普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础释疑解难

魏战线 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础释疑解难

魏战线　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“高等教育百门精品课程教材建设计划”(此计划作为整体已列入新闻出版总署“十五”国家重点图书规划)研究成果之一，是与普通高等教育“十五”国家级规划教材《工科数学分析基础》(第二版)相配套的教学辅导书和参考书。

本书采用问与答的形式，解答了编者根据教学基本要求及长期的教学积累所整理和提炼出来的226个高等数学中的常见问题。本书共有七章，内容包括：函数、极限、连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，无穷级数，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学及其应用，常微分方程以及附录：向量代数与空间解析几何。

本书可供学习高等数学的读者作为学习辅导书，也可供有关教师作为教学参考书，还可供报考硕士研究生的读者作为复习参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础释疑解难/魏战线主编．—北京：高等教育出版社，2007.3

ISBN 978-7-04-021199-3

Ⅰ.工…　Ⅱ魏…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第027849号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京北苑印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×960　1/16	版　次	2007年3月第1版
印　张	12.5	印　次	2007年3月第1次印刷
字　数	210 000	定　价	13.60元

物料号　21199-00

前　　言

本书是“高等教育百门精品课程教材建设计划”(此计划作为整体已列入新闻出版总署“十五”国家重点图书规划)研究成果之一,是与普通高等教育“十五”国家级规划教材《工科数学分析基础》(第二版,马知恩、王锦森主编,高等教育出版社,2006年)(本书中均称之为《教材》)相配套的教学辅导书和参考书。

高等数学是理工科院校最重要的基础课之一,学好这门课程,不仅对于后继课程的学习十分重要,而且对于培养学生的科学思维能力乃至将来的工作能力都会产生十分深远的影响。与初等数学相比,高等数学具有概念更加抽象、理论更加严谨、方法更为综合、应用更为广泛等特点,因而初学者在学习中往往会产生种种疑难问题,特别是对某些抽象概念与理论理解不够或者理解错误,其中学了不会用或者用错等问题尤为突出。为了帮助读者解决这些问题,并尽快掌握高等数学的基本内容,我们编写了这本书。我们根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”以及长期的教学积累,整理提炼出来226个高等数学中的常见问题,本书采用问与答的形式,解答了这些问题,其内容主要涉及对高等数学基本概念与基本理论的理解问题,对基本方法的应用问题,一些基本内容的归纳小结,典型错误问题剖析,相关概念之间的联系与区别,一些概念、理论与方法的适当延伸或者进一步讨论,等等。本书既注重理论分析,又注重通过正反两方面的例子来具体说明问题;既注重数学的严谨性,又注重对读者的启发引导及能力的培养。希望本书有助于读者正确、深刻地理解高等数学的基本概念与基本理论,正确并熟练地掌握高等数学处理问题的基本方法。也希望读者能在发现问题、提出问题和解决问题的过程中,不断地增长知识,提高分析和解决问题的能力。

本书由魏战线主编,其中第一章由李换琴副教授编写,第二、五章由武忠祥教授编写,第三、六章由魏战线教授编写,第四、七章由常争鸣副教授编写,附录由朱旭副教授编写,全书由魏战线统稿并作了一些修改。限于编者水平,本书难免存在不足甚至错误之处,真诚希望使用本书的广大读者及同行们批评指正。

由于教材第八章通常作为选学内容,考虑到大多数读者的实际需要,本书略去了这一章的释疑解难。同时为了方便学习多元微积分,本书增加了一个附录,内容为向量代数与空间解析几何方面的释疑解难。

本书可供学习高等数学的读者作为学习辅导书,也可供有关教师作为教学参考书,还可供报考硕士研究生的读者作为复习应考书。

本书在编写过程中得到高等教育出版社的资助和大力支持，有关编辑同志为本书的出版和质量的提高付出了大量辛勤的工作。在此，我们向有关方面和有关编辑同志表示衷心的感谢。

编者

2007年1月

目　录

第一章　函数、极限、连续 ······ 1
问题 1.1　为什么要引入确界概念？ ······ 1
问题 1.2　上确界(下确界)有哪些等价叙述？ ······ 2
问题 1.3　凡是能够用一个数学式子表示的函数一定是初等函数吗？ ······ 2
问题 1.4　怎样用“$\varepsilon-N$”语言描述$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq A$？ ······ 2
问题 1.5　如果$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$都以 A 为极限($n\to\infty$)，是否必定有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$？ ······ 3
问题 1.6　关于实数完备性的几个命题的等价性问题． ······ 3
问题 1.7　为什么说当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$没有极限？ ······ 4
问题 1.8　复合函数求极限问题． ······ 5
问题 1.9　讨论无穷小有什么意义？ ······ 5
问题 1.10　两个都不是无穷大的数列的积一定不是无穷大吗？ ······ 6
问题 1.11　是否任何两个无穷小量都可以比较？ ······ 6
问题 1.12　无穷大量与无界变量有什么区别？它们之间有什么关系？ ······ 6
问题 1.13　函数 $f(x)$在点 a 处连续有哪些等价叙述？ ······ 7
问题 1.14　在一点连续的函数是否在该点的某个邻域也连续？ ······ 7
问题 1.15　连续函数与不连续函数的乘积是否一定不连续？ ······ 7
问题 1.16　为什么说初等函数在它的定义区间连续，而不说在定义域上连续？ ······ 8
问题 1.17　是否存在在整个实数轴上点点有定义但点点不连续的函数？ ······ 8
问题 1.18　如何判定函数 $f(x)$在区间 I 上的一致连续性？ ······ 8
问题 1.19　两个一致连续函数的乘积也一致连续吗？ ······ 9
问题 1.20　如何利用压缩映射原理求极限？ ······ 9
第二章　一元函数微分学及其应用 ······ 11
问题 2.1　关于导数等价定义的问题． ······ 11

问题2.2　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,那么是否存在 x_0 点的一个邻域,在此邻域内 $f(x)$ 也一定可导? …… 11
问题2.3　函数在一点可导,是否在该点的某邻域内该函数一定连续? …… 12
问题2.4　若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导,那么其导函数 $f'(x)$ 是否一定在 x_0 处连续? …… 12
问题2.5　若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左右导数都存在,那么 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否一定连续? …… 13
问题2.6　当 $x\to a^+$ 时, $f(x)\to\infty$ 与 $f'(x)\to\infty$ 之间是否有什么必然联系? …… 13
问题2.7　可导的周期函数的导函数还是周期函数吗? 可导的非周期函数的导函数一定不是周期函数吗? …… 13
问题2.8　关于函数奇偶性与导函数奇偶性之间的关系. …… 14
问题2.9　关于复合函数可导性的问题. …… 14
问题2.10　求分段函数在分界点处导数的一种典型错误. …… 14
问题2.11　讨论分段函数在分界点处可导性的一种错误. …… 15
问题2.12　符号 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 是否有区别? …… 15
问题2.13　在什么条件下一定有 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$? …… 16
问题2.14　若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导,那么曲线 $y=f(x)$ 是否在点 $(x_0,f(x_0))$ 处不存在切线? …… 17
问题2.15　参数方程求导的一种典型错误. …… 17
问题2.16　如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导,那么其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 上是否一定连续? …… 17
问题2.17　微分 $dy=f'(x)dx$ 中的 dx 是否一定要很小? …… 18
问题2.18　函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与函数 $f(x)$ 的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 有什么区别? …… 18
问题2.19　当 $\Delta x\to 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的微分 dy 一定是与 Δx 同阶的无穷小吗? …… 18
问题2.20　Rolle 定理结论中的 $f'(\xi)=0$ 的点 ξ 是否一定为 $f(x)$ 的极值点? …… 18
问题2.21　证明方程根的存在性时有哪几种常用的方法? …… 19
问题2.22　确定方程 $f(x)=0$ 的根的个数,有哪几种常用方法? …… 19
问题2.23　若当 x 充分大以后 $f(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C$(常数),是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$? …… 20

问题 2.24　关于导函数的介值性的问题． …… 20

问题 2.25　使用 L'Hospital 法则时的一种典型错误． …… 21

问题 2.26　数列极限可以用 L'Hospital 法则求吗? …… 22

问题 2.27　若函数 $f(x)$在区间(a,b)内有 $f'(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$),其中使等号成立的只是有限个孤立点 x_k,即有 $f'(x_k)=0$. 问这时能断定 $f(x)$在区间(a,b)内是严格单调增(或减)吗? …… 22

问题 2.28　如果 $f'(x_0)>0$,由此可以断定 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内单调增吗? …… 22

问题 2.29　如果函数 $f(x)$在 x_0 处有极大值,能否肯定在点 x_0 的某邻域内,$f(x)$在 x_0 点的左半邻域单调增加,而在 x_0 点的右半邻域单调减少? …… 23

问题 2.30　函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最大(小)值点一定是 $f(x)$的极大(小)值点吗? …… 24

问题 2.31　解决最大、最小值应用问题时,应如何建立目标函数? …… 24

问题 2.32　利用导数的知识证明不等式的方法有哪些? …… 25

问题 2.33　如何求曲线的水平渐近线和铅直渐近线? …… 27

问题 2.34　如何求曲线的斜渐近线? …… 28

第三章　一元函数积分学及其应用 …… 29

问题 3.1　怎样利用定积分计算和式的极限? …… 29

问题 3.2　为什么说 $f(x)$在$[a,b]$上有界是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的必要条件? …… 31

问题 3.3　$f(x)=\dfrac{1}{x}$的一个原函数与不定积分究竟是什么? …… 32

问题 3.4　连续的奇(偶)函数的原函数都是偶(奇)函数吗? …… 33

问题 3.5　分段连续函数存在原函数吗? …… 34

问题 3.6　$f(x)$在区间$[a,b]$上可积与 $f(x)$在$[a,b]$上存在原函数是否一回事? …… 34

问题 3.7　使用 Newton－Leibniz 公式的条件是什么? …… 35

问题 3.8　怎样计算分段连续函数的定积分? …… 36

问题 3.9　怎样求分段表示的连续函数的不定积分? …… 37

问题 3.10　非负(正)且不恒为零的可积函数的定积分必大于(小于)零吗? …… 38

问题 3.11　连续函数的积分中值定理中的点 ξ 必能在开区间内取到吗? …… 40

问题 3.12　积分中值定理有哪些应用? …… 41
问题 3.13　应用积分中值定理时应注意的问题. …… 42
问题 3.14　怎样由含有未知函数 $f(x)$的积分的方程求出 $f(x)$? …… 43
问题 3.15　怎样求变限积分 $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 的导数? …… 44
问题 3.16　怎样求函数 $F(x)=\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t$ 关于 x 的导数? …… 45
问题 3.17　关于积分号下取极限的问题. …… 47
问题 3.18　可积函数的变上限定积分都是上限的可导函数吗? …… 48
问题 3.19　怎样求函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的极值? …… 49
问题 3.20　应用定积分换元法时应注意的问题. …… 50
问题 3.21　怎样理解和应用定积分与其积分变量用什么字母无关这一性质? …… 52
问题 3.22　在定积分的计算中怎样利用对称性简化计算? …… 54
问题 3.23　怎样计算周期函数的定积分? …… 55
问题 3.24　怎样计算含有绝对值的函数的定积分? …… 56
问题 3.25　计算积分 $I=\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x(a<b)$主要有哪些方法? …… 58
问题 3.26　使用分部积分法时,怎样选取分部积分公式中的 u 和 v? …… 59
问题 3.27　应用分部积分法时应注意的问题. …… 62
问题 3.28　怎样利用微元法求解定积分应用问题? …… 63
问题 3.29　怎样利用圆柱薄壳法求旋转体的体积? …… 65
问题 3.30　如果旋转曲线与转轴不在一个平面内,怎样求旋转体的体积? …… 66
问题 3.31　怎样理解在换元积分中将反常积分变成为定积分? …… 66
第四章　无穷级数 …… 68
问题 4.1　设$\{S_n\}$为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列,若 $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$存在,该级数是否收敛? …… 68
问题 4.2　两级数的敛散性与它们逐项和级数的敛散性有什么关系? …… 68
问题 4.3　发散级数加括号后所得级数一定发散吗? 怎样用“加括号”的性质来判定一个级数的敛散性? …… 69

问题 4.4　去掉或添加无限项，级数的敛散性是否发生变化？ ………… 69
问题 4.5　通项趋于零与级数收敛的关系如何？ ……………………… 70
问题 4.6　任意项级数能否用正项级数的审敛法判定其敛散性？ …… 70
问题 4.7　若 $a_n \leqslant b_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定收敛吗？…… 71
问题 4.8　正项级数的第一比较审敛法应怎样使用？ ………………… 71
问题 4.9　正项级数的第二比较审敛法应怎样使用？ ………………… 72
问题 4.10　正项级数的检比法与检根法应怎样使用？ ……………… 74
问题 4.11　满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否一定收敛？满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$ 的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否一定发散？ ……………… 74
问题 4.12　判定一个正项级数的敛散性，应选取哪一个审敛法？ …… 74
问题 4.13　检比法与检根法各有什么优点？ ………………………… 75
问题 4.14　什么是积分审敛法？积分审敛法的优缺点是什么？ ……… 76
问题 4.15　当条件 $a_n \geqslant a_{n+1}$ 不满足时，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 一定发散吗？ ……………………………………………… 76
问题 4.16　若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 一定收敛吗？ ……………………… 77
问题 4.17　若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 一定收敛吗？ ………………… 77
问题 4.18　若任意项级数绝对收敛，则它一定条件收敛，对吗？ ……… 77
问题 4.19　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在其收敛域上绝对收敛，对吗？ ………… 78
问题 4.20　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径为 R，那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ 的收敛半径是多少？ ……………………………………………… 78
问题 4.21　若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2，则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛半径必为 $\min\{R_1, R_2\}$，对吗？ … 79
问题 4.22　如果 $n\to+\infty$ 时，$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ 的极限不存在，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径怎样求？ ……………………………………… 79
问题 4.23　$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内的 Taylor 级数是否一定收敛于

$f(x)$? …… 80
问题 4.24　$f(x)=\frac{1}{2-x}$在 $x=1$ 点怎样展开成幂级数? …… 81
问题 4.25　怎样求幂级数的和函数? …… 81
问题 4.26　幂级数逐项求导或逐项积分后所得幂级数的收敛域与原级数是否相同? …… 82
问题 4.27　怎样用“间接展开法”将函数展开成幂级数? …… 83
问题 4.28　$f(x)$满足 Dirichlet 条件,那么在 $f(x)$的间断点处,它的 Fourier 级数是否与 $f(x)$一定不相等? …… 84
问题 4.29　$f(x)=x(0\leqslant x\leqslant\pi)$的正弦级数在端点处的值为多少? …… 85
问题 4.30　怎样求 Fourier 级数和函数在一点的值? …… 85
第五章　多元函数微分学及其应用 …… 87
问题 5.1　重极限三种定义的差异． …… 87
问题 5.2　二重极限中当动点沿任何直线方向趋于定点时极限存在且相等,能否断言重极限存在? …… 88
问题 5.3　能否用极坐标变换求二重极限? …… 89
问题 5.4　判定二重极限不存在的常用方法有哪些? …… 89
问题 5.5　计算二重极限有哪些常用的方法? …… 90
问题 5.6　二元函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上关于两个自变量 x 和 y 分别都连续,能否断言 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续? …… 91
问题 5.7　计算偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$时,能否将 $y=y_0$ 代入 $f(x,y)$中,再对 x 求导? …… 92
问题 5.8　计算 $f'_x(0,0)$时,将 $y=0$ 代入后再对 x 求导,为什么会出现矛盾呢? …… 92
问题 5.9　二元函数连续性与可导性(即一阶偏导数都存在)之间有怎样的关系? 它与一元函数的情形有何不同? …… 93
问题 5.10　二元函数的连续性与可微性的关系如何? …… 93
问题 5.11　二元函数可导性(即一阶偏导数都存在)与可微性之间关系如何? …… 94
问题 5.12　二元函数的连续、可导、可微之间的关系与一元函数这几个基本概念之间的关系有何不同? …… 95
问题 5.13　若在区域 D 内恒有 $f'_y(x,y)=0$,能否断言函数 $f(x,y)$在 D 内的函数值与 y 无关? …… 96
问题 5.14　在区域 D 上偏导数恒为零的条件． …… 96
问题 5.15　有人认为求出函数 $z=f(x,y)$的两个偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$后,

则 $\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 就是函数 $f(x,y)$ 的全微分，对吗？ ········ 96
问题 5.16　如何判定函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的可微性？ ·········· 97
问题 5.17　可导的二元函数复合后仍可导吗？ ························· 97
问题 5.18　在计算复合函数的偏导数时，等式两端的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 形式相同，但含义不同． ···································· 98
问题 5.19　计算抽象函数二阶偏导数时的一种典型错误． ·············· 99
问题 5.20　如何利用多元函数的复合函数求导法求一元幂指函数的导数？ ································· 99
问题 5.21　求隐函数的导数（或偏导数）的方法有哪些？ ··············· 100
问题 5.22　求隐函数的二阶偏导数用什么方法较为方便？ ··············· 101
问题 5.23　如何求曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在一点处的切线方程？ ······ 102
问题 5.24　关于偏导数和方向导数的关系． ···························· 103
问题 5.25　若 $f(x,y)$ 在点 $M(x,y)$ 处沿各个方向的方向导数都存在，那么 $f(x,y)$ 是否一定在点 $M(x,y)$ 处连续？ ········ 104
问题 5.26　在一点处两个一阶偏导数都存在的二元函数在该点沿任一方向的方向导数都存在吗？ ·························· 105
问题 5.27　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任一方向 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$ 的方向导数都存在，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\cos\theta+f'_y(x_0,y_0)\sin\theta$，那么 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 一定可微吗？ ··································· 106
问题 5.28　在有界闭区域上连续的二元函数在该区域内唯一的极值点是否一定为最值点？ ··························· 106
问题 5.29　二元函数在点 (x_0,y_0) 处的极值与一元函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在 x_0 和 y_0 处极值的关系． ················· 107
问题 5.30　如果点 (x,y) 在过原点的任意一条直线 L 上变动时，函数 $z=f(x,y)$ 都在原点处取得极小值，那么函数 $f(x,y)$ 在原点是否一定取得极值？ ························· 107
问题 5.31　如何求隐函数的极值？ ·································· 108
问题 5.32　如何利用不等式 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 求条件极值？ ·· 108

问题 5.33　如何利用多元函数条件极值证明函数不等式？ …… 109
第六章　多元函数积分学及其应用 …… 110
问题 6.1　在直角坐标系下，怎样将二重积分化为累次积分？ …… 110
问题 6.2　怎样交换二次积分的积分次序？交换二次积分的积分次序有何意义？ …… 111
问题 6.3　关于极坐标下二重积分的计算问题． …… 112
问题 6.4　怎样计算由参数方程给出边界曲线的平面区域上的二重积分？ …… 115
问题 6.5　在重积分计算中，怎样利用对称性简化计算？ …… 115
问题 6.6　怎样由含有未知函数 $f(x,y)$ 及 $f(x,y)$ 的二重积分的方程中求出 $f(x,y)$？ …… 118
问题 6.7　怎样利用二重积分证明定积分不等式？ …… 118
问题 6.8　怎样通过二重积分的一般换元法计算二重积分？要注意些什么问题？ …… 120
问题 6.9　二重积分计算中的广义极坐标变换是怎么一回事？何时选用这种方法计算二重积分？ …… 121
问题 6.10　为什么说在多元函数积分学中，二重积分最为基本也最为重要？ …… 122
问题 6.11　在三重积分的计算中，何时采用“先重后单”法？怎样应用这种计算法？ …… 123
问题 6.12　怎样利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分？ …… 124
问题 6.13　三重积分在柱面坐标和球面坐标下的计算与二重积分在极坐标下的计算有什么关系？ …… 126
问题 6.14　三重积分化为柱面坐标和球面坐标下累次积分错误辨析． …… 127
问题 6.15　怎样利用微元法求引力？ …… 129
问题 6.16　两类线积分的计算法的相同之处是什么？不同之处是什么？ …… 130
问题 6.17　怎样理解两种类型面积分的联系？怎样利用这种联系转化面积分的计算？ …… 131
问题 6.18　在线(面)积分中，为什么可将积分曲线(曲面)的方程代入被积函数？ …… 132
问题 6.19　怎样理解第二型面积分 $I=\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 中的 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$？ …… 133

问题 6.20　在多元函数积分中怎样利用“字母轮换性”简化计算？…… 135

问题 6.21　怎样计算变力沿曲线所作的功？…… 136

问题 6.22　Green 公式有什么意义和用途？应用 Green 公式时应注意什么问题？…… 137

问题 6.23　关于 Green 公式的另一形式．…… 139

问题 6.24　怎样判别平面线积分 $\int_{(c)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是否与积分路径无关？…… 140

问题 6.25　怎样计算与路径无关的平面第二型线积分？…… 142

问题 6.26　怎样判别空间线积分是否与积分路径无关？…… 143

问题 6.27　怎样计算与路径无关的空间第二型线积分？…… 143

问题 6.28　怎样计算有势场的势函数？…… 144

问题 6.29　Gauss 公式有什么意义和用途？应用 Gauss 公式时应注意什么问题？…… 146

问题 6.30　计算面积分 $\iint_{(S)} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 主要有哪些方法？…… 148

问题 6.31　怎样计算含参变量的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$？…… 151

第七章　常微分方程 …… 152

问题 7.1　是否所有微分方程都存在通解？…… 152

问题 7.2　通解是否为微分方程所有解的表达式？…… 152

问题 7.3　什么样的微分方程的通解能包含它的所有解？…… 152

问题 7.4　当一个微分方程不能分离变量时，能否用分离变量的方法求它的通解？…… 154

问题 7.5　形如 $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ 的方程怎样求解？…… 154

问题 7.6　什么样的微分方程能化成一阶线性微分方程？…… 155

问题 7.7　线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解怎样表示？…… 156

问题 7.8　什么是全微分方程？怎样求解全微分方程？…… 157

问题 7.9　怎样求微分方程的积分因子？…… 158

问题 7.10　微分方程 $(y^4 - 3x^2)\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x = 0$ 可以用哪几种方法求得它的通解？…… 159

问题 7.11　微分方程 $(y^2 - x^2)\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y = 0$ 可以用哪几种方法求得它的通解？…… 160

问题 7.12　可降阶的二阶微分方程怎样求解? …… 161
问题 7.13　高阶微分方程与一阶微分方程组有什么关系? …… 162
问题 7.14　微分方程组解的积分曲线与轨线有什么关系? …… 163
问题 7.15　什么是微分方程组的首次积分? 它的几何意义是什么? …… 164
问题 7.16　一阶线性齐次微分方程组的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$,若满足 $\boldsymbol{x}(t_0)=\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{x}(t)\equiv\mathbf{0}$ 的性质有哪些用途? …… 164
问题 7.17　怎样求非齐次线性微分方程组的一个特解? …… 165
问题 7.18　一阶线性微分方程组怎样化为高阶线性微分方程来求解? …… 166
问题 7.19　常系数一阶线性微分方程组的解与其系数矩阵的特征值和特征向量有什么关系? …… 167
问题 7.20　高阶线性微分方程解的一个性质 . …… 168
问题 7.21　求二阶线性齐次微分方程特解的常数变易法 . …… 168
问题 7.22　用二阶线性微分方程的特解怎样表示它的通解? …… 169
问题 7.23　怎样验证一个含任意常数的函数是某个线性微分方程的通解? …… 170
问题 7.24　怎样用常数变易法求二阶线性微分方程的一个特解? …… 170
问题 7.25　怎样设出 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t)+g(t)$特解的形式? 其中 $f(t),g(t)$均为多项式、指数函数及正弦、余弦函数的乘积 . …… 171
附录　向量代数与空间解析几何 …… 173
问题 1　如何理解一个向量 $\boldsymbol{a}$,它与数量有何区别? …… 173
问题 2　对于任意两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,是否必有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\neq\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$? …… 173
问题 3　什么是向量 $\boldsymbol{a}$ 在有向直线 $\boldsymbol{L}$ 上的投影 . 投影总是正的吗? …… 174
问题 4　什么是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标? 向径的坐标与向径终点的坐标之间有何关系? …… 174
问题 5　向量的几何表示与向量的坐标表示有何不同? …… 174
问题 6　向量与向量的乘积是如何定义的? 举例说明它们的应用 . …… 175
问题 7　非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时,下列结论成立:(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平分 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角;(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直;(3) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$. …… 176

问题 8　如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 沿相同方向旋转同一角度，那么它们的和、差、数量积、向量积是否改变？为什么？ …… 176
问题 9　三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关(线性无关)时，它们在几何上有何特征？ …… 176
问题 10　什么叫直线的方向向量？一条直线的方向向量唯一吗？什么叫平面的法向量？一个平面的法向量唯一吗？ …… 177
问题 11　已知空间三个点 P_1,P_2,P_3 的坐标，如何利用向量的运算求这三点所构成的三角形的面积？ …… 177
问题 12　怎样利用平面束的方程求解直线与平面的相关问题？ …… 178
问题 13　怎样求经过一直线 L 及已知点 P 的平面方程？ …… 178
问题 14　如何判断两条直线是相交、异面还是重合？ …… 179
问题 15　空间直线的方程通常有几种表示形式？它们各有何特点？ …… 179
问题 16　如何求两条异面直线间的距离？ …… 180
问题 17　如何求一点 P 到空间直线 L 的距离？ …… 181
问题 18　方程 $F(x,y)=0$ 在平面直角坐标系和空间直角坐标系下分别表示什么图形，它们之间有何联系？ …… 181
问题 19　一般二次方程当二次项系数不全为 0 时必定表示二次曲面吗？ …… 181
问题 20　如何求空间曲线 L 在指定坐标面上的投影曲线的方程？ …… 182
问题 21　怎样求直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转所得到的旋转曲面的方程？ …… 182
问题 22　三元线性方程组的解与三个对应平面间的位置关系问题． …… 183

第一章　函数、极限、连续

问题 1.1　为什么要引入确界概念?

答　引入确界概念的目的是为了补充一种描述实数连续性的方法,从而给论证一些问题带来方便.

我们知道,任何有限的数集都有最小数与最大数,这个最小数与最大数分别就是该有限数集的下边边界与上边边界.因此,对有限数集来说,并不难指出它的下边边界与上边边界.

对无限数集,情况就复杂了.若无限数集上方(下方)无界,自然没有上边(下边)边界.若无限数集有上界(下界),如果它存在最大(小)数,那么这个最大(小)数就是它的上边(下边)边界;如果它不存在最大(小)数,那么它是否有上边(下边)边界?如果有的话,哪个数可以作为它的上边(下边)边界呢?例如,无限数集

$$\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$$

有上界,但没有最大数,那么哪个数可以作为它的上边边界呢?我们就把无限数集 $\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ 的一个上界,而它又是最接近无限数集 $\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ 的数 1,即它的上确界

$$\sup\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}=1$$

作为数集 $\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ 的上边边界.于是,有上界没有最大数的无限数集,它的上确界就起到了它的上边边界的作用.

例如,我们经常说“开区间 (a,b) 的长是 $b-a$”,这是怎样计算(定义)的呢?显然,开区间

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

是有界无限集,既没有最大数,又没有最小数,但是,它却有下确界 a 与上确界 b.我们就把开区间的下确界与上确界分别作为它的下边边界与上边边界.于是,开区间 (a,b) 的长 d 就是

$$\begin{aligned} d &= \sup\{x \mid a<x<b\}-\inf\{x \mid a<x<b\} \\ &= \sup\{y-x \mid \forall x, y \in(a,b), y>x\} \\ &= b-a . \end{aligned}$$