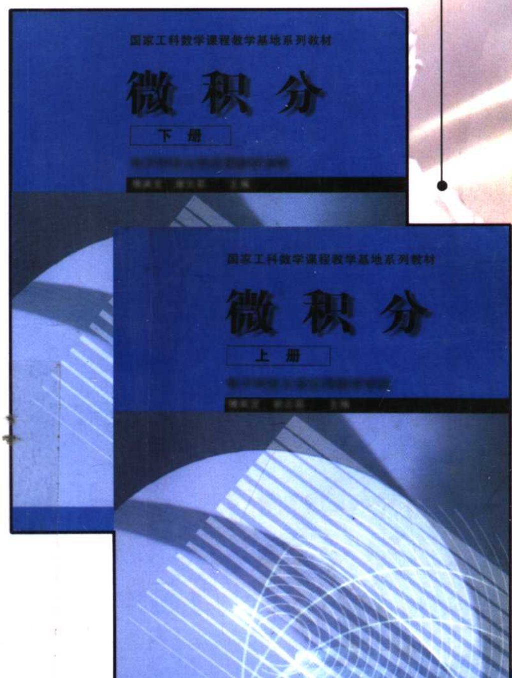
成功笔记系列丛书

微积分成功笔记

成功笔记系列丛书编写委员会◎编



NOTES TO SUCCESS

哈尔滨工程大学出版社

成功笔记系列丛书

微积分成功笔记

（配傅英定、谢云荪第二版教材·高教版）

成功笔记系列丛书编写委员会　编

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合傅英定、谢云荪主编的《微积分》而编写的辅导书。全书按教材的章节顺序编排，对教材中的重点、难点进行了细致的总结和讲解，给学生留下了自己进行总结和小结的空间，旨在帮助学生掌握《微积分》的基础知识，达到将书"读薄、读透"的目的。

图书在版编目(CIP)数据

微积分成功笔记/《成功笔记系列丛书》编写委员会编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.7
(成功笔记系列丛书)
ISBN 978-7-81073-073-0

Ⅰ.微… Ⅱ.成… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048079 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 7.25
字　　数 89 千字
版　　次 2007 年 7 月第 1 版
印　　次 2007 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 10.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

成功笔记系列丛书编委会

Preface 前言

经过精心的策划和组织，与高等学校优秀教材相配套的成功笔记系列丛书出版面世了。

一直以来，课堂上“老师讲、学生记”已经成为学校教学约定俗成的习惯。但是，很多学生因为忙于记录而忽略了对知识的理解和吸收，影响了课堂听课效果。而且近几年来教学方法和手段也在不断地发展和变化，多媒体教学和双语教学等也越来越广泛，而在这些过程中学生也根本来不及记录笔记。

本套丛书的编辑出版正是为了解决学生遇到的以上问题。丛书以大学课程的教学大纲为依据，以国内通用的权威教材为基础，收集、整理了部分课程的笔记，总结和归纳了相关知识点，帮助学生从机械记录老师板书或教案的工作中解脱出来，有更多的时间和精力、更大的自由来灵活掌握老师的讲解，汲取更多的知识。本套丛书有如下特点：

1.优秀教师编写。笔记与教材内容紧密结合，而更强调知识体系的连贯性和完整性，对教材中的主要内容进行细致讲解，知识结构清晰明了。丛书是集中了多位在教学第一线的优秀教师多年教学过程中对知识的总结和概括，而不是书本的简单重复，帮助学生真正做到将书“读薄，读透”。

2.随文安排加宽的空白处（即 Margin 部分），给学生以听课过程中随堂补充记录对知识的补充、说明、理解、例题、习题的空间，这样一方面便于学生课上结合笔记学习，提高学习效率，另一方面，也便于学生课后对老师讲授的内容进行有效、有序的复习。并且书中的每一章最后都有小结及学习体会部分，方便学生进行自我总结和自我归纳，加深理解。

3.版本小巧，携带方便。

希望本套丛书的出版能够真正地帮助同学们的课堂和课后的学习，使其摆脱抄录老师的板书和教案的负担，有更多的时间扎实、认真地对课堂知识进行理解和吸收，从而走向成功之路。

由于时间仓促，本书还有很多的不足之处，欢迎读者提出宝贵的意见和建议，来信请寄哈尔滨工程大学出版社。

E-mail：cbs _ shil@hrbeu.edu.cn

目录

Contents

第1章 函数 极限与连续

1.1 映射与函数

1.集合、区间与领域

(1)集合

①定义:由具有共同特性的个体(元素)组成.

②表达方式$\begin{cases}\text{集合 } A,B,C\cdots(\text{大写字母}) \\ \text{元素 } a,b,c\cdots(\text{小写字母}) \\ A=\{a,b,c\}\end{cases}$

元素的排列无重复,无顺序.

a 属于 A 记作 $a\in A$,1 不属于 A 记作 $1\notin A$ 或 $1\overline{\in} A$.

③分类$\begin{cases}\text{有限集} \\ \text{无限集} \\ \text{空集}\varnothing\end{cases}$

④集合的运算

子集:存在 A,B 两个集合,如果 A 中所有元素都在 B 中,则 A 叫做 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$(空集是任何集合的子集).

交集:存在 A,B 两个集合,由所有既在 A 中又在 B 中的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,且 $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$,$\varnothing\cap B=\varnothing$(空集与任何集合的交集是$\varnothing$).

并集:存在 A,B 两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,且 $A\cup B\supseteq A$, $A\cup B\supseteq B$,$\varnothing\cup B=B$.

补集:存在 A,B 两个集合,且 $A\subseteq B$,由在 B 中但不在 A 中的元素组成的集合,叫 A 的补集,B 叫全集,记作 A_B 或 A_{C_B},且

$A_B \cap \bar{A} = \varnothing, A_B \cup A = B$.

⑤数、数轴

$$数\begin{cases}实数\\ 虚数:规定\ i^2=-1,i\ 叫虚数单位,\sqrt{-3}=\sqrt{3i^2}=\sqrt{3}i.\\ 数轴:规定了原点、正方向和单位长度的直线.\end{cases}$$

(2)区间

①闭区间 $a \leqslant x \leqslant b, x \in [a,b]$;

②开区间 $a < x < b, x \in (a,b)$;

③半开区间 $\begin{cases} a \leqslant x < b, x \in [a,b) \\ a < x \leqslant b, x \in (a,b] \end{cases}$;

④无限区间 $\begin{cases} x \leqslant a, x \in (-\infty, a] \\ x \geqslant b, x \in [b, +\infty) \\ x \in R, x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$.

(3)邻域

以 $x = x_0$ 为圆心,以 $\delta > 0$(δ 为非常小的正数)为半径作圆,与数轴相交于 A,B 两点,$x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$ 叫 x_0 的 δ 邻域,如图 1-1 所示.

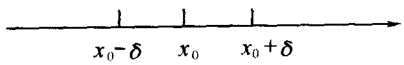


图 1-1

2.映射

(1)映射是集合间的一种对应关系.集合 X,Y 中所含的元素不一定是数,可以是其他的一些对象(或事物).

(2)对每一个 $x \in X$,只有唯一的一个 $y \in Y$ 值与之对应,这一点很重要,它说明集合间元素的对应关系不一定就是映射.

(3)映射的定义不排除几个不同的 x 值与同一个 y 值对应.

一一对应的实质:如果是一一对应,则

①$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 \neq x_2$,则 $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$;

②$R_f = Y$(或 $f(X) = Y$).

3.函数

(1)定义:某一过程中,存在两个变量 x,y,y 是按照某一对应规则 f 随 x 的变化而变化的,y 就叫做关于 x 的函数(一元函数),表达式为 $y=f(x)$.

x 叫自变量,定义域 D_f(x 取值范围).

y 叫因变量,值域 D_R(y 取值范围).

(2)求定义域

例 1 求 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 $\left.\begin{array}{l}①x\neq 0\\ ②1-x^2\geqslant 0\end{array}\right\}\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,0)\cup(0,1]$

例 2 求 $y=\sqrt{1-x}+\arcsin\dfrac{x+1}{2}$ 的定义域.

解 $\left.\begin{array}{l}①1-x\geqslant 0\\ ②-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1\end{array}\right\}\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow x\in[-3,1]$

例 3 求 $y=f(x)=\dfrac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域.

解 $\left.\begin{array}{l}①\lg(x-1)\neq 0\Rightarrow x\neq 2\\ ②x-1>0\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$

注:真数等于 1 时,对数值等于 0.

4.函数的运算 反函数

(1)函数的四则运算

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D_f\cap D_g$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x),x\in D_f\cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D_f\cap D_g\text{ 且 }g(x)\neq 0$$

数乘:数 $\lambda\in R$ 与函数 f 的乘法定义为

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),x\in D_f$$

(2)复合函数

由 $y=f(u),u=g(x)$,可得到 $y=f[g(x)]$,叫做 y 关于 x 的复合函数,u 叫作中间变量.

例 1 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}$,求 $f(x)$.

解 设 $\frac{1}{x}=t \Rightarrow x=\frac{1}{t}$

所以
$$f(t)=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}=\frac{1}{1+t}$$

则
$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

例 2 已知 $f(x+1)=x(x-1)$,求 $f(x)$.

解 令 $t=x+1$,则 $x=t-1$

所以
$$f(t)=(1-t)(t-1-1)=t^2-3t+2$$

则
$$f(x)=x^2-3x+2$$

注:t 和 x 都是代表变量,习惯性用 x 表示自变量,因此最后答案直接用 x 代替 t.

例 3 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

解 令 $t=x-1$,则 $x=t+1$

所以
$$f(t)=(t+1)^2+(t+1)+1=t^2+3t+3$$

则
$$f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+3\left(\frac{1}{x-1}\right)+3$$

例 4 已知 $f(x)$的定义域为$[0,4]$,求 $f(x^2)$的定义域.

解 令 $t=x^2 \Rightarrow y=f(t)$

所以
$$0\leqslant t\leqslant 4 \Rightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 4$$

则
$$-2\leqslant x\leqslant 2$$

例 5 已知 $f(x+2)=x^2-2x+3$,求 $f[f(2)]$.

解法①:令 $t=x+2$,则 $x=t-2$

$$f(t)=(t-2)^2-2(t-2)+3=t^2-6t+11$$

则
$$f(2)=2^2-6\times 2+11=3$$

所以
$$f[f(2)]=f(3)=3^2-6\times 3+11=2$$

解法②:由 $f(2)$可知 $f(x+2)$中 $x=0$

所以
$$f(2)=0^2-2\times 0+3=3$$

则由 $f[f(2)]=f(3)$又可知 $x=1$

所以
$$f[f(2)]=f(3)=1^2-2\times 1+3=2$$

(3)反函数

如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f: X\to Y$ 是一一映射,那么这个映射的逆映射 $f^{-1}: Y\to X$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

①反函数与原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

②两组反函数.

①$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$,即指数函数与对数函数互为反函数,

$$y=a^x \Rightarrow \log_a y=\log_a a^x \Rightarrow \log_a y = x\log_a a \Rightarrow \log_a y = x;$$

②$y=\sin x$ 与 $y=\arcsin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 求 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 的反函数.

解 由原函数可得 $y+ye^x=e^x \Rightarrow y=e^x-ye^x \Rightarrow y=e^x(1-y) \Rightarrow e^x=\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow \ln e^x=\ln\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow x=\ln\dfrac{y}{1-y}$

即反函数为 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

5.函数的几种简单性态

(1)单调性　对于 $y=f(x)$, $x\in D_f$,如果 y 随 x 的增加而增加,则 $y=f(x)$ 在 D_f 内单调增;y 随 x 的增加而减少,则 $y=f(x)$ 在 D_f 内单调减.

(2)有界性　对于 $y=f(x)$, $x\in D_f$,对于任一 $x\in D_f$,满足 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则 $y=f(x)$ 在 D_f 内有界,A 叫下界,B 叫上界.

(3)奇偶性　对于 $y=f(x)$, $x\in D_f$,且 D_f 为对称区间,如果 $f(-x)=f(x)$,则 $y=f(x)$ 为偶函数;$f(-x)=-f(x)$,则 $y=f(x)$ 为奇函数.

如两者均不符合,则 $y=f(x)$ 为非奇非偶函数.

注:偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(4)周期性(三角函数的周期性)

对于 $y=f(x)$, $x\in D_f$,如果存在 $T>0$ 满足 $f(x+T)=f(x)$,则 $y=f(x)$ 是周期函数,T 叫作最小正周期.

6.基本初等函数　初等函数

(1)幂函数

①形如 $y=x^a$, a 为常数.

②幂函数的定义域、值域、几何特性依 a 的取值而定,如 a 取以下值,见表 1-1 所示.

表 1-1

$y=x^x$	$y=x^2$	$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$	$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$	$y=x^3$
D_f	$x\in R$	$x\neq 0$	$x\geqslant 0$	$x\in R$
D_R	$y\geqslant 0$	$y>0$	$y\geqslant 0$	$y\in R$
几何特性	偶函数	偶函数	单调增	奇函数,单调增

③运算法则

(a) $x^{-a}=\frac{1}{x^a}$;

(b) $x^{\frac{b}{a}}=\sqrt[a]{x^b}$　(a, b 为正整数);

(c) $x^a x^b=x^{a+b}$;

(d) $x^a\div x^b=x^{a-b}$;

(e) $(x^a)^b=x^{ab}$.

(2)指数函数

①形如 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

② $x\in R$, $y>0$.

③当 $x=0$ 时, $y=1$,则图像一定过点(0,1).

④几何特性.单调性 $\begin{cases} 0<a<1, & \text{单调减;} \\ a>1, & \text{单调增.} \end{cases}$

⑤图像,如图 1-2 所示.

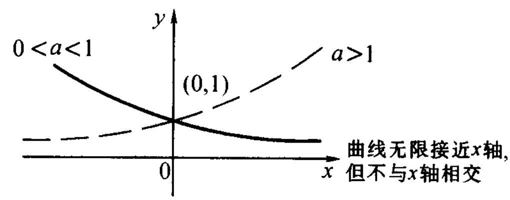


图 1-2

⑥运算法则(同幂函数).

(3)对数函数

①形如 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$).

②$x>0, y\in R$.

③当 $x=1$ 时,$y=0$,则图像一定过点$(0,1)$;
当 $x=a$ 时,$y=1$.

④几何特性.单调性$\begin{cases}0<a<1, & 单调减;\\ a>1, & 单调增.\end{cases}$

⑤图像,如图 1-3 所示.

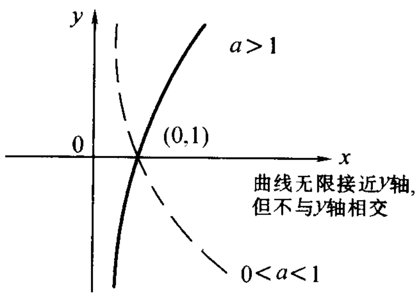


图 1-3

⑥两种特殊的对数

(a)当 $a=10$ 时,$y=\log_{10}x=\lg x$(常用对数);

(b)当 $a=e$ 时,$y=\log_e x=\ln x$(自然对数,$e\approx2.718$).

⑦运算法则

(a)$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$;

(b)$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;

(c)$\log_a xy=y\log_a x$;

(d)$\log_a x=x$.

(4)三角函数(掌握其几何特性、特殊三角函数的图像、基本运算)

①基本三角函数的简单性质,见表 1-2 所示.

②特殊角的三角函数值,见表 1-3 所示.

表 1－2

$y=f(x)$	$\sin x$(正弦)	$\cos x$(余弦)	$\tan x$(正切)	$\cot x$(余切)	$\sec x$(正割)	$\csc x$(余割)
D_f	$x\in R$	$x\in R$	$X\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (90°的奇数倍)	$x\neq k\pi$ (90°的偶数倍)		
D_R	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$y\in R$	$y\in R$		
单调性	无	无	单调增	单调减		
有界性	有	有	无	无		
奇偶性	奇	偶	奇	奇		
周期性	2π	2π	π	π		

表 1－3

角度	0°	30°	45°	60°	90°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在

③图像，如图 1－4 所示.

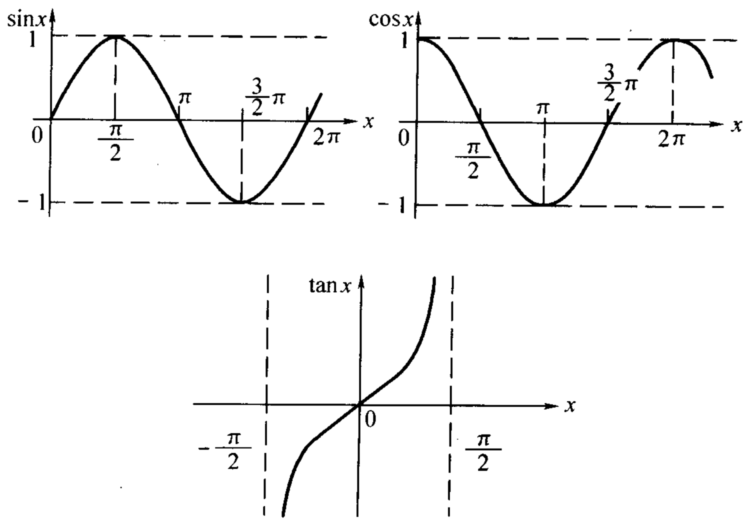


图 1－4

④常用公式

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

平方公式 $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{cases}$

倍角公式 $\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$

半角公式 $\begin{cases} \sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2} \\ \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2} \end{cases}$

⑤两种特殊的三角形式求周期

(a) $y = A\sin(\omega x + \theta)$, $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$;

(b) $y = |\sin x|$, $T = \pi$.

(5)反三角函数

①基本反三角函数的简单性质,见表1-4所示.

表1-4

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\text{arccot}\, x$
D_f	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$x \in R$	$x \in R$
D_R	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$
几何特性	单调增,奇函数	单调减,非奇非偶	单调增,奇函数	单调减,非奇非偶