高等教育教学参考书

线性代数习题与精解

（第二版）

上海交通大学数学系 编

例【2-32】

设 A 为 4 阶方阵，$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，且 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$，求 A.

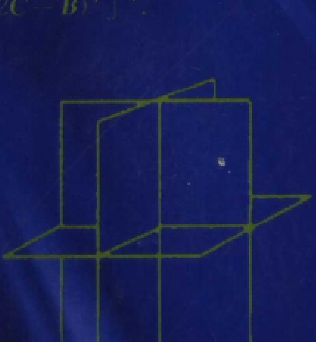
解 在等式两边左乘 C 得

$$(2C-B)A^{\mathrm{T}}=E,$$

转置得

$$A(2C-B)^{\mathrm{T}}=E,$$

故 $A=[(2C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}$.



上海交通大学出版社

责任编辑／孙岐昆　陈克俭
封面设计／姜　恺
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

大学数学习题与精解系列

高等数学习题与精解
线性代数习题与精解
概率论和数理统计习题与精解

ISBN 978-7-313-03862-3
线性代数习题与精解-高等教育教学参考书(第二版)
731303862217
RMB:21.00

线性代数习题与精解

(第二版)

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地，数学教学一直以优秀闻名全国，这与有一套好的题卷也不无关系。本书共选编了线性代数习题约 400 题，每章分“例题精解”和“习题精选”两部分：前者均作详解，有的题给出多种解法，对典型题或较难的题，还专作题后点评；后者供读者练习之用，并给出简解或答案与提示。

附录中收编了部分重点大学本科生的线性代数试卷和近年全国硕士研究生入学考试线性代数试卷，均给出解答或参考答案。

本书可作高等院校非数学专业师生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题与精解/上海交通大学数学系编. —2 版. —上海：上海交通大学出版社，2006(2007 重印)

ISBN978-7-313-03862-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. 上… Ⅲ. 线性代数-高等学校-习题 Ⅳ. O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094414号

线性代数习题与精解

(第二版)

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：韩建民

常熟市文化印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本：880mm × 1230mm 1/32 印张：14.5 字数：414 千字

2005 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 2 版 2007 年 7 月第 4 次印刷

印数：15 151 ~ 18 200

ISBN978－7－313－03862－3/O · 170 定价：21.00 元

前　言

线性代数是大学数学中一门主要的基础理论课程，不仅各高等学校非数学专业的本科学生要修学，而且硕士研究生、MBA研读生的入学考试等都将其作为主考课程之一。所以学好线性代数这门课程是十分重要的。

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地，数学教学一直以高标准、严要求为宗旨，收到良好的教学效果。上海交通大学的学生在历次高校数学国内外竞赛中，屡屡获奖，并在历届考研中数学成绩始终名列前茅，这与有一套好的教材和题卷也不无关系。

线性代数的基本内容众多，基本概念纷杂，初学者往往对此束手无策，而教科书又受课时及篇幅所限，不可能对所有问题都作出详尽的陈述，也不可能介绍很多的解题方法。本书精选了大量有代表性的例题，并对其进行了详细的解答，希望以此启发读者的解题思路并融会贯通所学的内容，从而作为课堂教学的一种补充。

本书选题的范围包括高等学校数学教学大纲（本科非数学专业）和最新硕士研究生入学考试数学考试大纲。共分六章，每章由**例题精解**、**习题精选**、**答案与提示**三部分组成，计收入例题248题，习题151题。书中例题的选择力求具有代表性和适用性，解答力求具有指导性和启发性；有些较典型的例题由浅入深，由点到面地给出多种解法，并对难点及解题方法做了点评。书后附有读者可用于自我测试的试卷（附解答）和近几年硕士研究生入学考试的试卷及参考答案。

本书可作为高等学校非数学专业本科学生线性代数课程的辅导用书，也可以作为硕士研究生入学考试的复习用书。本书的第1章和第

2章由吴忠英编写，第3章和第4章由王纪林编写，第5章和第6章由章子霞编写，最后由王纪林统稿成书。在本书的编写过程中，得到了上海交通大学数学系和上海交通大学出版社的支持和帮助。贺才兴教授和陈克俭副编审对本书内容的舍取及结构的编排提供了许多有益的建议，在此一并表示感谢。

由于水平有限，加之编写时间较仓促，错误和不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编者

于上海交通大学

2004年6月

目　　录

第 1 章　行 列 式

A　例题精解

1.1　行列式的定义

行列式的定义为

$$D = |a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

这一节主要是通过例题,使读者对 n 阶行列式的定义有正确的理解.

【1-1】 在下列排列中,为奇排列的是(　　).

(A) 13524867;　　(B) 13254867;

(C) 13574862;　　(D) 13572468.

解　应选 A.

直接计算(A)的逆序数,有 $\tau(13524867) = 1+2+2 = 5$,所以是奇排列.

由于 13254867 是 13524867 将 2 和 5 对换所得的排列,而对换一次改变一次排列的奇偶性,已知 13524867 是奇排列,所以(B)是偶排列.

同理(C)也是偶排列. 又 $\tau(13572468)=4$,所以(D) 也是偶排列.

【1-2】 已知 $a_{21}a_{3i}a_{1j}a_{4k}a_{54}$ 是五阶行列式的展开式中带正号的项,则数组$(i, j, k)=($　　$)$.

(A) $(3, 5, 2)$;　　　　(B) $(2, 3, 5)$;

(C) $(5, 3, 2)$;　　　　(D) $(5, 2, 3)$.

解 应选 C.

考虑数字 2, 3, 5 的排列,由于 352, 235, 523 之间可以通过两次对换得到,从而取(A),(B),(D)得到的 $a_{21}a_{3i}a_{1j}a_{4k}a_{54}$ 所带符号相同,与(C)所对应项的符号相反. 取数组(C),即取项 $a_{21}a_{35}a_{13}a_{42}a_{54}$,由于 $\tau(23145)+\tau(15324)=6$,该项的符号为正.

【1-3】 要使 9 阶排列 $3729i14j5$ 为偶排列,则 $i=$________,$j=$________.

解 显然 i 应在 6 和 8 两个数字中选择. 若取 $i=6$,则有 $j=8$,此排列的逆序数 $\tau(372961485)=2+5+1+5+3+1=17$,为奇排列,故应取 $i=8$, $j=6$,即 372981465 为偶排列.

【1-4】 求下列排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性.

(A) 1347265;　　　　(B) $n(n-1)\cdots21$;

(C) $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;　　(D) $(2n+1)(2n-1)\cdots531$.

解 (A) $\tau(1347265)=6$,为偶排列.

(B) $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

易知,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,故排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数,此时排列为奇排列.

(C) 排列 $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 不构成逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,由于 3 与 2 构成逆序,5 与 2, 4 构成逆序 ……,$(2n-1)$ 与 2, 4, …, $2n-2$ 构成逆序,故逆序数 $\tau(135\cdots$

$(2n-1)24\cdots(2n))=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n}{2}(n-1)$，从而排列的奇偶性与(B)一致.

(D) 排列$(2n+1)(2n-1)\cdots531$中每一个数字与后面的所有数字构成逆序，所以逆序数

$$\tau((2n+1)(2n-1)\cdots531)=n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n}{2}(n+1),$$

故当$n=4k$或$4k+3$时为偶排列；当$n=4k+1$或$4k+2$时为奇排列.

【1-5】 设n阶排列$a_1a_2\cdots a_n$的逆序数为s，试求排列$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$的逆序数.

解 排列$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$中所有构成逆序（顺序）的数对在排列$a_1a_2\cdots a_n$中构成顺序（逆序），从而$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$的逆序数即排列$a_1a_2\cdots a_n$的顺序数. 已知$a_1a_2\cdots a_n$的逆序数为s，而n阶排列中共有C_n^2个数对，故其顺序数为C_n^2-s，从而有$\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)=C_n^2-s=\dfrac{n(n-1)}{2}-s$.

【1-6】 写出四阶行列式中所有含因子a_{31}，并且前面带负号的项.

解 设4阶行列式$D=|a_{ij}|$中含a_{31}的项为$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{31}a_{4j_4}$，其中$j_1,j_2,j_4$为2，3，4的不同值，共有$3!=6$种不同取法，依次为234，243，342，324，432，423，对应的项为

$$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44},\ a_{12}a_{24}a_{31}a_{43},\ a_{13}a_{24}a_{31}a_{42},$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44},\ a_{14}a_{23}a_{31}a_{42},\ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}.$$

通过计算逆序数$\tau(j_1j_2j_4)$或由数组(j_1,j_2,j_4)的对换关系可知，所求带负号的项为$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

【1-7】 设$D=|a_{ij}|$为五阶行列式，判别以下各项是否为该行列式展开式中的项. 如果是，此项前的符号是什么？

(A) $a_{11}a_{23}a_{14}a_{35}a_{42}$； (B) $a_{24}a_{31}a_{13}a_{44}a_{55}$；

(C) $a_{13}a_{24}a_{52}a_{41}a_{35}$； (D) $a_{51}a_{42}a_{33}a_{25}a_{14}$.

解 行列式展开式的项应当是位于不同行、不同列的所有元素的

乘积,其行标和列标均为五阶排列.

(A) $a_{11}a_{23}a_{14}a_{35}a_{42}$的行标有 2 个 1,故它不是行列式展开式中的项.

(B) $a_{24}a_{31}a_{13}a_{44}a_{55}$的列标有 2 个 4,同样它不是展开式中的项.

(C) $a_{13}a_{24}a_{52}a_{41}a_{35}$是展开式中的项,$\tau(12543)+\tau(34215)=8$,故前面带正号.

(D) $a_{51}a_{42}a_{33}a_{25}a_{14}$ 也是展式中的项,$\tau(54321)+\tau(12354)=11$,前面带负号.

【1-8】 用定义计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 12 & -5 & 0 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & -5 \end{vmatrix}$.

(2) $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$.

(3) $D=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

(4) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) 根据定义，五阶行列式 $D=|a_{ij}|=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4j_5}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，由于第一行中只有一个非零元素 1，它位于第四列，故展开式的非零项 j_1 只可能是 4，而 j_2 只能在 1，2，3，5 中取值，由于第二行除第四列以外只有第三列上的元素非零，从而应取 $j_2=3$，同理应取 $j_3=2$，$j_4=1$，$j_5=5$，于是

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{\tau(43215)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} \\
&=(-1)^6 1\times 2\times 3\times 4\times(-5) \\
&=-5!.
\end{aligned}
$$

(2) 在四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的展开式中非零的可能项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$，$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 及 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，故

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1432)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&\quad +(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&=a_1c_1b_2d_2-a_1d_1b_2c_2+b_1d_1a_2c_2-b_1c_1a_2d_2 \\
&=a_1b_2(c_1d_2-c_2d_1)+a_2b_1(c_2d_1-c_1d_2) \\
&=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1).
\end{aligned}
$$

(3) $D=(-1)^{\tau(134\cdots n2)}n\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times 1$

$$=(-1)^{n-2}n!.$$

(4) 由于行列式从第三行起每一行后面 3 个元素全是零，而 $D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，无论 j_1，j_2 取什么值，j_3，j_4，j_5 至少有一个要取到 3，4，5 之一，使其对应的元素为零，亦即展开式的每一项中至少有一个零因子，所以行列式的值为零，即 $D=0$.

【1-9】 求函数

$$
f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -x & 1 \\ 1 & 4 & x & 3x \end{vmatrix}
$$

中 x^4，x^3 的系数.

解 由于行列式的每一个元素关于 x 最多是一次的，展开式中含 x^4 的项应当取自每个因子都含 x 的情形，显然只有一种取法，即 $j_1 = 1$，$j_2 = 2$，$j_3 = 3$，$j_4 = 4$，该项为

$$(-1)^{\tau(1234)} x \cdot 2x \cdot (-x) \cdot 3x = -6x^4,$$

故 x^4 的系数为 -6.

行列式仅一行不取含 x 的元素，其余 3 行都取含 x 的元素，所有这种可能的项构成 x^3 的项.

若第一行不取 x，即 $j_1 \neq 1$，则由于从第二行起，第一列上的元素全为常数，无法得到 x^3 的项，故应有 $j_1 = 1$. 同样的理由，此时 j_2 应当取 2，即 $j_2 = 2$. 于是 j_3 只能取 3 或 4，但若 $j_3 = 3$，则 $j_4 = 4$，得到的是 x^4 的项，因此应当取 $j_3 = 4$，$j_4 = 3$. 对应的项为

$$(-1)^{\tau(1243)} x \cdot 2x \cdot 1 \cdot x = -2x^3,$$

即 x^3 的系数为 -2.

【1-10】 利用

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

证明：n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中，奇偶排列各半.

证 根据行列式的定义，有

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)},$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的这种 n 阶排列求和，由于 $1, 2, \cdots, n$ 共可构成 $n!$ 个不同的 n 阶排列，因此和式中共有 $n!$ 项，且每一项的绝对值都是 1. 已知 $D_n = 0$，知和式中 1 和 -1 的个数相等，均为 $\frac{n!}{2}$ 个，这说明 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中，奇偶

排列各占一半.

1.2 行列式的性质及其计算

本节是行列式这一章的重点,主要介绍如何应用行列式的性质求行列式的值,所谓行列式的性质是指:

(1) 行列式的行和列互换,其值不变,即

$$|a_{ij}|_n = |a_{ij}|_n^{\mathrm{T}} = |a_{ji}|_n.$$

(2) 行列式中某一行中各元素有公因子 λ,则 λ 可提到行列式符号之外,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) 行列式某行中各元素均为两元素之和,则可表为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(4) 行列式中交换任意两行对应元素的位置,行列式的绝对值不变,仅改变正负号;

(A) $2D_1$；　(B) $-2D_1$；　(C) 2^4D_1；　(D) -2^4D_1.

解　应选 C.

根据行列式的性质，若行列式的某一行(列)有公因子 k，则可以把 k 提到行列式前面来. 由于 $b_{ij}=-2a_{ij}$，故

$$D_2=|-2a_{ij}|_4=(-2)^4|a_{ij}|_4=2^4D_1.$$

点评　若 n 阶行列式的每一行都有公因子 k，根据行列式的性质，可以将 k^n 提到行列式的前面来，即

$$|ka_{ij}|_n=k^n|a_{ij}|_n.$$

【1-12】　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\1&1&1\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

且 M_{ij} 和 A_{ij} 分别为 D_1 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，则D_2=(　　).

(A) $\sum\limits_{j=1}^{3}A_{2j}$；　(B) $\sum\limits_{j=1}^{3}M_{2j}$；

(C) $-\sum\limits_{j=1}^{3}A_{2j}$；　(D) $-\sum\limits_{j=1}^{3}M_{2j}$.

解　应选 A.

由于 D_2 与 D_1 除第二行以外各对应元素都相同，从而第二行各元素的余子式、代数余子式对应相等. 于是，将 D_2 按第二行展开，得

$$D_2=(-1)\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=A_{21}+A_{22}+A_{23}=\sum_{j=1}^{3}A_{2j}.$$

点评　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 是一个 $n-1$ 阶子式(它不含有 D 中第 i 行第 j 列上的元素). 当 D 的某一行(列)零元素比较多时，利用代数余子式将 D 按此行(列)展开是计算行

列式的主要方法之一.

【1-13】 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，$M_{4j}$，$A_{4j}$ 分别是元素 a_{4j} $(j=1,2,3,4)$ 的余子式和代数余子式，则 $\sum\limits_{j=1}^{4}A_{4j}=$ ________，$\sum\limits_{j=1}^{4}M_{4j}=$ ________.

解 由于 D 中第二行的元素相同，将第二行各元素与第四行对应元素的代数余子式的乘积相加，按行列式的性质，有

$$2(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44})=0,$$

即有 $\sum\limits_{j=1}^{4}A_{4j}=0$.

利用 M_{4j} 与 D 中第四行的元素无关及其与 A_{4j} 的符号关系，构造一四阶行列式 $D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-2&2&-2&2\end{vmatrix}$，并将 D_1 按第四行展开，得

$$\begin{aligned}D_1&=-2A_{41}+2A_{42}-2A_{43}+2A_{44}\\&=2(M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44})=2\sum_{j=1}^{4}M_{4j};\end{aligned}$$

另一方面，直接计算 D_1，有

$$D_1=2^2\begin{vmatrix}3&0&4&0\\1&1&1&1\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三行}}(-1)^{3+2}(-7)\times4\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=28\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=28\times2(3-4)=-56,$$