久远的时代，带进了数学思想奇妙产生的过程．这一答案，最困难的部分与我们今天的基本代数结构：群、环、域、模等紧密相关．但这恰好是本书的大部分内容，因而第一章的目的目前似乎还达不到．

幸运的是，在大多数代数公理抽象的外表下，隐含着非常具体的理论和实际问题，它们的解决常常幸运地成为进一步发展抽象理论的动力．同样地，所发展的理论又成为解决这些问题的基础和工具．存在于所有数学领域内的理论与应用之间的复杂的相互作用在代数中表现得尤为明显，同时也在某种程度上说明我们通常采用的围绕中心问题层层深入的教学方法是有道理的．

在对历史事件进行过简短评注之后，我们将叙述包含在下面章节中的一些问题．这些问题之一成为研究线性方程组，矩阵和行列式理论的出发点．我们介绍高斯方法并得到解线性方程组的初步认识．

在这一步引入标准的符号和术语是有益的，为此我们将扼要地给出集合与映射的理论．

我们将引入等价关系和商映射的重要概念．进一步，为了详细讲解数学归纳法原理．建立了一些初等的组合关系式，我们特别引出了置换的概念，它是行列式理论的基础．

最后在末尾一节中列出了整数的最简单的算术性质．这些性质不仅将来要用，也是在更复杂的代数系统中构造类似算法的原型．

本章的材料并未超出中学课程太多. 仅要求读者准备上升到更高更一般的观点. 学生可以从 §3 开始读起.

§1 简谈代数

在我们今天的时代, 谈论数学的 "代数化" 不是没有理由的, 即代数的思想和方法渗透到数学各个分支的理论与应用中. 这种情况在 20 世纪中叶变得十分明显, 但情况并不总是如此. 正如人类活动的所有领域一样, 数学也会受到时尚的影响. 代数方法的流行有其实际的原因, 尽管对它的迷恋有时会超越理智的界限. 由于掩盖了内容的代数外壳不亚于对代数的基本无知造成的不幸, 所以教科书的作者要是擅长于避免代数过分的形式化, 那么就会合情合理地受到赞许.

只要不走极端, 代数自古以来就是数学的一个重要的组成部分. 几何也是这样, 但我们愿意在这里引用索菲 · 格尔曼的观点. "代数不外是符号的几何, 而几何不外是图形的代数." 后来情况有些变化, 但仍可以说 "数学对象的自然属性实质上是不太重要的第二位的事情, 例如我们得到的结果既可以用纯几何定理的形式表述, 也可以借助解析几何以代数定理的形式出现." (尼 · 布尔巴基).

根据 "重要的不是数学对象, 而是它们之间的关系" 这一原则, 代数被定义为对各种集合的元素施行代数运算的科学 (这种说法有些重复, 并且使未入门者完全莫名其妙). 代数运算本身源于初等算术. 反过来, 基于代数学的思想, "高等算术", 即数论中的许多事实得到了最自然的证明.

但是代数结构, 即带有代数运算的集合, 意义远远超出了对数论的应用. 许多数学对象 (拓扑空间, 多复变函数等等), 其研究方法是建立相应的代数结构, 即便与所研究的对象不完全吻合, 但在所有的情况下都能反映出它们的本质方面. 在现实世界中没有什么东西是完全相同的.

对代数学的这一明确看法是在 45 年前由量子力学的创始人之一狄拉克提出来的, 他说: "现代物理学越来越需要抽象数学及其基础的发展. 非欧几何和非交换代数一度被认为是虚构的, 是迷恋逻辑推理的简单结果, 而现在则被公认为是描绘物理世界不可或缺的工具."

代数工具在研究量子力学的基本粒子, 在考察刚体性质和晶体结构 (在这方面, 群表示理论特别重要), 在分析经济模式, 在制造现代化计算机等方面都是非常有用的.

与此同时, 代数学也受到其他学科新鲜汁液的哺育, 其中包括数学中的其他学科. 例如代数的同调方法产生于拓扑学和代数数论. 因而代数的面貌和人们对代数的看法在不同的时期有所改变是不足为奇的. 我们不可能详细地列出这些变化, 不仅由于篇幅有限, 尤其是因为书写历史必需具体, 而这只有在学习了代数的基础知识之后才能办到. 我们仅限于列举一个带有人名和年代的图表.

古代巴比伦和埃及文化，希腊文化．丢番图的“算术”(公元前3世纪)	自然数与正有理数的四则运算．几何学与天文学中的代数公式．作图问题的形成(立方倍积与三等分角)，代数思想的使用是很久以后的事情．
中世纪的东方文化．穆罕默德·花拉子米(Muhammad al-Khwārizmī)的著作《代数》(约825年)	一次及二次代数方程．术语“代数”一词的产生．
文艺复兴时代 S. 费罗(1465—1526) N. 塔尔塔利亚(1500—1557) G. 卡尔达诺(1501—1576) L. 费拉里(1522—1565) F. 韦达(1540—1603) R. 邦贝利(1530—1572)	三次和四次代数方程的一般解．建立了现代的代数符号．
17至18世纪 R. 笛卡儿(1596—1650) P. 费马(1601—1665) I. 牛顿(1643—1727) G. 莱布尼茨(1646—1716) L. 欧拉(1707—1783) J. 达朗贝尔(1717—1783) J. L. 拉格朗日(1736—1813) G. 克拉默(1704—1752) P. 拉普拉斯(1749—1827) A. 范德蒙德(1735—1796)	出现了解析几何——几何与代数之间的坚实的桥梁． 数论研究趋于活跃． 开始研究多项式代数． 深入研究代数方程求解的一般公式． 证明数值系数代数方程根的存在性的首批方法． 行列式理论的开端．
19世纪至20世纪初 K. F. 高斯(1777—1855) P. 狄利克雷(1805—1859) E. 库默尔(1810—1893) L. 克罗内克(1823—1891) R. 戴德金(1831—1916) E. L. 佐洛塔廖夫(1847—1878) G. F. 沃罗诺依(1868—1908) A. A. 马尔可夫(1856—1922)	证明数值系数方程根的存在性的基本定理． 代数数论的深入发展．
P. L. 切比雪夫(1821—1894) C. 埃尔米特(1822—1901) N. I. 罗巴切夫斯基(1792—1856) A. 胡尔维茨(1859—1919)	探讨代数方程近似解的求法． 使根处于某一位置时系数应满足的条件．

续表

P. 鲁菲尼(1765—1822) N. H. 阿贝尔(1802—1829) C. 雅可比(1804—1851) E. 伽罗瓦(1811—1832) G. 黎曼(1826—1866) A. L. 柯西(1789—1857) C. 若尔当(1838—1922) L. 西罗(1832—1918)	证明次数≥5 的一般方程不能用根式求解. 代数函数论的发展. 伽罗瓦理论的创立. 主要基于置换群的有限群论的开端.
H. 格拉斯曼(1809—1877) J. 西尔维斯特(1814—1897) A. 凯莱(1821—1895) W. 哈密尔顿(1805—1865) G. 布尔(1815—1864) S. 李(1842—1899) F. 弗罗贝尼乌斯(1849—1918) J. 塞雷(1819—1885) M. 诺特(1844—1922) D. A. 格拉韦(1863—1939) H. 庞加莱(1854—1912) F. 克莱茵(1849—1925) W. 伯恩赛德(1852—1927) F. 莫林(1861—1941) J. 舒尔(1875—1941) H. 外尔(1885—1955) F. 恩里克(1871—1946)	线性代数方法的深入发展. 发现四元数后引起的超复数的研究 (这样的系统现在称为代数). 特别是连续群(李群)的发展为李代 数理论奠定了基础. 代数几何和不变量理论成为数学的重要 分支. 在 19 世纪, 数学尚未高度专门化, 许多大科 学家在不同的领域内创造性地工作.
J. 冯·诺依曼(1903—1957) D. 希尔伯特(1862—1943) E. 嘉当(1869—1951) K. 亨泽尔(1861—1941) E. 施泰尼茨(1871—1928) E. 诺特(1882—1935) E. 阿廷(1898—1962) H. 布尔巴基《数学原理》.	20 世纪上半叶, 整个数学大厦得到了根本 性的改造. 代数不再是关于解代数方程的科学, 开始 坚定地沿着公理化和更加抽象的道路发展.
环、模、范畴、同调理论成为常用的语言. 许多不同的理论符合泛代数的通用模式. 模型论兴起于代数与数理逻辑的交界处. 古老的理论焕然一新, 扩大了自己的应用领域. 例子有现代代数几何、代数拓扑、代数K–理论、代数群理论. 有限群论经历了特殊的飞跃.	

目前代数学正处在生机勃勃的发展中. 其中俄罗斯数学家做出了重大贡献. 我国高水平的代数研究, 应归功于下述学者, 如 N.G. 切博塔廖夫 (1894—1947), O.Ju. 施米特 (1891—1956), A.I. 马尔采夫 (1909—1967), A.G. 库洛什 (1908—1971), P.S. 诺