重庆市精品课程教材

$$P(\Omega)=1 \quad P(\varnothing)=0$$

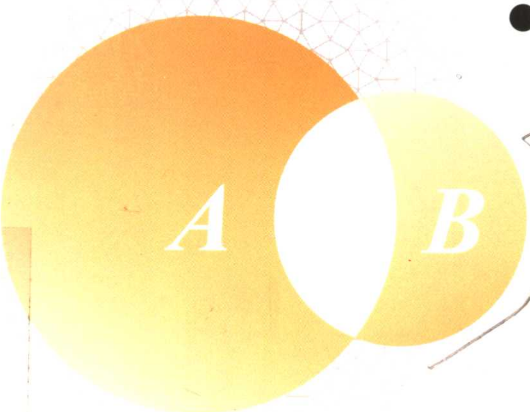
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \quad P(\bar{A})=1-P(A)$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

概率论与数理统计

Gailülun yu Shulitongji

● 杨虎 刘琼荪 钟波 编 ●



重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

重庆市精品课程教材

概率论与数理统计

杨　虎　刘琼荪　钟　波　编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是高等学校非数学专业的概率论与数理统计教材,全书共9章,包括随机事件、随机变量、数字特征、大数定律和中心极限定理、统计概念、参数估计、假设检验、回归分析。各章根据教学大纲要求和复习需要配置了相应习题并在书后附有参考答案,附录1汇集了近两年全国硕士统考题目、原始解答及评分标准,附录2给出了重庆大学数理学院研究生概率统计复试最新试题(本书为指定复试教材)。本书讲解简明扼要,注重应用,例题覆盖面广,也可作为实际工作者的应用参考书和工具书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨虎,刘琼荪,钟波编.—重庆:重庆大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-5624-4149-6

Ⅰ.概… Ⅱ.①杨…②刘…③钟… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第083693号

概率论与数理统计
杨 虎 刘琼荪 钟 波 编
责任编辑:王维朗 曾令维 版式设计:曾令维 王维朗
责任校对:夏 宇 责任印制:张 策
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编:400030
电话:(023) 65102378 65105781
传真:(023) 65103686 65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)
全国新华书店经销
重庆科情印务有限公司印刷
*
开本:787×960 1/16 印张:16.5 字数:314千
2007年6月第1版 2007年6月第1次印刷
印数:1—7 000
ISBN 978-7-5624-4149-6 定价:19.80元

符号说明

样本空间:Ω

事件:$A,B,C,\cdots$ $A=\{X<a\}$,$B=\{X=1,2,3\}$

随机变量:$X,Y,Z,\cdots$

二维随机变量函数:$U=U(X,Y)$,$V=V(X,Y)$

概率:$P(\cdot)$

离散型随机变量 X 的取值:$a_1,a_2,\cdots$或 $b_1,b_2,\cdots$

分布律定义:$P\{X=a_i\}=p_i,i=1,2,\cdots,P\{X=a_i,Y=b_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$

连续型随机变量 X 的密度函数:$f(x)$

随机变量 X 的分布函数定义:$F(x)=P\{X\leqslant x\}$

常见分布的记号:二项分布 $B(n,p)$,泊松分布 $P(\lambda)$,几何分布 $G(p)$,均匀分布 $U[a,b]$,指数分布 $\Gamma(1,\lambda)$,正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,卡方分布 $\chi^2(n)$,t 分布 $t(n)$,F 分布 $F(n,m)$

随机变量 X 的数学期望及方差:EX,DX

随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望及方差:$E(g(X))$,$D(g(X))$

X,Y 的协方差:$\mathrm{cov}(X,Y)$

X,Y 的相关系数:$\rho(X,Y)$

样本:$X_1,X_2,\cdots,X_n$,样本观测值:$x_1,x_2,\cdots,x_n$

样本均值:$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差:$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本标准差:$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本 k 阶原点矩:$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots$

样本 k 阶中心矩:$M_k^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,\ k=1,2,\cdots$

求和项的符号:$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 或 $\sum_{i=1}^{n}x_i$

乘积项的符号:$\prod_{i=1}^{n}X_i$

前言

本书的编写总结了重庆大学十余年来的教学实践经验，参照了国家制定的教学大纲要求，并参考了最新的全国考研大纲，适宜于高等院校非数学类的各专业本科学生使用，可用作本科生教材和阅读参考书。

重庆大学概率论与数理统计课程是重庆市市级精品课程，也是重庆大学重点建设的大学数学公共基础课程之一。随着社会发展的加速和深化，大量涌现的各个专业领域的问题相当复杂，涉及国计民生的重要社会、经济问题也急切地需要深入研究，如金融风险、保险精算、环境保护、可持续发展等，传统的定性研究理论和方法已无法满足这些热点问题的研究需要。本门课程对培养学生的科学思维能力、注重理论联系实际的教学思想、提高学生分析问题和解决问题的能力、扩展基础理论知识面都具有重要的作用。

本书在取材和写作上，有如下特色：

1）注重理论知识与实际问题的结合，注重培养学生运用知识解决问题的能力，注意吸收国内外优秀教材的长处，图文并茂，使教材通俗易懂，可读性强；

2）在例题中尽可能采用一些反映各个领域的应用背景或与日常生活比较贴切的题目，如系统可靠性问题，航空满座率问题，产品检验问题，血液检验问题，药效检验问题，保险品种保费与索赔计算，

投资组合风险问题，社会经济调查等，使学生对运用“概率论与数理统计”知识解决实际问题具有感性认识，对本门课程所授知识产生浓厚兴趣，从而变被动学习为主动学习；

3）考试是测评学生所学知识掌握程度的一种手段。对非数学类各个专业的学生而言，常规的考试内容主要有：基本概念题、简单演算题、计算题。平时学生练习的题目应该与考试题目挂钩，因此，在编写教材的习题中兼顾考虑了考试的题型与题目，使之匹配，同时考虑到全国研究生入学考试的实际需要，参考了近年来全国考研大纲，并在附录中给出了近年来出现在各门数学试卷中的概率统计试题和评分标准。还在附录中给出了重庆大学数理学院最近硕士生复试的概率统计试题。

概率论与数理统计作为高校的一门重要数学基础课程，在数学各门课程中并不算难，也不算很抽象，但大学生学习这门课程往往很吃力，原因在于这门课比其他一些数学课程灵活得多，要跳出严谨的数学思维习惯有一个过程，尤其是数理统计，需要学生反复地体会统计含义，在数学的推导和计算中明白蕴含其中的随机本质。因此，要学好本门课程，大量的练习这一学好数学的法宝仍然需要，但勤于思考和举一反三，学会归纳尤为重要。

由于编者水平所限，不当乃至错谬之处在所难免，恳请国内同行及广大读者不吝赐教。

编　者

2007年5月8日

目录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

人们观察到的现象大体上可分为两类,一类是在某些确定的条件下,可以预知过程和结果的,如物理实验、天文观测、春夏更替等,可称之为必然现象;另一类现象即使在相同的条件下,结果也是不可预知的,每次的结果也不尽相同,或者即使知道它过去的状态,也不能肯定其将来的发展状态,如天气预报、股票走势、购买彩票、机械故障等,可称之为偶然性现象或随机现象。随机现象随处可见,自然界的本质就是随机的,所谓的确定性现象,比如水加热会沸腾,种瓜得瓜、种豆得豆,买的汽车会出故障,会最终报废,人的生命有限,太阳从东边升起等,只在一定的范围或一定的条件下成立,如果没有任何限制,只要改变条件,就不再是确定性现象,同样会表现出某种不确定性,这种不确定性通常也不可能精确地量化,只能了解或认识其整体趋势(称之为统计规律性,也就是有条件的确定性),比如明天是否下雨?股票是否上涨?涨多少?一个人能活多少岁?新买的汽车什么时候出现第一次故障?水被加热到多少度沸腾?转基因的豆会长出什么来?太阳从东边升起,被肉眼观测到的时间(考虑云层的影响)等都属于随机现象。又如:

(1)掷一枚均匀硬币,观察正面朝上还是反面朝上;

(2)将 10 件相同型号产品标上号码 1,2,…,10,从中任取一件,观察取得几号产品;

(3)一天内进入超市的顾客数;

(4)一台电视机的使用寿命;

(5)实弹射击,观察射击的弹着点。

读者还可以列举很多有趣的随机现象。有很多随机现象是可以重复进行观察的,如抛掷硬币可以重复进行。有放回地抽取产品可以重复进行。以上 5 个例子,有着共同的特点,归纳如下:

(1)试验可以在相同条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,并且试验前可以确定所有可能出现的

结果;

(3)每次试验之前不能准确预言哪一个结果会出现。

将具有上述三个特点的试验称为随机试验,记为 E。

1.1.2 样本空间

将随机试验 E 中可能出现的简单结果称为样本点(或称为基本结果),一般用小写字母 ω,e 等表示。由所有样本点组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω。例如:

(1)抛掷一枚均匀硬币试验 E_1,则样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中 ω_1 表示正面出现,ω_2 表示反面出现。如果向上抛掷两枚硬币,则样本空间 $\Omega'=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$;其中 $\omega_1=$(正,正),$\omega_2=$(正,反),$\omega_3=$(反,正),$\omega_4=$(反,反)。

(2)取产品的随机试验 E_2,样本空间 $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$,其中 ω_i 表示取到第 i 号产品,$i=1,2,\cdots,10$,也可直接明了地记样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,\cdots,10\}$。

(3)统计某天进入某超市人数的随机试验 E_3,$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$,这是一个含有有限个样本点的样本空间。其中"0"表示"无人光顾超市",这种可能性有多大呢?

(4)一台电视机的寿命试验 E_4,$\Omega_4=\{t\mid t\in[0,+\infty)\}$ 或 $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$,这是一个非负的实数集。

(5)实弹射击随机试验 E_5,假定靶面是由半径为 r 的圆面组成,则样本空间 $\Omega_5=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$,多次使用步枪射击,每次击中靶面的位置不一定会全部相同,并且射击前不能预言哪一点会被击中。

值得注意的是:样本空间的样本点可以是数也可以不是数;另外,样本空间可分为有限和无限两类,譬如样本空间 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 中的样本点的个数为有限个,样本空间 Ω_4 和 Ω_5 中样本点为无限个。在学习中要注意能正确地写出恰当描述随机试验的样本空间。对同一样本空间可能表示不同的随机试验,例如,样本空间 $\Omega=\{0,1\}$,既可以描述掷一枚硬币出现正面或反面的随机试验,也可以描述产品检验中出现"正品"或"次品"的随机试验。把具体问题的随机试验用样本空间来描述,是建立一个数学模型的前提。引入样本空间会给数学处理带来许多方便。

1.1.3 随机事件

随机事件,简称事件,可用样本空间的一个子集表示。常用大写字母 A,B,C 等表示。因此,随机事件就是试验的若干个结果组成的集合。特别地,如果一个随机事件只含有一个实验结果(单个样本点),则称此事件为基本事件,如图 1.1.1 所

示。例如，掷一颗均匀骰子，“出现奇数点”是一个事件，它是由1点、3点、5点三个样本点组成，记 $A=\{1,3,5\}$。在一次试验中，只要事件 A 的某一个样本点出现，如3点出现，则称事件 A 发生了。就一次试验而言，随机事件 A 可能发生，也可能不发生。随机事件有如下几个特征：

(1)任一随机事件 A 是样本空间的子集合，可以使用维恩(Venn)图表示(又称文氏图，见图1.1.1)；

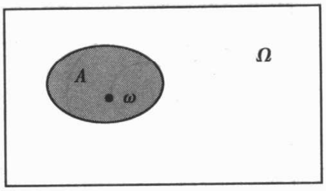


图1.1.1 样本空间中的事件 A

(2)事件 A 发生当且仅当 A 中某一基本结果发生；

(3)事件 A 可以用集合表示，也可以用语言描述。

例1.1.1 (1)掷两枚硬币试验的样本空间：$\Omega'=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$。

$A=$“至少出现一个正面” $=\{$(正,正),(正,反),(反,正)$\}$；$B=$“恰好出现一个正面” $=\{$(正,反),(反,正)$\}$。

(2)对电视机的寿命试验：$\Omega_4=\{t|t\geqslant 0\}$。

$A=$“电视机寿命在10年以内” $=\{t|0\leqslant t<10\}$；

$B=$“电视机寿命在10年以上” $=\{t|t>10\}$。

任意一个样本空间都存在一个最大子集(Ω)和最小子集($\varnothing$)，称最大子集为必然事件，称最小子集为不可能事件，分别表示为 Ω 和 $\varnothing$。例如，掷一颗骰子，“出现点数不超过6”是一个必然事件，“出现7点”是不可能事件。

1.1.4 事件之间的关系与运算

为了以后的概率计算化繁就简，需要研究事件之间的关系和运算规则。由于事件被描述成集合，所以事件间的关系和运算就可以借助集合来实现。

(1)子事件　如果事件 A 的样本点也属于事件 B，即 $\omega_1\in A$，则 $\omega_1\in B$，称 A 为 B 的子事件，记为 $A\subset B$。其含义为“事件 A 发生必然导致事件 B 也发生”。例如，掷一颗骰子，$A=$“出现4点”，$B=$“出现偶数点”，显然，事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即有关系 $A\subset B$，如图1.1.2所示。

特别地，如果 $A=B$，称事件 A 与 B 是互为子事件的关系，表示同一个事件可能会有两种以上的表达形式。例如，掷两颗骰子，事件 A 表示“两颗骰子的点数之和为奇数”，事件 B 表示“两颗骰子的点数一奇一偶”，这是同一事件的两种表示，显然有关系 $A=B$。

(2)和事件　定义事件 A 或者事件 B 的样本点组成的集合为和事件，记为 $A\cup$

B,即 $\omega \in A$ 或 $\omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \cup B$,如图 1.1.3 所示 $A \cup B$ 的含义为“事件 A 和 B 至少有一个发生”。例如,假定某产品仅由两个零件组装而成,该产品不合格意味着两个零件至少有一件不合格,令 A_i =“第 i 个零件不合格”,$i=1,2$,A =“产品不合格”,则 $A=A_1 \cup A_2$。

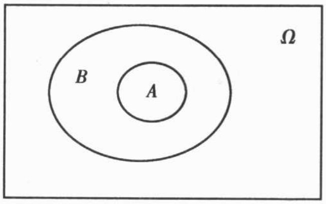


图 1.1.2　子事件 $A \subset B$

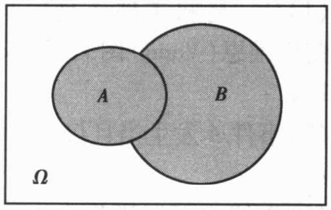


图 1.1.3　和事件 $A \cup B$

两个事件的和事件可以推广到多个事件的和事件,即事件 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 发生表示事件 $A_1,\cdots,A_n$ 至少有一个发生,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。

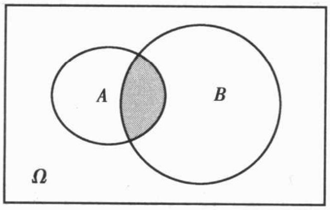


图 1.1.4　积事件 AB

(3)积事件　定义既属于事件 A 同时又属于事件 B 的样本点组成的集合为积事件,记为 $A \cap B$,简记为 AB。即 $\omega \in A$ 与 $\omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \cap B$。如图 1.1.4 所示 AB 的含义为“事件 A 与 B 同时发生”。例如,假定某产品仅由两个零件组装而成,产品合格意味着两个零件都合格,令 A_i =“第 i 个零件合格”,$i=1,2$,A =“产品合格”,即 $A=A_1 \cap A_2$。

同理,两个事件的积事件可以推广到多个事件的积事件,事件 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 发生表示事件 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 \cdots A_n$。

(4)互斥事件与对立事件　如果事件 A 与 B 没有公共的样本点,即满足 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互斥事件(互不相容事件)。其含义为:事件 A 与 B 不可能同时出现。如果事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$ 和 $A \cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为对立事件,记事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$。例如,在电视机寿命试验中,“电视机寿命小于 1 万小时”与“电视机寿命大于 5 万小时”是两个互斥事件,而“电视机寿命小于 1 万小时”的对立事件是“电视机寿命大于或等于 1 万小时”。如图 1.1.5 和图1.1.6 所示。

显然,对立的两事件一定是互斥的,反之,则未必成立。如果有 n 个事件 A_1,$A_2,\cdots,A_n$,满足条件 $A_iA_j=\varnothing$,$\forall i \neq j$,则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥的。

如果 $AB=\varnothing$,则简记 $A \cup B$ 为 $A+B$。如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$。

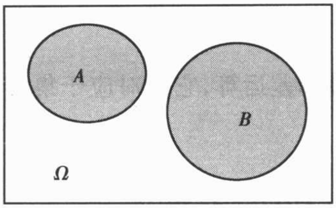


图 1.1.5　互斥事件 $AB=\varnothing$

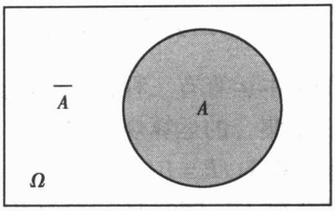


图 1.1.6　对立事件 $\overline{A}$

(5)差事件　由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$。即 $\omega\in A$ 而 $\omega\notin B\Leftrightarrow\omega\in A-B$,其含义为:事件 A 发生而事件 B 不发生。注意事件 $A-B$ 还可以表示为 $A\overline{B}$或 $A-AB$。特别地,当 $B\subset A$ 时,$A-B$ 属于正常差,见图 1.1.7 和图1.1.8。

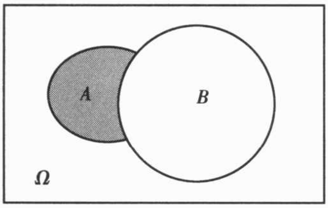


图 1.1.7　差事件 $A-B$

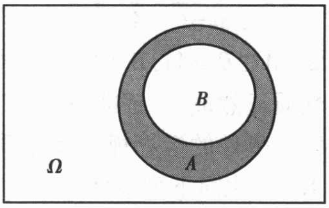


图 1.1.8　正常差事件 $A-B(B\subset A)$

(6)完备事件组　如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互斥,且 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则称 $A_1,\cdots,A_n$ 构成完备事件组。特别地,A 与$\overline{A}$ 为完备事件组,如图 1.1.9 所示。

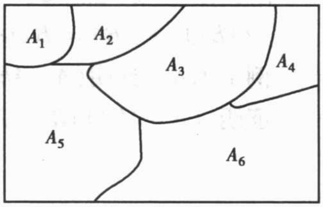


图 1.1.9　完备事件组

一些用语言描述的事件可以用事件之间的关系或运算来刻画,即转化为一种数学符号,便于后面进行概率计算。

例 1.1.2　设 A,B,C 为三个随机事件,试用 A,B,C 表示下列事件。

(1)"A 与 B 发生,而 C 不发生"表示为 $AB\overline{C}$;

(2)"三个事件都发生"表示为 ABC;

(3)"三个事件至少有一个发生"表示为 $A\cup B\cup C$;

(4)"三个事件恰好有一个发生"表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5)"三个事件至少有两个发生"表示为 $AB\cup BC\cup AC$ 或 $AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$;

(6)"三个事件至多有两个发生"表示为$\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$。

1.1.5 事件的运算规则和性质

事件的基本运算有三种:并运算、交运算和差运算,它们对应于集合的并、交和差。因此满足集合的运算规则如下:

(i)交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$

(ii)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$

(iii)分配律 $(A\cup B)C=AC\cup BC,(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

(iv)德摩根律 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

注意:集合的运算规则无消去律,即如果 $A\cup C=B\cup C$ 成立,但 $A=B$ 不一定成立。例如,令 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{1,4\}$,显然 $A\cup C=B\cup C$ 成立,但 $A\neq B$。同理,如果 $A-C=B-C$ 成立,也不能推导 $A=B$ 成立。

性质 1 $A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$

性质 2 $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B, AB=A$

以上性质显然成立,证明略。

运用以上事件的运算规则和性质可以简化事件。

例 1.1.3 化简下列事件

(1)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})$; (2)$\overline{B}\cup(A-B)$

解:(1)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\cup A(B\cup\overline{B})=A$

(2)$\overline{B}\cup(A-B)=\overline{B}\cup A\overline{B}=\overline{B}$(因为 $A\overline{B}\subset\overline{B}$)

例 1.1.4 证明$(A-AB)\cup B=A\cup B$

证明:$(A-AB)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B$

1.2 事件的概率

随机事件的发生带有偶然性。在一次试验中,某随机事件 A 是否发生难以预料,但在多次重复试验中,事件 A 的发生却能呈现出一定的规律,把这种规律性叫做统计规律。譬如,抛掷一枚均匀硬币,做一次试验,可能出现正面,也可能出现反面,重复进行 100 次试验,会发现出现正面和反面的可能性大体相同,各为$\frac{1}{2}$。又如购买彩票后可能中奖可能不中奖,但中奖的可能性大小可以用中奖率来度量;抽取一件产品可能为合格品,也可能为不合格品,但产品质量的好坏可以用不合格品率来度量。由此可见,随机事件发生的可能性可以用数量去度量,并且有大小之别。随机事件的概率就是描述事件出现可能性大小的数量指标,并且在日常生活

和科学技术中,人们非常关心随机事件发生的可能性大小。例如,某厂试制成功一种新止痛片在未来市场的占有率是多少,某商品的次品率是多少,等等。下面介绍几种常见类型中事件的概率计算。

1.2.1　古典概型

古典概型是最基本的随机试验模型,它是概率论早期的主要研究对象。

设随机试验 E 具有以下两个特征:

(1)有限性　样本空间 Ω 只包含有限个样本点,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

(2)等可能性　每个基本事件 $\{\omega_i\}$ 发生的可能性相同。

则称随机试验 E 为古典概型试验。

定义 1.2.1　设试验 E 为古典概型的,样本空间 Ω 由 n 个样本点组成,事件 A 由 r 个样本点组成,则定义事件 A 的概率为 $\frac{r}{n}$,记为 $P(A)$,即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的样本点数}}{\Omega\text{ 中的样本点数}}=\frac{r}{n}$$

称这样定义的概率为古典概率。

例 1.2.1　(取球试验)假设一口袋中装有 10 个乒乓球,其中含有 6 个黄球,4 个白球,从袋中任取 3 球,取球方式分别考虑有放回和无放回的情形。求下列事件的概率:

(1)A =“取出 3 个黄色的乒乓球”;

(2)B =“取出球的颜色分别为(黄、白、黄)”;

(3)C =“取出 2 个黄球,1 个白球”。

解:a. 有放回情形

(1)首先分析样本空间 Ω 的样本点数,第一次从装有 10 个球的袋中任取一球,取法为 10 种,由于可以放回,第二次任取一球仍然有 10 种可能,第三次取球仍有 10 种可能,由排列组合中的乘法原理,则 Ω 的样本点数为 10^3。其次分析事件 A 的样本点数,由于黄色乒乓球有 6 个,事件 A 的样本点数为 6^3,由古典概率公式,得到:

$$P(A)=\frac{6^3}{10^3}=0.216$$

(2)事件 B 表示为(黄、白、黄),因此,样本点数为 $6^2\times4$,其概率为:

$$P(B)=\frac{6^2\times4}{10^3}=0.144$$

(3)事件 C 的发生,可能出现(黄,黄,白)、(黄,白,黄)、(白,黄,黄)三种状

态，每一种状态的样本点数均为 $6^2\times4$，故事件 C 的样本点数为 $3\times6^2\times4$，事件 C 的概率为：

$$P(C)=\frac{3\times6^2\times4}{10^3}=0.432$$

b. 无放回情形

解法一：考虑从 10 只球中接连无放回地取球，第一次有 10 种可能，第二次只有 9 种可能，第三次只有 8 种可能，因此样本空间 Ω 的点数为 $10\times9\times8$，用排列符号记为 P_{10}^3，同理分析事件 A 的样本点数为 P_6^3，则事件 A 的概率为：$P(A)=\frac{P_6^3}{P_{10}^3}\approx$ 0.166 7。

解法二：考虑一次从口袋中取出 3 球，这时不考虑取球的先后次序，因此取法可用组合数计算，样本空间 Ω 的点数表示为 C_{10}^3，事件 A 的样本点数为 C_6^3，所以事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}\approx0.166\ 7$$

同理分析事件 B,C 的概率分别为

$$P(B)=\frac{6\times5\times4}{10\times9\times8}=\frac{P_6^2P_4^1}{P_{10}^3}\approx0.166\ 7;\ P(C)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=0.2$$

注意：在无放回摸球中，所论事件 A 与顺序无关，其概率可以用排列数计算，也可以用组合数计算，但集合 Ω 的点数与集合 A 的点数要么用排列数计算，要么用组合数计算，要一致。对于事件 B 由于与顺序有关，只能用排列数计算。

例 1.2.2 将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去，假定盒子装球容量不限，试求：(1) 每个盒子至多装一只球的概率；(2) 指定其中一个盒子装一只球的概率。

解：设事件 A =“N 个盒子中，每个盒子至多装一只球”，事件 B =“指定其中一个盒子装一只球”。

一个球放入 N 个盒子中的放法有 N 种，n 个球放入 N 个盒子中的放法有 N^n 种。假设固定前 n 个盒子各装一球，其分配方法有 $n!$ 种，从 N 个盒子中任取 n 个盒子各装一球，取法有 C_N^n 种，所以，事件 A 的样本点数为 $C_N^n n!$，即事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$。

若指定一个盒子里装一只球，首先考虑球的取法有 C_n^1 种，其次，剩余的 $N-1$ 个盒子中，$n-1$ 只球的放法有 $(N-1)^{n-1}$ 种，所以事件 B 的样本点数为