高等学校教材系列

工程线性代数（MATLAB版）

陈怀琛　高淑萍　杨威　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
http://www.phei.com.cn

高等学校教材系列

工程线性代数

（MATLAB 版）

陈怀琛　高淑萍　杨　威　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书覆盖了目前我国大学线性代数课程的内容，而且参照美国近 20 年在线性代数教学领域的重大改革，在教学内容和方法上进行了革新。

本书除保持理论上的系统性及严密性外，主要特点是面向应用，把科学计算软件与线性代数有效结合，通过几何图形阐明低阶系统的各种概念；用 MATLAB 程序解决高阶问题；通过 20 多个实例来说明线性代数在后续课程和工程中的广泛应用，使得本来抽象、冗繁和枯燥的课程变得形象、简明而实用。

本书采取了小梯度、多方法、由浅入深的模块式结构，以满足不同层次的学校对本课程的多种要求。

本书可作为高等学校工科有关专业的本科教材，也可作为教师和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程线性代数：MATLAB 版 / 陈怀琛，高淑萍，杨威编著. —北京：电子工业出版社，2007.7
(高等学校教材系列)
ISBN 978-7-121-04617-9

I. 工… II. ①陈…②高…③杨… III. 线性代数－高等学校－教材 IV. 0151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 092302 号

责任编辑：韩同平　　特约编辑：李佩乾
印　　刷：北京季蜂印刷有限公司
装　　订：三河市万和装订厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：12.5　字数：332.4 千字
印　　次：2007 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：4000 册　定价：21.50 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

一、关于本书的创作经历和指导思想

1983 年 10 月 1 日，邓小平为北京景山学校题词：“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”，他又说：“计算机要从娃娃抓起”。这也为课程和教材的改革指明了正确的方向。线性代数课程和教材的改革必须落实这个指示。

我们认为，关于课程的现代化，首先表现在把 20 世纪末的最新科学计算技术引入教学；同时也表现在使课程面向飞速发展的现代工程应用。

线性代数是高校理工科和经济管理等专业的一门重要基础课程。随着互联网和计算机技术的迅速发展，线性代数在计算技术中的基础性地位日益突出，用代数方法解决实际问题已渗透到众多领域。因此，提高大学生的科学计算能力，培养学生实践能力和创新能力，以适应新世纪科技人才对数学素质的要求极为迫切。但传统的线性代数教学内容和方法注重自身的理论体系，强调线性代数的的基本定义、定理及其证明，对线性代数的方法和应用重视不够，几乎不涉及数值计算，结果是后续课程中该用线性代数的地方都尽量避而不用，多数工科的学生在大学本科阶段没有任何一门课用过线性代数，基础课成了纯粹的“考研课”。

要面向世界，就要时刻关注世界发达国家的最新做法。美国的线性代数教育从 1990 年开始了一次大的改革。首先组成了线性代数课程研究组(Linear Algebra Curriculum Study Group，LACSG)。同年 8 月，在美国国家科学基金会(NSF)资助下，他们和工程界的代表组

织了一次大会，共同提出了几条重要的建议，简称为 LACSG Recommendations[1]，其要点是：① 线性代数课程要面向应用，满足广大的非数学专业学生的需要；② 它应该是面向矩阵的；③ 它应该是根据学生的水平和需要来组织的；④ 它应该利用新的计算技术；⑤ 对数学专业要另设课程以提高其抽象性。

1992 年美国科学基金会又资助了一个 ATLAST（Augment the Teaching of Linear Algebra using Software Tools）计划，即用软件工具增强线性代数教学，强调了计算机对线性代数的重要性。该计划先后历经六年，编成了一本 ATLAST 手册培养了大批掌握软件工具的师资，加快了推广的速度。由于实施了以上措施，他们的线性代数教材普遍引入了计算技术，减少了抽象性，加强了实用性，其面貌发生了重大改变[3~6]。

归根到底是两条：一是要强调“技术推动”，即在课程中使用信息技术的最新成果；二是要强调“需求牵引”，基础课的大纲要以满足后续课和工程的需求作为目标。这是一切科学技术发展的动力，线性代数课程也只有这样，才能面向未来。

基于以上的认识，本书第一作者十多年来一直致力于科学计算的推广和应用。先后出版了有关 MATLAB 在机、电信息类专业各主要课程中应用的教材多本，近两年又编写了《线性代数实践及 MATLAB 入门》等教材，以期从基础数学开始，就推动这项事业。

二、本书的特点

本书是在作者近两年的线性代数教改试点的基础上完成的。曾经举办过全校线性代数

教师的培训班和学生中的试点班。试点得到了师生的欢迎和高度评价。

本书对传统的线性代数教材作了重大的改革。其特点主要体现在以下几个方面。

（1）使读者学会线性代数问题的解法和工程计算。线性代数的计算十分冗繁，解四阶的系统要作几十次乘法和加法，用手工解是不现实的。因此过去的教材就不得不避开高阶计算。在本教材中，由于引入了科学计算软件 MATLAB，任何高阶问题都可能在几分钟内解出，使得理论联系实际得以实现。学生可以不在烦琐的计算中消磨时间，而把主要精力放在概念的思考上。

（2）概念的建立是把大量感性知识归纳和抽象到理性的过程。本书中线性代数的主要术语和概念都从二维和三维引出，并赋予它们鲜明的几何形象。然后再用代数方法扩展至高维的公式和推理。这既反映了人脑从感性到理性的认识论，又体现了线性代数从几何到代数发展的方法论。这也与使用 MATLAB 的图形功能密切相关，书中的大量图形都是计算机绘制的，而且还可以有动画演示，这都是传统教材无法做到的。

（3）“需求牵引”是学术发展的推动力。工科学生之所以要把线性代数作为一门基础课来学，就是因为后续课程需要应用它来快速、准确地描述和解决问题，也是因为现在各种工程问题都要应用它。在教学中，让学生知道课程的用途，带着问题学，是提高学习自觉性和动力的重要手段。本书将大量的后续课及工程实际中的问题作为例题和习题，足以使理工经管各类学生都能体会到此课程在各自领域的精彩应用。

可以用三句话来概括本教材的特点：

线性代数抽象吗？看了本书后，你会知道，它的概念都基于空间形象。

线性代数冗繁吗？学了本书后，你会懂得，它的计算可借助简明程序。

线性代数枯燥吗？读了本书后，你会发现，它的应用极其广泛又精彩。

三、如何使用本书

1. 先修和并修课程

本书的初衷，以及所要达到的目标，虽然很吸引人，但在具体教学实践中，也确实遇到了一些问题。我们建议的解决方法如下。

① 关于科学计算语言 MATLAB 的讲解时机。要学好这本教材，必须有 MATLAB 基础，但没有矩阵基础，MATLAB 又不好讲；所以最好是交叉进行。其实线性代数所用到的只是最低限度的 MATLAB 知识，即其中的矩阵代数部分，讲这部分内容只要 3～4 学时，可以插在线性代数课程中进行。本书附录 A 中就给出了本书必需的 MATLAB 初步知识。

② 计算机的上机操作需要计算机文化课打基础，也需要在线性代数课程中给出上机操作的时间，在本课程大纲中安排 10～12 机时较为适当。

③ 为了帮助读者建立空间形象，利用 MATLAB 绘制立体图，需要利用空间解析几何的某些基础。

④ 本书增加了在工程中常用到的线性代数内容，如超定方程组、计算速度与精度的讨论、奇异性和条件数等重要问题，还有工程实例，都要占用一定讲课时间。

把这些因素都算上，本书比传统教材增加的内容约为 12～16 学时，不过读者可以根据需要选学。

2. 根据不同要求选择内容

中国的大学是多层次的。每年上百万学线性代数的大学生中，有很多层次，其要求差

别很大。对多数学生来说，不教他们算题而去教抽象思维，将是对资源的极大浪费。为了适应这种差异，本书采取由浅入深的模块式结构。

① 对于纯粹应用型人才，如三本学生，只要求会解线性代数方程组，学习第 1、2 章和第 3 章的前几节即可。

② 对于如果要求稍高一些，除解方程组外，还要求对向量空间和特征值有初步概念的，可加学第 4 章。

③ 对于要求有系统理论知识并能解决其实际问题的学生，学完前 6 章（可不学小字部分），最好在第 7 章中选学几个例题。重点大学工科学生达到这个要求就够了，有余力应放在提高解决实际问题的能力。学完线性代数会不会解第 7 章的例题，也可以作为新旧教材对比的试金石之一。

④ 要能应付现有的考研要求，则还得学习小字部分。若时间不够，可以不在一年级学，放到考研前再自学。

虽然我们在每一章的理论之后，都介绍了相应的 MATLAB 函数，并不意味着必须按这个次序讲，跳过实践部分并不影响下一章的理论内容。因此“MATLAB 初步”以及各章中的程序的讲解时机可灵活掌握，可以分散放在各章之后，也可集中放在全课之后。后学 MATLAB 的读者可以先跳过编程细节，同样可顺利阅读本书，第 7 章很大程度是为开拓学生思路而设计的，不属基本要求，可根据不同专业学生的背景和接受能力，有选择地学习。

本书把习题分为思考题、笔算题和计算机题三类，主要是便于教学中的灵活选择。思考题主要用于复习基本概念，笔算题用于低阶算法的模仿和推理练习，计算机题则可训练综合处理高阶应用实例的能力。

四、其他说明

需要说明的是，本书中的多数图形是由 MATLAB 产生的，它们与我国出版规范的绘图标准不同。为了使读者在计算机屏幕上所见到的图形与书上一致，我们保留了 MATLAB 的图形格式。为保持文字符号表示与程序中一致，本书中涉及 MATLAB 语言调用格式或程序中的变量符号统一用正体表示。

本书由杨威编写第 1～3 章，高淑萍编写第 4～6 章，陈怀琛负责总的策划、应用实例、MATLAB 编程及全书统编定稿。陈怀琛在机械、控制和电子三个工科领域执教了 54 年，十多年来致力于推广计算机科学计算；高淑萍是数学系的博士，杨威是技术物理系的博士，都有近 20 年的教龄。数学界前辈秦裕瑗教授审阅了本书，对我们的改革方向表示肯定，教育部数学与统计学数学指导委员会支持了这项改革的立项，西安电子科技大学通过办教师培训班、教改试点班等多种方式长期大力支持线性代数课程改革的试验，我校和兄弟院校的老师马建荣、陈文鑫、徐满平、田应福等阅读了初稿并提出了许多好意见。韩同平编辑做了大量细致的工作。在此，谨向他们表示衷心的感谢。

我们希望并相信，这种不同年龄、不同学术背景作者的交叉合作符合学科发展的方向，可以给课程和教材带来更多新鲜因素。在基础课程要更好面向应用、面向现代化的大方向指导下，更需要数学与工科教师的紧密合作，才能推动工科数学的教学改革。

本书的程序集及电子课件可以通过电子工业出版社华信教育资源网免费下载，网址为：

http://www.huaxin.edu.cn

或通过电子工业出版社博文视点公司的www.broad view.com.cn 下载。

如果说《线性代数实践及 MATLAB 入门》主要是面向教师培训的，那么，这本书的对象主要是本科一年级大学学生，让他们在这一门很适合的课程上使用计算机是一个很好的启蒙点，但只能很浅，靠一门课是不够的，在学完微积分及进入其他后续课程时，还应该把 MATLAB、数学和应用三者的结合提高到一个新水平。我们新修订的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《MATLAB 及其在理工课程中的应用指南》[11]将为这个目标提供更多的实例，其中包括大量更深的线性代数问题。

本书还非常幼嫩，肯定有许多不当之处，我们欢迎来自各方面读者的批评和建议。对教材意见的信件可寄：西安电子科技大学 334 信箱陈怀琛收（邮编 710071），电话：029-88202988。作者们的电子邮址如下：

陈怀琛　hchchen@xidian.edu.cn

高淑萍　xdgaosp@263.net

杨　威　weiyang@mail.xidian.edu.cn

编著者

于西安电子科技大学

目　录

第 1 章　线性方程组与矩阵

1.1　概　　述

线性方程组在数学领域的各个分支，以及在自然科学、工程技术，生产实际中经常遇到。同时，线性方程组也是线性代数课程中最基本的内容之一。并且，线性方程组将贯穿于这门课程的始终。

● 提出实际问题

某食品厂收到某种食品的订单，要求这种食品由甲、乙、丙、丁四种原料做成，且该食品中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的比例分别为 15%、5%和 12%。而甲、乙、丙、丁原料中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的百分比由表 1.1 给出。那么，如何用这四种原料配置出满足要求的食品呢？

表　1.1

	甲	乙	丙	丁
蛋白质（%）	20	16	10	15
脂肪（%）	3	8	2	5
碳水化合物（%）	10	25	20	5

● 建立数学模型

设所需要的甲、乙、丙、丁四种原料占该食品的百分比分别为：x_1,x_2,x_3,x_4，则根据题意可以得到方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 20\%x_1+16\%x_2+10\%x_3+15\%x_4=15\% \\ 3\%x_1+8\%x_2+2\%x_3+5\%x_4=5\% \\ 10\%x_1+25\%x_2+20\%x_3+5\%x_4=12\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 20x_1+16x_2+10x_3+15x_4=15 \\ 3x_1+8x_2+2x_3+5x_4=5 \\ 10x_1+25x_2+20x_3+5x_4=12 \end{cases} \tag{1.1}$$

方程组（1.1）的每一个方程中，左端是未知量 x_1,x_2,x_3,x_4 的一次齐次式，右端是常数，这样的方程组称为**线性方程组**。对于本问题，所找到的方程组的解，必须满足 $x_i>0$ $(i=1,2,3,4)$，解才是合理解。

● 分析方程组的解

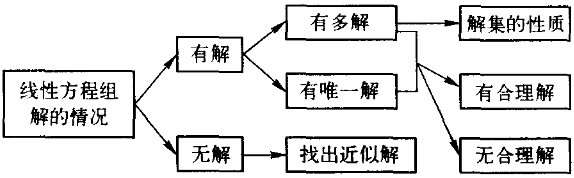
对于上述食品配置问题，我们需要研究线性方程组的下列几个问题:

① 方程组是否有解？有解时，解的个数是多少？如何解？也就是解的存在性和唯一性问题。

② 有多解时，这些解之间的关系如何？所得的解针对实际问题是否合理？

③ 无解时，如何找出最接近实际问题的近似解？

对于一般线性方程组解的情况，可以通过以下方框图来表述:



1.2　二元和三元线性方程组解的几何意义

本节将讨论二元和三元线性方程组解的几何意义。

例 1.1　求解下列四个线性方程组

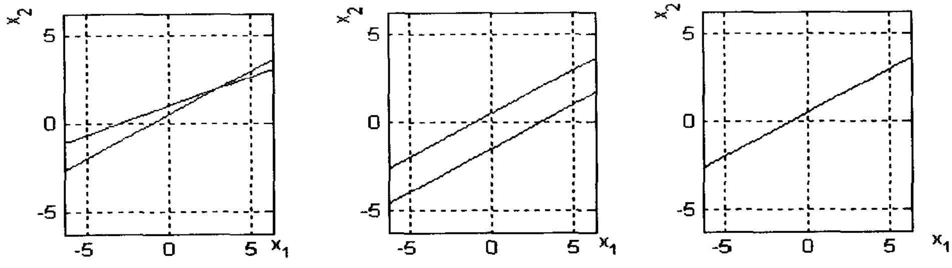
（a）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$　　　（b）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

（c）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$　　　（d）$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$

解: 前三个方程组都是由两个二元一次方程组成的，容易用消元法求解。现在用图解法来理解线性方程组解的几何意义。

方程组(a)的解为：$x_1 = 3$，$x_2 = 2$，它是两根直线的交点，如图 1.1(a)所示。我们把方程组(a)称为**适定**方程组。

方程组(b)的两个方程是**不相容**的，或称为矛盾的，即方程组无解。可以在平面上画出代表两个方程的两根直线，它们平行且不重合，因此没有交点，如图 1.1(b)所示。



(a) 适定　　　(b) 超定　　　(c) 欠定

图 1.1　例 1.1 中方程组(a)～(c)解的情况

方程组(c)的两个方程是相依的，满足第一个方程的解必然也满足第二个方程。其实，这两个方程相当于一个方程，变量却有两个，我们把这样的方程组称为**欠定**方程组。显然它有无穷组解。两个方程所对应的直线重合，如图 1.1(c)所示。

方程组(d)有两个变量，有三个独立方程，它们所对应的三根直线并不共点，即方程组不相容，因而无解，如图 1.2 所示。独立方程数目多于变量数目的不相容方程组称为**超定**方程组。

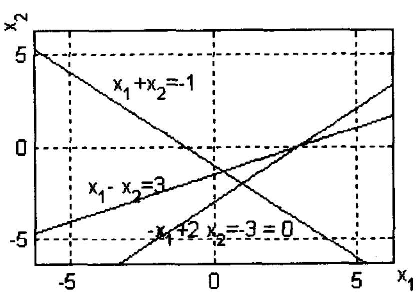


图 1.2　例 1.1 中方程组(d)解的情况

例 1.2 求解下列三元线性方程组

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-2z=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

解: 由方程组（1.2）的第 1、2 两个方程中消去 z，得: $3x-2y=8$；由方程组（1.2）的第 2、3 两个方程中消去 z，得: $-x-4y=6$；将两式联立解得: $x=1.4286, y=-1.8571$；再代入式（1.2）中的任一式，得 $z=-5.4286$。

方程组（1.2）的三个方程对应于三维空间的三个平面，若这三个平面有公共的交点，该交点就是方程组的解，如图 1.3 所示。

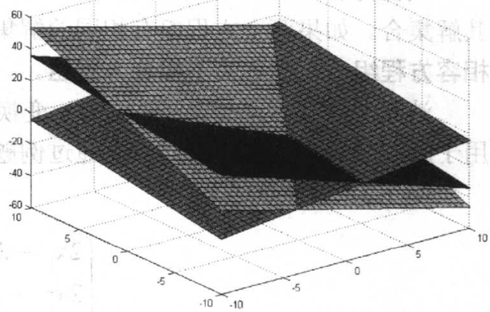
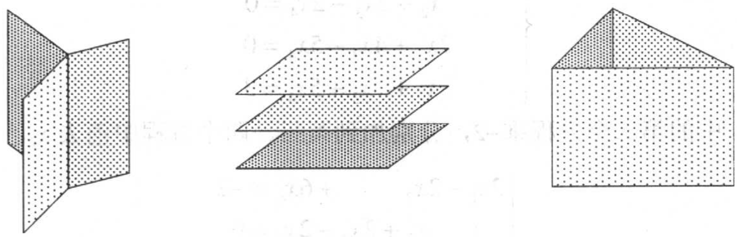


图 1.3 三阶线性方程组求解的图形

如有两个平面重合，或三个平面相交于同一根直线，就会出现无穷个解的欠定情况，如图 1.4(a)所示。同样，当两个平面平行，或者两个平面的交线与第三个平面平行时，三个平面就没有公共交点了，即方程组不相容而无解，如图 1.4(b)和(c)所示。



(a) (b) (c)

图 1.4 三阶方程组多解和无解时的几何解释

对于更多元的线性方程组，不可能想象出其空间的几何图形，但关于欠定、适定和不相容方程的基本概念是一脉相承的，它们的解的特性也都可以推广到高维空间。

1.3 高斯消元法与阶梯形方程组

下面我们把对二元一次方程组、三元一次方程组进行求解的方法，推广到 m 个方程、n 个未知量的线性方程组的一般情况。并且讨论用消元法解线性方程组的具体实行过程。

线性方程组的一般形式如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.3}$$

式（1.3）称为 **n 元线性方程组**，其中: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个未知量; m 是方程的个数; a_{ij}（i=1,2,⋯,m; j=1,2,⋯,n）称为方程组的系数; b_j（j=1,2,⋯,m）称为方程组的常数项。系数 a_{ij} 的第一个下标表示它在第 i 个方程，第二个下标 j 表示它是未知量 x_j 的系数。一般情况

下，未知量的个数 n 与方程的个数 m 不一定相等。

线性方程组（1.3）中解的全体称为它的解集合。解方程组就是求其全部解，亦即求出其解集合。如果两个方程组有相同的解集合，就称它们为**同解方程组**。存在解的方程组称为**相容方程组**，否则称为**不相容方程组**。

消元法的基本思想是：通过消元变换把方程组化为容易求解的同解方程组。这种方法适用于解一般的线性方程组。下面通过例题来说明消元法的具体解法。

例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases} \tag{1.4}$$

解： 将式（1.4）中的第一个方程乘–1,–1.5,–0.5，分别加到第二、三、四个方程上，以便消去第二、三、四个方程中的未知量 x_1，得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases} \tag{1.5}$$

将式（1.5）中的第二个方程乘–2，分别加到第三、四个方程中消去 x_2，得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \\ 3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases} \tag{1.6}$$

把式（1.6）中第三个方程和第四个方程交换位置，得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

形如式（1.7）的方程组称为**行阶梯形方程组**。这样的阶梯形方程组可以用**回代法**方便地逐个求出它的解。

回代过程如下：由式(1.7)中第四个方程，知 $x_4 = 0$，将其回代到第三个方程，得 $x_3 = -1$，再将 x_4, x_3 回代到第二和第一个方程中，分别得 $x_2 = 2$，$x_1 = 1$。所以原方程组（1.4）的解为 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = -1$，$x_4 = 0$。回代运算是直接的，不需要解联立方程，所以运算量比较小。

从上述解题过程可以看出，用消元法解线性方程组可分为两步：① 经过若干次初等行变换后得到一个阶梯形方程组；② 用回代法由后到前逐次求出各个变量。其实，回代过程是另一轮的消元，它消除的是方程组对角线右上方的各项。

在式（1.7）中把第四个方程分别乘以 6,–2,9，加到前 3 个方程中，再将第三个方程乘以 2/3，加到第二个方程中，最后将第二个方程乘 2，加到第一个方程中，得到

$$\begin{cases}2x_1 & & & & =2\\ & x_2 & & & =2\\ & & -3x_3 & & =3\\ & & & -x_4 & =0\end{cases} \tag{1.8}$$

这个阶梯形方程组只保留了对角项。

将式（1.8）中第一个方程乘 0.5，第三个方程乘 $-1/3$，第四个方程乘-1，得到对角线各项系数为 1 的**阶梯形方程组**。这样的方程组称为**最简阶梯形**方程组。得到它就等于求出了方程组的解。

$$\begin{cases}x_1 & & & & =1\\ & x_2 & & & =2\\ & & x_3 & & =-1\\ & & & x_4 & =0\end{cases} \tag{1.9}$$

由方程组（1.4）用消元法变换为方程组（1.9）的过程，是通过对原方程组反复实行下列三种同解变换而得到的:

① 互换两个方程的位置;

② 用一个非零数乘某个方程;

③ 把一个方程的 k 倍加到另一个方程上。

这三种变换称为线性方程组的**初等变换**。因为对方程组而言，这些变换不会改变方程组的解，称为**同解变换**。故方程组（1.9）与原方程组（1.4）同解。

消元法是对线性方程组进行求解的一种最基本方法，这个方法早在约公元前二百年就由中国人提出了。19 世纪德国数学家高斯重新发现了它，并以他的名字命名。这种方法规则刻板，容易程序化，所以可以利用计算机来实现该算法。

1.4 矩阵及矩阵的初等变换

1.4.1 矩阵的概念及定义

例 1.4 某车间有三个工作小组，他们在去年四个季度内的产量如表 1.2 所示。请用矩形数表简化之。

表 1.2 （单位: 台）

	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
第一组	0	200	400	550
第二组	300	150	300	280
第三组	400	300	150	360

解: 可以把上述表格简化成一个 3 行 4 列的矩形数表，为了表明它的整体性，常给它加一对括号，如下所示，其中第 i 行表示第 i 组，第 j 列表示第 j 季度的产量。

$$\begin{bmatrix}0 & 200 & 400 & 550\\ 300 & 150 & 300 & 280\\ 400 & 300 & 150 & 360\end{bmatrix}$$

现在重新观察例 1.3，可以发现，从方程组（1.4）变换到方程组（1.9）的全过程中，方程组中的变量 $\boldsymbol{x_1,x_2,x_3,x_4}$ 并没有参与任何运算，参与运算的只是方程组的系数和常数。于是方程组（1.4）的等式左端和右端的系数和常数可分别写成如下系数数表 $\boldsymbol{A}$ 和常数数表 $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 6\\ 2 & -1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 4 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$$

其中，数表中的行号表示方程的序号；数表 $\boldsymbol{A}$ 的列号表示变量 x 的序号。这就很容易由数表 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 恢复出方程组原型。所以我们就可以通过对线性方程组的系数数表和常数数表来研究线性方程组。

一般地，如果问题所牵涉的数据是以表格形式出现的，那么这些数据常常可以用上述简化的矩形数表来表述。该矩形数表就称为**矩阵**。学习线性代数的目标之一就是要学会利用矩阵这个工具去解决各种问题。

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为 **m 行 n 列矩阵**，简称 **$m\times n$ 矩阵**，通常用大写字母 $\boldsymbol{A,B,C},\cdots$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\boldsymbol{C}_{m\times n},\cdots$ 来表示，有时也记作 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$。矩阵中的 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，其中 a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素。元素全是实数的矩阵称为**实矩阵**；元素有复数的矩阵称为**复矩阵**。

1.4.2 几种特殊矩阵

下面我们介绍几种常见的特殊矩阵。

- 只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$，称为**行矩阵**，又称为**行向量**。为避免元素间混淆，行向量常常记为：$\boldsymbol{A}=\left[a_1,a_2,\cdots,a_n\right]$。
- 只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$，称为**列矩阵**，又称为**列向量**。
- 如果两个矩阵的行数与列数相等，则称它们为**同型矩阵**。
- $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且所有对应位置的元素值均相等，则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**，记为 $\boldsymbol{A=B}$。
- 元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$。
- 行数与列数相同的矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 **n 阶矩阵**，或称为 **n 阶方阵**，简记为 $\boldsymbol{A}_n$。一个 n 阶方阵的左上角与右下角之间的连线称为它的**主对角线**。
- 主对角线以下的元素全为零的方阵称为**上三角矩阵**，即