



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程主讲教材

高等学校计算机科学与技术专业系列教材

离散数学及其应用

傅彦 顾小丰 王庆先 刘启和 编著



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
国家精品课程主讲教材

高等学校计算机科学与技术专业系列教材

离散数学及其应用

傅彦 顾小丰 王庆先 刘启和 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是国家精品课程“离散数学”的主讲教材,也是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。本书以教育部计算机科学与技术教学指导委员会最新制订的计算机专业规范为依据编写而成。本书系统介绍了数理逻辑、二元关系、图论、代数系统与布尔代数中有关的概念、定理及其证明方法。既强化基本概念的描述,还特别着重于阐述有关离散数学的证明方法及离散数学应用实例,充分展示了离散数学在计算机中的应用。本书还配有《离散数学实验与习题解析》及电子教案。

本书可作为高等学校计算机专业计算机科学方向、计算机工程方向“离散数学”必修课教材,也可作为其他相关专业“离散数学”课程教材。同时,对于相关专业的科技人员及学生也是一本很好的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/傅彦等编著. —北京:高等教育出版社,2007.7

ISBN 978-7-04-021689-9

I. 离… II. 傅… III. 离散数学—高等学校—教材
IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 089285 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	化学工业出版社印刷厂		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2007 年 7 月第 1 版
印 张	29	印 次	2007 年 7 月第 1 次印刷
字 数	660 000	定 价	33.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21689-00

前 言

离散数学是现代数学的一个重要分支,也是计算机科学与技术的理论基础,所以又称为计算机数学。

离散数学作为数学的一个分支,其研究的对象是各种各样的离散量的结构及其关系,并且一般是有限个或者可数个元素。同时在整个离散数学的讨论中,也非常重视“能行性”问题的研究,即要解决一个问题,首先要证明此问题解的存在性,但是仅仅解决存在性是不够的,还需要找到此问题解的步骤,而且该步骤是有限的、有规则的。这与连续数学中的讨论方式完全相违背。而且,它是由多门数学分支组成,每一个分支基本上可以看成是一门独立的研究领域,它们从不同的角度出发,研究各种离散量之间数与形的关系。同时这些分支也并非相互独立,而且有着密切的关系,可以说,离散数学是一门综合的数学学科。离散数学成为计算机科学与技术专业的核心骨干课程,一方面它充分地描述了计算机科学离散性的特点,而且给后继课程,如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能、信息安全、计算机网络、算法分析等课程提供必要的数学基础;另一方面,通过学习离散数学,能很好地培养和提高学生的抽象思维能力和逻辑推理能力,为学生今后继续学习和工作,参加科学研究,攀登科技高峰,打下坚实的数学基础。

在编写本书的过程中,我们力求充分体现基础与前沿的关系、基础与后续课程的关系,注重理论与实践的结合,实践环节特色鲜明,并强调以逻辑的思想为主线,在此基础上建立了各种证明问题的方法,突出定义和定理的逻辑描述特征,同时侧重于就若干重要内容介绍它的概念和独特的方法,内容以工科学生“够用”为限,突出重点;在内容阐述时,力求做到结构严谨,通俗易懂;推演时务求详尽;大部分概念都用例子加以说明;强化基本概念的描述,注重基本理论的证明方法,目的在于启发学生的思想;淡化大量繁琐的、含有特殊技巧的、不带普遍意义的理论证明方法。针对离散数学的特点,有些问题给出了不同的解法,同一概念给出了不同的描述,希望能起到举一反三的作用。

教材内容与编写通俗易懂,每个例题和证明都是采用先分析,后求解或证明的描述风格。在每一章前有本章内容提要、学习要求、知识掌握要求,章后有该章的重点难点分析、知识汇集、习题类型和解题技巧等。另外,由于离散数学在学习的过程中,需要相应的数学基础知识,所以,在编写时,增加了一篇预备知识,它包括了学习离散数学所需要的所有数学基础知识,这对学习离

散数学会有很大的帮助。

此书分五篇,共十五章,第一章、第二章、第六章至第八章由王庆先老师撰写,第三章至第五章由傅彦老师撰写,第九章至第十一章、十五章由顾小丰老师撰写,第十二章至第十四章由刘启和老师撰写。

限于作者水平有限,书中不当和疏漏之处在所难免,敬请读者不吝指正。

编 者

2007年2月8日

目 录

第一篇 预备知识

引言	1	2.2.2 加法原理	25
第1章 集合论	3	2.2.3 基本原理的难点	26
1.0 内容提要	3	2.3 排列与组合	27
1.1 本章学习要求	3	2.3.1 排列问题	27
1.2 集合	4	2.3.2 组合问题	29
1.2.1 集合的表示	5	2.3.3 排列与组合的难点	30
1.2.2 集合与元素的关系	6	2.4 容斥原理与鸽笼原理	31
1.2.3 集合与集合的关系	7	2.4.1 容斥原理	31
1.2.4 几个特殊的集合	8	2.4.2 鸽笼原理	34
1.2.5 集合的运算	10	2.4.3 容斥原理与鸽笼原理的 难点	34
1.2.6 集合的难点	13	2.5 离散概率简介	35
1.3 无限集	13	2.5.1 基本概念	35
1.3.1 可数集合和不可数集合	13	2.5.2 离散概率函数	36
1.3.2 无限集的难点	16	2.5.3 离散概率简介的难点	39
1.4 集合的应用	16	2.6 递归关系	39
1.5 本章总结	18	2.6.1 递归关系	39
1.6 习题	19	2.6.2 递归关系的难点	40
第2章 计数问题	23	2.7 计数问题的应用	41
2.0 内容提要	23	2.8 本章总结	43
2.1 本章学习要求	23	2.9 习题	44
2.2 基本原理	24		
2.2.1 乘法原理	24		

第二篇 数理逻辑

引言	47	3.0 内容提要	49
第3章 命题逻辑	49	3.1 本章学习要求	49

3.2 命题与命题联结词	50	4.3.2 自由变元和约束变元	103
3.2.1 命题	50	4.3.3 谓词合式公式的解释	105
3.2.2 命题联结词	51	4.3.4 谓词合式公式的分类	106
3.2.3 联结词理解难点	56	4.3.5 谓词合式公式的基本 等价关系	108
3.2.4 命题联结词的应用	57	4.3.6 谓词合式公式难点	110
3.3 命题公式、解释与真值表	58	4.3.7 谓词合式公式的应用	110
3.3.1 命题公式	59	4.4 公式的标准型——范式	111
3.3.2 命题公式的解释与真值表	61	4.4.1 前束范式	111
3.3.3 命题公式的分类	64	4.4.2 Skolem 标准型	112
3.3.4 命题公式的基本等价关系	66	4.4.3 范式的难点	113
3.3.5 命题公式的难点	69	4.5 本章总结	113
3.3.6 命题公式的应用	70	4.6 习题	115
* 3.4 联结词的完备集	73	第 5 章 推理与证明技术	118
3.4.1 命题联结词的个数	73	5.0 内容提要	118
3.4.2 联结词的完备集	74	5.1 本章学习要求	118
3.4.3 联结词的完备集的应用	75	5.2 命题逻辑的推理理论	118
3.5 公式的标准型——范式	77	5.2.1 推理的基本概念和 推理形式	119
3.5.1 析取范式和合取范式	77	5.2.2 判断有效结论的 常用方法	120
3.5.2 主析取范式和主合取范式	79	5.2.3 命题逻辑推理的难点	126
3.5.3 范式的难点	86	5.2.4 命题逻辑推理的应用	127
3.5.4 范式的应用	86	5.3 谓词逻辑的推理理论	129
3.6 本章总结	88	5.3.1 谓词演算的演绎与推理	129
3.7 习题	89	5.3.2 谓词演算的综合推理方法	131
第 4 章 谓词逻辑	92	5.3.3 谓词逻辑推理的难点	135
4.0 内容提要	93	5.3.4 谓词逻辑推理的应用	135
4.1 本章学习要求	93	5.4 数学归纳法	140
4.2 谓词逻辑中的基本概念 与表示	93	5.4.1 数学归纳法原理	140
4.2.1 谓词	94	5.4.2 数学归纳法应用	142
4.2.2 量词	96	5.5 按定义证明方法	143
4.2.3 谓词的语言翻译	99	5.5.1 按定义证明方法原理	143
4.2.4 谓词翻译难点	100	5.5.2 按定义证明方法 应用实例	144
4.2.5 谓词翻译的应用	100		
4.3 谓词合式公式与解释	101		
4.3.1 谓词的合式公式	102		

5.6 本章总结	145	5.7 习题	146
----------	-----	--------	-----

第三篇 二元关系

引言	149	7.2.1 等价关系	195
第6章 二元关系	151	7.2.2 集合的划分	197
6.0 内容提要	151	7.2.3 等价类与商集	198
6.1 本章学习要求	151	7.2.4 等价关系与划分	200
6.2 二元关系	152	7.2.5 等价关系的难点	203
6.2.1 序偶和笛卡儿积	152	7.2.6 等价关系的应用	203
6.2.2 关系的定义	155	7.3 次序关系	204
6.2.3 关系的表示法	157	7.3.1 拟序关系	205
6.2.4 二元关系的难点	161	7.3.2 偏序关系	205
6.2.5 关系的应用	161	7.3.3 全序关系	212
6.3 关系的运算	163	7.3.4 良序关系	213
6.3.1 关系的复合运算	164	7.3.5 次序关系的难点	214
6.3.2 关系的逆运算	167	7.3.6 次序关系的应用	214
6.3.3 关系的幂运算	170	7.4 本章总结	216
6.3.4 关系运算的难点	172	7.5 习题	217
6.3.5 关系运算的应用	172	第8章 函数	220
6.4 关系的性质	173	8.0 内容提要	220
6.4.1 关系性质的定义	173	8.1 本章学习要求	220
6.4.2 关系性质的判定定理	181	8.2 函数	221
6.4.3 关系性质的保守性	182	8.2.1 函数的定义	221
6.4.4 关系性质的难点	183	8.2.2 函数的类型	223
6.4.5 关系性质的应用	183	8.2.3 常用函数	226
6.5 关系的闭包运算	184	8.2.4 函数的难点	227
6.5.1 关系的闭包	184	8.2.5 函数的应用	227
6.5.2 关系闭包的难点	188	8.3 函数的运算	229
6.5.3 关系闭包的应用	188	8.3.1 函数的复合运算	229
6.6 本章总结	189	8.3.2 函数的逆运算	231
6.7 习题	190	8.3.3 函数运算的难点	232
第7章 特殊关系	194	8.3.4 函数运算的应用	232
7.0 内容提要	194	8.4 置换函数	233
7.1 本章学习要求	194	8.4.1 基本概念	234
7.2 等价关系	195	8.4.2 置换函数的难点	234

8.4.3 置换函数的应用	235
8.5 本章总结	235

8.6 习题	236
--------------	-----

第四篇 图 论

引言	239
第9章 图	241
9.0 内容提要	241
9.1 本章学习要求	241
9.2 图的基本概念	242
9.2.1 图的定义	242
9.2.2 图的表示	243
9.2.3 图的操作	245
9.2.4 邻接点与邻接边	245
9.2.5 图的分类	246
9.2.6 子图与补图	248
9.2.7 结点的度数与握手定理 ..	251
9.2.8 图的同构	253
9.2.9 图的难点	254
9.2.10 图的应用	254
9.3 通路、回路与连通性	255
9.3.1 通路与回路	255
9.3.2 无向图的连通性	263
9.3.3 有向图的连通性	264
9.3.4 通路、回路与连通性 的难点	266
9.3.5 通路、回路与连通性的 应用	267
9.4 本章总结	273
9.5 习题	273
第10章 树	277
10.0 内容提要	277
10.1 本章学习要求	277
10.2 树	278
10.2.1 树的定义与性质	278
10.2.2 生成树	280

10.2.3 最小生成树	283
10.2.4 无向树的难点	285
10.2.5 无向树的应用	285
10.3 根树	285
10.3.1 根树的定义与分类	285
10.3.2 根树的遍历	289
10.3.3 最优树与哈夫曼算法	291
10.3.4 根树的难点	293
10.3.5 根树的应用	294
10.4 本章总结	297
10.5 习题	298
第11章 特殊图	300
11.0 内容提要	300
11.1 本章学习要求	300
11.2 欧拉图	301
11.2.1 欧拉图的引入与定义	301
11.2.2 欧拉图的判定	302
11.2.3 欧拉图的难点	304
11.2.4 欧拉图的应用	305
11.3 哈密顿图	306
11.3.1 哈密顿图的引入 与定义	306
11.3.2 哈密顿图的判定	308
11.3.3 哈密顿图的难点	311
11.3.4 哈密顿图的应用	312
11.4 偶图	316
11.4.1 偶图的定义	316
11.4.2 偶图的判定	317
11.4.3 匹配	318
11.4.4 偶图的难点	319
11.4.5 偶图的应用	319

11.5 平面图	321	11.5.5 对偶图	326
11.5.1 平面图的定义	321	* 11.5.6 图的着色	327
11.5.2 平面图的简单判定 方法——观察法	321	11.5.7 平面图的难点	330
11.5.3 欧拉公式	322	11.5.8 平面图的应用	330
11.5.4 库拉托夫斯基定理	325	11.6 本章总结	332
		11.7 习题	333
第五篇 代数系统			
引言	337	13.2.2 元素的幂	372
第 12 章 代数系统	339	13.2.3 循环半群	373
12.0 内容提要	339	13.2.4 半群与含么半群的 难点	375
12.1 本章学习要求	339	13.2.5 半群的应用	375
12.2 代数系统	340	13.3 群及其性质	376
12.2.1 代数运算	340	13.3.1 群的定义及基本性质	378
12.2.2 代数系统与子代数	343	13.3.2 元素的周期	380
12.2.3 代数系统中的难点	344	13.3.3 子群	383
12.2.4 代数系统的应用	344	13.3.4 群的同态	389
12.3 代数系统的基本运算和 性质	345	13.3.5 群及子群的难点	391
12.3.1 二元运算律	345	13.3.6 群的应用	391
12.3.2 代数系统的性质	350	13.4 特殊群	393
12.3.3 代数系统性质的难点	358	13.4.1 交换群(阿贝尔群)	393
12.3.4 代数系统性质的应用	358	13.4.2 循环群	394
12.4 同态与同构	359	* 13.4.3 置换群	397
12.4.1 同态与同构	359	13.4.4 特殊群的难点	398
12.4.2 同态的性质	362	13.4.5 特殊群的应用	398
12.4.3 同态与同构的难点	363	13.5 陪集与拉格朗日定理	400
12.4.4 同态与同构的应用	364	13.5.1 陪集	400
12.5 本章总结	365	13.5.2 拉格朗日定理	403
12.6 习题	366	13.5.3 陪集与拉格朗日定理 的难点	404
第 13 章 群	369	* 13.5.4 拉格朗日定理的 应用	404
13.0 内容提要	369	13.6 正规子群与商群	405
13.1 本章学习要求	369	13.6.1 正规子群(不变子群)	405
13.2 半群与含么半群	370		
13.2.1 半群与含么半群	370		

* 13.6.2 商群	407	15.2.1 偏序格	423
13.6.3 正规子群与商群 的难点	410	15.2.2 代数格	425
* 13.6.4 商群的应用	410	15.2.3 偏序格与代数格的 等价性	426
13.7 本章总结	411	15.2.4 格的性质	428
13.8 习题	412	15.2.5 子格与格同态	429
* 第 14 章 环与域	415	15.2.6 分配格与模格	432
14.0 内容提要	415	15.2.7 有界格与有补格	434
14.1 本章学习要求	415	15.2.8 格的难点	437
14.2 环与域	416	15.2.9 格的应用	438
14.2.1 环与域的定义	416	15.3 布尔代数	438
14.2.2 环与域的性质	418	15.3.1 布尔代数	438
14.2.3 环与域的应用	419	15.3.2 布尔表达式	441
14.3 本章总结	420	15.3.3 布尔代数的难点	444
14.4 习题	421	15.3.4 布尔代数的应用	445
第 15 章 格与布尔代数	422	15.4 本章总结	448
15.0 内容提要	422	15.5 习题	449
15.1 本章学习要求	423	参考文献	451
15.2 格	423		

第一篇 预备知识

引 言

本章将引进离散数学中的一些基本工具,包括集合、排列与组合、容斥原理与鸽笼原理、离散概率以及递归关系等.尽管有些概念也许读者已经熟悉,但首先还是从集合、子集以及它们的运算开始讲述.然后,简单介绍计数问题的几种计数工具,包括排列与组合、容斥原理与鸽笼原理、离散概率以及递归关系等.这些背景知识正是我们对数学结构开始进行探索所需要的.

教学目标:通过学习集合、排列与组合、容斥原理与鸽笼原理、离散概率以及递归关系等预备知识,使学生掌握学习本书其他各篇所必备的理论基础.



第 1 章 集 合 论

集合论是现代数学的基础,几乎与现代数学的各个分支都有着密切联系,并且渗透到所有科技领域,是不可缺少的数学工具和表达语言.

集合论的起源可以追溯到 16 世纪末期,为了追寻微积分的坚实基础,开始时,人们仅进行了有关数集的研究. 1879—1884 年,康托尔(Georg Cantor)发表了一系列有关集合论研究的文章,奠定了集合论的深厚基础,以后策梅洛(Zermelo)在 1904—1908 年列出了第一个集合论的公理系统,并逐步形成公理化集合论.

我们在这里学习集合论,更是因为计算机科学及其应用的研究也和集合论有着极其密切的关系. 集合不仅可以表示数,而且还可以像数一样进行运算,更可以用于非数值信息的表示和处理,如数据的增加、删除、排序以及数据间关系的描述;有些很难用传统的数值计算来处理的问题,却可以用集合运算来处理. 因此,集合论在程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能等领域都得到了广泛的应用,并且得到了发展.

本章对集合论本身及其公理化系统不作深入探讨,主要介绍集合、子集的基本概念及相关性质,集合间的各种运算和它们满足的运算性质,有限集和无限集的基本概念.

1.0 内 容 提 要

1. 与集合相关的概念和特殊集合:集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等.
2. 与集合运算相关的概念和定理:集合的交、并、差、补和对称差等五种运算的定义及相关定理.

1.1 本 章 学 习 要 求

1. 重点掌握的核心知识点

- (1) 领会集合的概念,能判定元素与给定集合的关系.
- (2) 能正确地用枚举法或叙述法表示一个集合,会画文氏图.
- (3) 能利用“按定义证明法”证明两个集合间的真包含、包含和相等关系.

- (4) 能熟练地进行集合之间的并、交、差和补运算,掌握集合运算的定律.
- (5) 能熟练地计算集合 A 的幂集 $P(A)$.

2. 一般掌握的知识

- (1) 集合的归纳法表示.
- (2) 集合的对称差运算.

3. 了解的知识

- (1) 集合的递归指定法表示.
- (2) 了解无限集的基本概念.

1.2 集 合

集合(set)是不能精确定义的基本数学概念.通常,集合是由指定范围内的某些特定对象聚集在一起构成的.例如:

- (1) 中国所有的真皮沙发;
- (2) 所有的海鸥;
- (3) 在 -1 和 1 之间所有的有理数;
- (4) 全体亚洲人;
- (5) 所有欧洲人和松木椅子;
- (6) 天安门广场所有的路灯和树;
- (7) 所有C语言中的标准符;
- (8) 全体素数;
- (9) 全体奇数;
- (10) 全体偶数.

显然,集合可以由相关的人或事物聚集而成,如上面的集合(1)~(4),(7)~(10),也可以是毫无关联的人或事物聚集而成,如上面的集合(5)和(6).

指定范围内的每一个对象称为这个集合的**元素(element)**.例如,中国的每一个真皮沙发都是集合(1)中的元素.根据所给的属性,我们总能判断一个事物是否为某个集合中的元素.例如在上面的集合(4)中,任何一个亚洲人都是该集合中的元素,但是其他地区的人就不是这个集合中的元素.

通常情况下,我们用带(或不带)下标的大写英文字母 $A, B, C, \dots, A_1, B_1, C_1, \dots$ 表示集合,而用带(或不带)下标的小写英文字母 $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$ 表示元素.

有一些集合,以后常常要用到,所以用固定的符号表示:

\mathbf{N} 是自然数集合: $0, 1, 2, \dots$;

\mathbf{Z} 是整数集合: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$;

\mathbf{Q} 是有理数集合;

\mathbf{R} 是实数集合;

\mathbf{C} 是复数集合.

1.2.1 集合的表示

集合是由它所包含的元素完全确定的. 为了表示一个集合, 可以有多种方法.

1. 枚举法(显示法)

当一个集合仅含有限个元素或元素之间有明显关系时, 采用列出集合中全部元素或部分元素的方法叫枚举法.

例 1.2.1 指出下列集合的表示方法.

$$(1) A = \{a, b, c, d\};$$

$$(2) B = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}.$$

分析 (1) 集合 A 中仅含 4 个元素, 元素之间无任何联系, 并将其全部列出, 即采用了枚举法表示;

(2) 集合 B 中的元素是部分列出, 从列出的元素可以看出: 任何一个自然数的平方都是集合 B 中的元素, 从而也是枚举表示法.

解 (1) 和 (2) 都是采用的枚举表示法.

上述方法实际上是一种显示表示法, 其优点在于具有直观性. 但是, 对某些集合, 列出其所有的元素是不可能的. 而且, 从计算机的角度看, 显示法是一种“静态”表示法, 如果同时将所有的“数据”都输入到计算机中去, 将占据大量的“内存”, 为此, 我们给出另一种描述集合的方法——叙述法(隐式法).

2. 叙述法(隐式法)

通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合的方法称为叙述法(隐式法), 通常用符号 $P(x)$ 来表示不同对象 x 所具有的性质 P , 由 $P(x)$ 所定义的集合常记为:

$$\{x \mid P(x)\}.$$

例 1.2.2 指出下列集合的表示方法.

$$(1) A = \{x \mid x \text{ 是“discrete mathematics”中的所有字母}\};$$

$$(2) \mathbf{Z} = \{x \mid x \text{ 是一个整数}\};$$

$$(3) S = \{x \mid x \text{ 是整数, 并且 } x^2 + 1 = 0\};$$

$$(4) \mathbf{Q}^+ = \{x \mid x \text{ 是一个正有理数}\}.$$

分析 (1) “discrete mathematics”中共有 19 个字母, 但根据集合元素的互异性, 不同的字母只有“d, i, s, c, r, e, t, m, a, h”共 10 个, 因此, $A = \{d, i, s, c, r, e, t, m, a, h\}$;

$$(2) \mathbf{Z} \text{ 包含元素: } \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots;$$

(3) 没有任何整数满足 $x^2 + 1 = 0$, 因此集合 S 中没有元素;

(4) \mathbf{Q}^+ 包含的元素可以被写成 a/b , 其中 a 和 b 都是整数, b 不为零并且 a, b 同号.

解 上述(1)~(4)都是通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合的,所以都是用叙述法(隐式法)表示的集合.

隐式法的特点在于所表示集合的元素可以是很多个或是无穷个,而且,从计算机的角度看,隐式法是一种“动态”的表示法,计算机在处理数据时,不用占据大量“内存”.

3. 归纳法

归纳法是通过归纳定义集合,主要由三部分组成:

第一部分:基础,指出某些最基本的元素属于某集合;

第二部分:归纳,指出由基本元素造出新元素的方法;

第三部分:极小性,指出该集合的界限.

第一部分和第二部分指出一个集合至少要包含的元素,第三部分指出一个集合至多要包含的元素.

例 1.2.3 集合 A 按如下方式定义:

(1) 0 和 1 都是 A 中的元素;

(2) 如果 a, b 是 A 中的元素,则 ab, ba 也是 A 中的元素;

(3) 有限次使用(1)、(2)后所得到的字符串都是 A 中的元素.

试指出集合 A 的定义方式.

分析 (1) 指出了集合 A 中最基本的元素是 0 和 1, (2) 给出了由 0 和 1 构造新元素的方法,如 00, 01, 11 等都是由 0 和 1 构造的集合 A 中的新元素, (3) 指出了集合 A 的界限. 显然, (1) 是基础, (2) 是归纳, (3) 是极小性, 根据归纳法的定义, 集合 A 就是利用归纳法定义的.

解 集合 A 是按归纳法定义的.

4. 递归指定集合法

递归指定集合法是通过计算规则定义集合中的元素.

例 1.2.4 设 $a_0 = 1, a_{i+1} = 2a_i (i \geq 0)$. 定义 $S = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} = \{a_k \mid k \geq 0\}$, 试写出集合 S 中的所有元素.

分析 因为 $a_0 = 1, a_{i+1} = 2a_i$, 所以 $a_1 = 2, a_2 = 4, \dots$. 于是, 根据给出的计算规则可以容易地计算出集合 S 中的元素为:

$$S = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\} = \{2^k \mid k \geq 0\}.$$

解 $S = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\} = \{2^k \mid k \geq 0\}$.

5. 文氏(Venn)图解法

文氏图解法是一种利用平面上点的集合做成对集合的图解. 一般用平面上的方形或圆形表示一个集合, 图 1.2.1 就是集合 A 的文氏图表示.

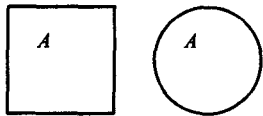


图 1.2.1

1.2.2 集合与元素的关系

元素与集合之间的“属于”关系是“明确”的. 对某个集合 A 和元素 a 来说, a 或者属于集合 A , 或者不属于集合 A , 两者必居其一且仅居其一. 我们将语句“ a 是集合 A 中的元素”或“ a 属于