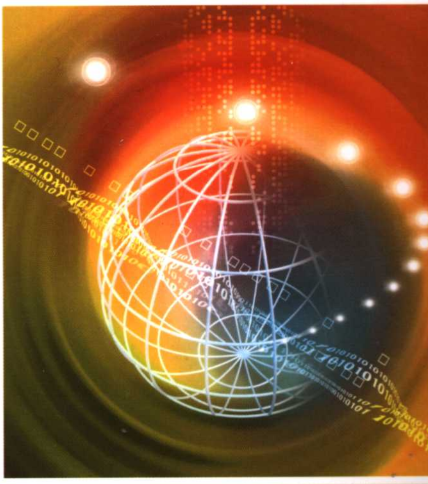
YINGYONG FANHAN FENXI

中国地质大学（武汉）研究生系列教材

应用泛函分析

赵 晶 编



中国地质大学（武汉）研究生教材建设基金资助

中国地质大学出版社

中国地质大学(武汉)研究生教材建设基金资助

中国地质大学(武汉)研究生系列教材

应用泛函分析

YINGYONG FANHAN FENXI

赵 晶 编

中国地质大学出版社

内 容 简 介

本书是学习泛函分析的入门教材。全书共分五章，内容包括：预备知识、度量空间、赋范线性空间与线性算子、Hilbert空间、线性算子的谱等。每章都配有一定数量的习题。

本书起点恰当，篇幅适中，叙述详细，通俗易懂。注重直观和应用，既突出了泛函分析的主要思想和主要方法，又符合数学的系统性与科学性。配有较多的例题，很适合自学。

阅读本书只需具备微积分和线性代数知识，超出此范围的数学知识在书中都有适当地介绍。

本书可作为工科研究生或数学类高年级本科生应用泛函分析课程的教材，也可供有关专业的教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/赵晶编. —武汉：中国地质大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-5625-2185-3

Ⅰ.应…
Ⅱ.赵…
Ⅲ.泛函分析-高等学校-教材
Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第115012号

Yingyong Fanhan Fenxi

应用泛函分析 赵　晶　编

责任编辑：方　菊　　责任校对：张咏梅

出版发行：中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号)　　邮政编码：430074
电话：(027)67883511　　传真：67883580　　E-mail：cbb@cug.edu.cn
经　　销：全国新华书店　　http://www.cugp.cn

开本：787毫米×1092毫米 1/16　　字数：250千字　印张：9.75
版次：2007年9月第1版　　印次：2007年9月第1次印刷
印刷：中国地质大学印刷厂　　印数：1—1 000册

ISBN 978-7-5625-2185-3　　定价：21.00元

"研究生系列教材"总序

在中国地质大学研究生院建院二十周年来临之际，第一批反映我校研究生教学与科学研究成果的"研究生系列教材"出版了，这是我校研究生教育发展过程中的一件大事，可喜可贺！

随着我校研究生招生规模的不断扩大，如何保证研究生的培养质量是我们必须积极思考并努力着手解决的问题。这套研究生系列教材的及时出版，正是一个很有力的举措。研究生教材建设是保证和提高研究生培养质量的重要手段，是反映一个学校教师队伍的学术水平和教学水平的宏观尺度，更是具有战略性意义的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使研究生通过学习，掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作打下良好的基础。因此，我校研究生院筹集资金设立了"研究生教材建设基金"，资助出版"研究生系列教材"以满足本校各学科研究生教学的需要，促进我校研究生教材建设工作，提高研究生培养质量。

由于研究生具有人才的高层次性、培养的超前性和学习的研究性等特点，这就要求研究生教材并不是本科生教材的简单深化和延续，而应该结合学校的学科专业结构和特色来编写系统性、新颖性、适用性融为一体的研究生教材。这套"研究生系列教材"以具有我校特色的研究生课程教材为主，既有基础理论教材，又有研究生专业课教材，准备在今后数年内分批次出版。"研究生系列教材"总的特色是从我校研究生的教学实际需要出发，根据各门课程在各专业研究生培养中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精。专业课程教材还要力求高起点，反映科学规律，追踪该学科专业的发展前沿，反映国内外的最新研究成果。

虽然，我们的主观愿望是尽可能组织编写出一套特色鲜明、适用性强的高质量"研究生系列教材"，但由于我校研究生教材建设工作起步不久，经验不足，已出版的教材质量尚待在使用中检验，敬请校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

姚书振

中国地质大学（武汉）研究生院　院长

2005年5月20日

前　言

泛函分析是研究无穷维空间和这类空间之间各种映射的一般性质的一个数学分支。它是从分析数学、变分法、积分方程、微分方程、逼近论和理论物理等的研究中发展起来的，成为近代分析的基础之一。它以集合论为基础，综合运用分析、代数和几何的观点方法，来研究分析学的课题。可看作无限维的分析学。

泛函分析是20世纪30年代形成的。它的产生和发展主要受到两个因素的影响。一方面，由于数学本身的发展，需要探求其各分支里被孤立讨论过的结论和方法的一般性和统一性。分析、代数、变分法、积分方程、集合的许多概念和方法常常存在相似的地方，它启发人们从这些类似的东西中探寻一般的真正属于本质的东西，加以总结和整理，建立一套理论，用统一的观点理解和处理已有的或将要出现的对象，促使了泛函分析抽象理论的形成与提升。另一方面，正如Newton力学对微积分的发展所起的作用一样，量子物理学的需要对泛函分析的发展起到重要作用。

泛函分析具有高度抽象性和概括性，并具有广泛的应用性以及表述形式的简洁性，使得它的概念和方法已渗透到数学、理论物理和现代工程技术的许多分支。半个多世纪以来，泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段，并形成了自己的许多重要分支，例如算子谱理论、Banach代数、拓扑线性空间理论、广义函数论等等；另一方面，它也强有力地推动着其他不少分析学科的发展。它在微分方程、概率论、函数论、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要的应用；它也是研究无限个自由度物理系统的重要而自然的工具之一，其方法大量地使用于连续介质力学、电磁场理论、量子场论等学科；此外，它的观点和方法已经渗入到不少工程技术性的学科之中，其概念、术语和符号作为科学的语言已被频频应用于许多技术问题的表述之中，成为一种方便的数学语言和工具。因此，泛函分析成为数学类高年级本科生和研究生必修的一门专业理论课，同时也成为工科研究生的一门数学基础课程。

本书是学习泛函分析的入门教材，源于编者多年来为工科研究生开设的应用泛函分析课程所使用的讲义。参加听课的学生来自需要较多现代数学知识的各个不同专业，数学基础不尽一致。因此本书的编写有比较明确的目标和定位，即起点恰当、篇幅适中，不仅能反映泛函分析的主要思想和主要方法，又能切合工科研究生数学基础课教学实践，为这些学生今后阅读相关领域的文献做些分析数学上的准备。

为使不同程度的学生在修读这门课程时都有收获，在素材的选取和叙述方式上作了审慎的推敲。书中尽可能用学生比较熟悉的内容和直观作原型，逐步引入抽象概念，让学生尽可能地了解到抽象概念和方法的应用；对重要的定理给出易于理解的证明，而对一些比较冗长或所需知识超出要求的证明，一般从略；对读者在学习过程中易于混淆和误解之处，采用“注”的形

式予以指出;配有较多的例题,很适合自学。

全书共分五章,考虑到读者的数学基础,从微积分和线性代数知识出发,适当补充了实分析的必备知识后,再将读者引入泛函分析的领域。其内容包括:预备知识(集合与映射、实直线与连续函数、Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分)、度量空间、赋范线性空间与线性算子、Hilbert 空间、线性算子的谱等。每章都配有一定数量的习题。

本书的初稿作为应用泛函分析课程的讲义已使用多次。编者的同事苑金臣教授、杨瑞炎教授曾在使用过程中提出有价值的建议;刘剑锋老师对初稿的第五章进行了校对;杨瑞炎教授审阅了全部书稿;中国地质大学研究生院对本书的出版给予了大力支持,在此深表感谢。

本书可作为工科研究生或数学类高年级本科生应用泛函分析课程的教材,也可供有关专业的教师和工程技术人员参考。

虽然本书的初稿曾多次试用、修改,在此次编写过程中又参考了大量的有关著作,其中对本书影响较大的书目均列在书后的参考文献中,但限于编者水平,不足和疏漏之处在所难免,恳切希望使用本书的读者和专家学者批评指正。

赵 昆

2007 年 6 月

目 录

第一章　预备知识

本章内容是学习泛函分析的预备知识.简要介绍了数学分析和实变函数中的一些基本知识:集合与映射、实数集的若干基本命题、连续映射、Lebesgue 测度以及 Lebesgue 积分的意义和性质.这些知识为学习泛函分析作必要的准备.

第一节　集合与映射

一、集合

集合是现代数学中最基本的概念之一.它渗透于数学的各个分支之中,然而它却像平面几何中的点、线、面一样,很难给出精确的数学定义.在此我们不去研究集合的严格定义而只给出一种描述.

集合(简称集),是指具有某种特定性质的事物的总体.组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常,用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.若事物 a 是集合 A 的一个元素,则记为 $a\in A$;若事物 a 不是集合 A 的一个元素,则记为 $a\notin A$;二者必居其一.由有限个元素组成的集合称为有限集;不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$;既不是空集又不是有限集的集合称为无限集.

集合的表示法有以下两种:

1° 列举法:把集合中的全体元素一一列举出来表示.例如,全体自然数所成的集合可以表示成

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

2° 特征描述法:若集合 A 是由具有某种特性 P 的元素 x 的全体所组成,就可以表示成

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

这种表示法称为特征描述法.例如,二维平面上,单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上点的全体构成的集合,可以表示成

$$C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2+y^2=1\}$$

下面再举几个集合的例子.

例 1　以有理数为系数的多项式的全体所组成的集合表示为

$$P=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\mid a_i\in\mathbf{Q}(i=0,1,2,\cdots,n),n\in\mathbf{N}\}$$

例 2　闭区间$[a,b]$上连续函数的全体所成之集表示为

$$C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\}$$

例 3　全体有界数列构成的集合表示为

$$l^\infty=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots)\mid\xi_n\in\mathbf{R},\sup_n|\xi_n|<+\infty)\}$$

关于集合之间的关系有以下表示方法.

设 A 与 B 是两个集合,如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 含于 B 中或 B 包含 A.对于任何集合 A,显然有 $A\subset A$,并且规定 $\varnothing\subset A$.若 $A\subset B$,并且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

二、集合的运算

1.集合的交、并、差

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$(若 $A\cap B=\varnothing$,称 A 与 B 互不相交),即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } A\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

若 $B\subset A$,此时 $A\setminus B$ 称为 B 关于 A 的余集(补集),记作 B_A^c.

有时,我们研究某个问题限定在一个大的集合 X 中进行,所研究的其他集合 A 都是 X 的子集.此时,称集合 X 为全集,称 $X\setminus A$ 为 A 的余集(补集),记作 A^c.

集合之集的关系常可用韦恩(Euler - Venn)图来示意,如图 1-1 所示.

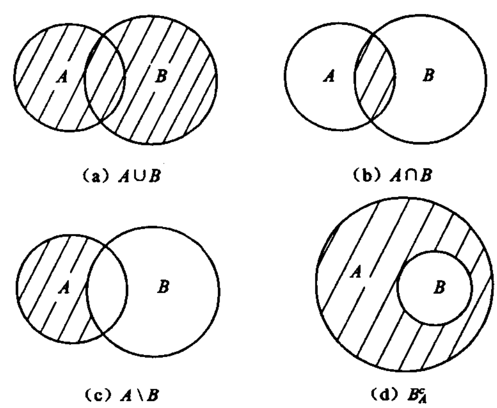


图 1-1

2.集合的运算性质

设 A、B、C 为任意三个集合,则有下列法则成立:

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

(2)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3)分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4)对偶律(De - Morgan 公式) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

上述运算性质都可以用图形直观地加以验证.但是,图形的示意不能作为数学定义或定理的证明.在集合论中,证明集合的运算等式通常是根据集合的包含、相等、并、交、差(余)等有关概念的定义,采用逻辑推理方法来进行的.

现就对偶律的第一个等式"两个集合并集的余集等于它们各自余集的交集"证明如下.

因为

$$x\in(A\cup B)^c\Rightarrow x\notin A\cup B$$

$$\Rightarrow x\notin A \text{ 且 } x\notin B$$

$$\Rightarrow x\in A^c \text{ 且 } x\in B^c$$
$$\Rightarrow x\in A^c\cap B^c$$

所以

$$(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$$

反之，因为

$$x\in A^c\cap B^c\Rightarrow x\in A^c \text{ 且 } x\in B^c$$
$$\Rightarrow x\notin A \text{ 且 } x\notin B$$
$$\Rightarrow x\notin A\cup B$$
$$\Rightarrow x\in (A\cup B)^c$$

所以

$$A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$$

于是，由集合相等的定义知

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

注 以上证明中，符号“⇒”表示“推出”(或“蕴涵”)．如果在证明的第一段中，将符号“⇒”改用符号“⇔”(表示“等价”)，则证明的第二段可以省略．

此外，集合运算还满足下列关系式：

1° $(A^c)^c=A$；

2° $A\cup A^c=X$， $A\cap A^c=\varnothing$；

3° $A\backslash B=A\cap B^c$；

4° 若 $A\subset B$，则 $A^c\supset B^c$；

5° 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$ 且 $B\subset A^c$．

集合的交与并的运算可作如下推广，定义

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid x\in A_\alpha,\ \forall\alpha\in I\}$$
$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \exists\alpha\in I,\text{使 } x\in A_\alpha\}$$

其中 I 为集 A_α 的指标集．

分配律与对偶律可推广如下．

分配律： $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap A_\alpha)$

$A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha)$

对偶律： $\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha^c)$

$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha^c)$

对偶律在集合论及其应用中提供了一个很有效的方法，使我们可以将已经得到的关于集合的某种性质转移到它的余集上去．

3. 直积

设 A、B 是两个集合，称集合 $\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$ 为集 A 与集 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

当 A、B 中有一个为空集时，规定 $A\times B=\varnothing$．例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，即为实平面上全体点的集合．$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$．

三、映射

映射是函数概念的推广．在微积分中已学过函数关系 $y=f(x)$，它可看作两个数集之间

按照一定法则的对应关系，若将两个数集换为一般的集合，即可得到映射的定义.

定义 1 设 X、Y 为两个非空集合，如果存在一个对应关系（或法则）f，对于每个 $x\in X$，按法则 f，存在一个确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称给出了一个从 X 到 Y 的映射 f，记作

$$f:X\to Y \text{ 或 } f:x\mapsto y$$

y 称为 x 在映射 f 下的像，记作 $f(x)$，即

$$y=f(x)$$

x 称为 y 关于映射 f 的原像（逆像）；集合 X 称为 f 的定义域，记为 $D(f)$. X 中所有元素的像所组成的集合称为 f 的值域，记作 $R(f)$或 $f(X)$ ，即

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),\forall x\in X\}$$

特别地，当 Y 是一个数集时，称映射 f 为泛函；当 $Y=X$ 时，称映射 f 为 X 上的变换；当 X、Y 都是数集时，f 就是通常的函数.

根据定义，X 中任一元素在 f 之下的像是唯一的，反之未必. $R(f)$中的点可能是 X 中两个以上元素的像. 一般地，$R(f)$是 Y 的一个子集，不必是整个 Y.

设 $A\subset X$，集合

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$$

称为 A 在 f 下的像.

集合

$$f^{-1}(\{y\})=\{x\mid f(x)=y,x\in X\}$$

表示 f 的所有原像点的集合.

若 $B\subset Y$，则集合

$$f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B,x\in X\}$$

称为 B 关于 f 的原像集，简称 B 的原像，它是 X 的子集，集中任一点的像都含于 B 中.

与映射同义的术语还有算子、变换、对应等.

例 4 导算子：记 $C^{(1)}[a,b]=\{f(x)\mid f'(x)\in C[a,b]\}$，则求导运算

$$D(f)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),f(x)\in C^{(1)}[a,b]$$

定义了一个映射 $D:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$.

例 5 积分算子：积分运算

$$T(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,f(x)\in C[a,b]$$

定义了一个映射 $T:C[a,b]\to \mathbf{R}$. 此时，T 是 $C[a,b]$上的一个泛函.

例 6 线性变换：$T(x)=Ax$. 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$是一个 $m\times n$ 阶方阵. 此线性变换定义了一个映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$.

映射有如下分类.

定义 2 设映射 $f:X\to Y$.

(1)若 $\forall x_1$、$x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是单射；

(2)若 $R(f)=Y$，则称 f 为满射，或称 f 是从 X 到 Y 上的映射；

(3)若 f 既是单射又是满射，称 f 为 X 到 Y 上的双射或一一映射（一一对应）.

若 $f:X\to Y$ 是单射[即 $f(X)$中每一个元素 y，存在 X 中唯一的元素 x 使 $y=f(x)$]，则由 $y=f(x)$可以确定一个由 $f(X)$到 X 的映射，称之为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D(f^{-1})$

$=R(f)$，值域 $R(f^{-1})=X$.

按此定义，只有单射才存在逆映射. 双射一定是可逆的.

例如：恒等映射 $I(x)=x(x\in X)$ 是 X 上最简单的双射；线性函数 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$ 是 $R\rightarrow R$ 的双射.

四、可数集与不可数集

集合可分为有限集与无限集.

对于有限集，它的元素个数可用一个自然数表示. 因此，比较两个有限集所含元素的多少是不困难的.

但是，怎样比较两个无限集所含元素的多少呢？此时，用数元素个数的方法是行不通的.

下面我们利用“建立一一对应关系”的方法来研究上述问题.

定义 3 若集合 A 与 B 之间存在双射（一一对应），则称 A 与 B 是对等的，记作 $A\sim B$. 并称 A 与 B 具有相同的基数（势），用 $\overline{A}$ 表示集合 A 的基数.

规定，与有限集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对等的集合的基数为 n，空集的基数为 0.

这就是说，有限集的基数是该集合中元素的个数. 因此，集的基数的概念是有限集中元素个数概念的推广.

集合的对等关系满足下面的性质：

(1)（自反性）$A\sim A$；

(2)（对称性）若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3)（传递性）若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

一般讲，具备自反性、对称性、传递性条件的关系称为等价关系. 所以集合的对等是一种等价关系，而基数给出了具有对等关系集合的一个“定量”的描述.

定义 4 凡与自然数集对等的集合称为可数集（可列集）.

显然，集合 A 可数当且仅当 A 中全体元素可以用自然数加以编号，使之排成一个无穷序列的形式. 记为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

例如：正偶数集 $\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$，正奇数集 $\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$，整数集 $\mathbf{Z}=\{0,-1,1,-2,2,\cdots,-n,n,\cdots\}$ 以及 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 等都是可数集.

可数集有几个简单而常用的性质.

定理 1 可数集的性质：

(1)可数集的子集至多可数；

(2)若 A 为可数集，B 为有限集或可数集，则 $A\cup B$ 是可数集；

(3)有限或可数个可数集的并仍是可数集；

(4)有限个可数集的直积是可数集；

(5)任一无限集都包含可数子集.

证 (1)、(2)显然成立.

(3)与(4)的证法类似，现在证明(3).

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是可数集，记 $S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，将 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的元素依下面方式列出

$$
\begin{array}{lllllll}
A_1: a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14}\cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
A_2: a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24}\cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
A_3: a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34}\cdots \\
 & \swarrow & & & & & \\
A_4: a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44}\cdots \\
\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

则依箭头所示方向的顺序可将 S 的全体元素排列为一个无穷序列

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \cdots$$

如果其中有元素重复出现，把后面重复出现的元素去掉，从而证得 S 为可数集.

(5)设 A 为无限集，A 中任取一元素记为 a_1，则 $A-\{a_1\}$ 仍为无限集，在其中任取一元素记为 a_2，而 $A-\{a_1,a_2\}$ 仍为无限集，在其中任取一元素记为 a_3，这样继续下去便可得到 A 中的一列元素 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，从而证得 A 必包含可数子集.

由此命题得出，在无限集中，可数集是"最小的".

例 7 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证 设 x 为有理数，则 $x=\dfrac{p}{q}$($p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{Z}^+$ 且 p 与 q 互质)，按和数 $|p|+q=n$ 的大小由小到大排序，将其对应的所有分数(有理数)写出并排除重复出现的分数，则 $n=1$ 时的分数只有 $\dfrac{0}{1}=0$，$n=2$ 时的分数有 $\dfrac{1}{1}$ 和 $\dfrac{-1}{1}$，$n=3$ 时的分数有 $\dfrac{2}{1},\dfrac{-2}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{2}$，等等. 按这样的方法做下去，可将全体有理数排列如下

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{-1}{1},\frac{2}{1},\frac{-2}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{3}{1},\frac{-3}{1},\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\cdots$$

由此得到的无穷数列(全体有理数)可以与自然数集一一对应，所以有理数集是可数集.

特别地，任何区间 $[a,b]$ 中的有理数全体是可数集.

例 8 整系数多项式的全体是可数集.

证 对固定的自然数 n，n 次整系数多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, a_0\neq 0$$

的全体与 $n+1$ 个整数集的直积集一一对应，由定理 1(4)知，后者是可数集，故 n 次整系数多项式的全体是可数集，从而整系数多项式的全体也是可数集.

注 同理可知，有理系数多项式的全体是可数集.

下面给出不可数集的例子.

例 9 开区间 $(0,1)$ 中所有实数所成之集是不可数集.

证 (反证法)假设 $(0,1)$ 是可数集，则 $(0,1)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，其中 $a_i\in(0,1)$，$i=1,2,3,\cdots$. 把它们写成十进制小数形式

$$
\begin{aligned}
&a_1=0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots \\
&a_2=0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots \\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
&a_n=0.\,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots \\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots
\end{aligned}
$$

构造一个数

$$x=0.x_1x_2x_3\cdots, \text{其中 } x_n=\begin{cases}1, \text{当 } a_{nn}\neq 1 \text{ 时}\\ 0, \text{当 } a_{nn}=1 \text{ 时}\end{cases}$$

则 $x\in(0,1)$，且 x 与所列任一 a_i 均不相同，导出矛盾，所以开区间 $(0,1)$ 是不可数集.

容易证明区间 (a,b)、$[a,b]$、$(-\infty,+\infty)$ 都可与区间 $(0,1)$ 建立一一对应关系，因而它们均为不可数集，且与 $(0,1)$ 具有相同的基数，称此基数为连续统的势.

此外，任何区间 $[a,b]$ 中的无理数全体是不可数集.

第二节　实数的完备性

实数集的性质非常优良，从而使实数集成为数学分析研究的可靠基础. 在泛函分析中，它也将给抽象空间中的讨论提供直观且生动的原型. 本节将介绍实数的完备性以及有关知识.

一、有理数的稠密性

形如 p/q(其中 p、q 为互质的整数，$q>0$) 的数称为有理数. 或等价地说，一切有限小数和无限循环小数称为有理数. 有理数集记为 $\mathbf{Q}$.

有理数的一个重要性质是它在实数系中的稠密性，即是说，任何实数都能用有理数任意逼近.

关于有理数的稠密性有几种等价的说法：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists\{r_n\}\subset\mathbf{Q}$，$n=1,2,\cdots$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，在 x 的任何邻域中都存在异于 x 的有理数；

(3) $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x\neq y$，则 x 与 y 之间至少存在一个(从而必有无限多个)有理数.

虽然有理数在数轴上具有稠密性，但却处处不连续(有理点并未布满整个数轴)，即任意两个有理数之间存在空隙，这种空隙即为无理数，这种现象称之为有理数的不完备性. 而实数系却具有连续性或完备性.

二、实数的完备性

实数的完备性需要用精确的数学语言来刻画. 刻画实数完备性的方法很多，这里先从较直观的区间套原理出发，然后介绍其他几个互相等价的定理. 它们从不同角度刻画了实数的完备性.

定义 1　设 $\{[a_n,b_n]\}$ $(a_n<b_n, n=1,2,\cdots)$ 是一列闭区间，且

(1) $\{[a_n,b_n]\}$ 是渐缩的，即 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则称这个闭区间列是一个闭区间套.

定义 2　如果在数集 A 中，任何一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 都可以套住 A 中的一个数，则说数集 A 是完备的，否则，A 就是不完备的.

例 1　有理数集是不完备的.

证　在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中考虑一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$：

a_n:0.1，　0.101，　0.101 001，　0.101 001 000 1，…

b_n:0.2，　0.102，　0.101 002，　0.101 001 000 2，…

这里的 $a_n, b_n(n=1,2,\cdots)$ 都是有理数，并且满足

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}10^{\frac{-n(n+1)}{2}}=0$$

显然，只有唯一的无限不循环小数 $c=0.101\,001\,000\,100\,001\cdots\in[a_n,b_n](n=1,2,3,\cdots)$，但是数 $c\notin\mathbf{Q}$，即 c 不是有理数.

由此可见，有理数集是不完备的.

下面的定理告诉我们，实数集是完备的.

定理 1(区间套定理)　设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是实数轴上的任一闭区间套，其中 a_n 与 b_n 均为实数，则存在唯一的实数 $c\in[a_n,b_n](n=1,2,3,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

以此定理为出发点，给出反映实数完备性的其他几个等价定理.

定理 2(致密性定理)　任何有界数列必有收敛的子数列.

证　设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，则必存在数 a 与 b，使得 $a\leqslant x_n\leqslant b, n=1,2,3,\cdots$. 将区间 $[a,b]$ 二等分，其中至少有一个子区间含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记该子区间为 $[a_1,b_1]$；再将区间 $[a_1,b_1]$ 二等分，其中至少有一个子区间含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记该子区间为 $[a_2,b_2]$；如此继续下去，得到一个闭子区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，它显然满足

(1) $\{[a_n,b_n]\}$ 是渐缩的；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$.

由区间套定理，必存在唯一的实数 c 属于一切 $[a_n,b_n]$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

由于每个子区间都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，故可在 $[a_1,b_1]$ 中取 $\{x_n\}$ 的一项，记作 x_{k_1}；在 $[a_2,b_2]$ 中取 $\{x_n\}$ 的一项，记作 x_{k_2}，并使 $k_1<k_2$. 如此继续下去，可以得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{k_n}\}$，满足

$$a_n\leqslant x_{k_n}\leqslant b_n, k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=c$. 就是说 $\{x_{k_n}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列.

定理 3(Cauchy 收敛原理)　实数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 n、$m\geqslant N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$（即当 $n\to\infty$、$m\to\infty$ 时，有 $|x_n-x_m|\to0$）.

证　必要性. 设 $x_n\to a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 n、$m\geqslant N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},\ |x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon$$

充分性. 设 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 数列，则 $\{x_n\}$ 必是有界数列. 事实上，取 $\varepsilon=1$，有正整数 N_0，当 n、$m\geqslant N_0$ 时，$|x_n-x_m|<1$，取 $m=N_0+1$，则 $|x_n-x_{N_0+1}|<1$，从而

$$|x_n|\leqslant|x_n-x_{N_0+1}|+|x_{N_0+1}|<1+|x_{N_0+1}|$$

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,1+|x_{N_0+1}|\}$，则对一切 n，有 $|x_n|\leqslant M$，即数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 根据定理 2，数列 $\{x_n\}$ 必有一个收敛子列 $\{x_{k_n}\}$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=a$，则由极限定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，当 $n\geqslant K$ 时，有

$$|x_{k_n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而$\{x_n\}$是一个 Cauchy 数列，故存在正整数 N_1，当 $n\geqslant N_1$（从而 $k_n\geqslant n\geqslant N_1$）时，有

$$|x_n-x_{k_n}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $N=\max\{K,N_1\}$，则当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|\leqslant|x_n-x_{k_n}|+|x_{k_n}-a|<\varepsilon$$

这说明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注 满足定理 3 条件的数列称为 Cauchy 数列或基本列.

例 2 数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$. 证明$\{x_n\}$是发散的.

证 因对任意 n，有

$$|x_{2n}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

由 Cauchy 收敛原理立即可知$\{x_n\}$不收敛.

Cauchy 收敛原理的意义不仅在于它提供了判断数列收敛的一个充分必要条件，而且，它还是刻画实数完备性的最常用的表达形式. 在现代数学中，正是用它来定义抽象空间的完备性的. 因此，常常称它为完备性定理.

定理 4(单调有界准则) 单调有界数列必收敛.

证 不妨设$\{x_n\}$单调增有上界. 假设$\{x_n\}$不收敛，则由 Cauchy 收敛原理，$\exists\varepsilon_0>0$，对于任意正整数 N，不等式$|x_n-x_m|<\varepsilon_0$ 不能对一切大于或等于 N 的 n、m 成立.

因此，当取 $N=1$ 时，必有 n_1、$m_1\geqslant1$，使得$|x_{n_1}-x_{m_1}|\geqslant\varepsilon_0$，不妨设 $m_1\geqslant n_1$；

取 $N=m_1+1$，必有 n_2、$m_2\geqslant m_1+1$，使得$|x_{n_2}-x_{m_2}|\geqslant\varepsilon_0$，不妨设 $m_2\geqslant n_2$；

取 $N=m_2+1$，必有 n_3、$m_3\geqslant m_2+1$，使得$|x_{n_3}-x_{m_3}|\geqslant\varepsilon_0$，不妨设 $m_3\geqslant n_3$.

如此继续下去，可得正整数列

$$n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots<n_k<m_k<\cdots$$

使不等式

$$|x_{n_k}-x_{m_k}|\geqslant\varepsilon_0,k=1,2,3,\cdots$$

成立. 又由已知$\{x_n\}$单调增，所以

$$|x_{n_k}-x_{m_k}|=x_{m_k}-x_{n_k}\geqslant\varepsilon_0$$

于是

$$x_{m_k}\geqslant x_{n_k}+\varepsilon_0\geqslant x_{m_{k-1}}+\varepsilon_0\geqslant x_{n_{k-1}}+2\varepsilon_0\geqslant\cdots\geqslant x_{n_1}+k\varepsilon_0$$

当 k 充分大时，x_{m_k} 可以大于任意给定的正数，这与题设$\{x_n\}$有上界矛盾，因此$\{x_n\}$收敛.

类似可证单调减有下界数列也是收敛的.

定义 3 上确界：设 M_0 是数集 A 的上界，如果 M_0 满足下述三个条件之一：

(1)M_0 是 A 的最小上界；

(2)对$\forall\varepsilon>0$，$M_0-\varepsilon$ 不再是 A 的上界；

(3)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon>M_0-\varepsilon$，则称 M_0 为 A 的上确界，记为

$$\sup A\ 或\ \sup_{x\in A}\{x\}，即\ M_0=\sup A$$

下确界：设 m_0 是数集 A 的下界，如果 m_0 满足下述三个条件之一：

(1)m_0 是 A 的最大下界；

(2)对 $\forall \varepsilon>0, m_0+\varepsilon$ 不再是 A 的下界；

(3)对 $\forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in A$，使得 $x_\varepsilon<m_0+\varepsilon$，则称 m_0 为 A 的下确界，记为

$$\inf A \text{ 或 } \inf_{x\in A}\{x\}, \text{即 } m_0=\inf A$$

说明 1)数集 A 的上确界不一定属于 A. 如 $A=\{x \mid x<0\}$，显然 $\sup A=0 \notin A$. 但若数集 A 有最大值 x_0，则 $\sup A=x_0 \in A$.

2)非空无上界的数集 A，规定 $\sup A=+\infty$.

3)非空数集 A，必存在数列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sup A$.

对于 3)的证明如下.

若 $\sup A=+\infty$，则 A 无上界，因此对于数 1，$\exists x_1 \in A$，使 $x_1>1$；

对于数 2，$\exists x_2 \in A$，使 $x_2>2$；

…………

一般地，对于数 n，$\exists x_n \in A$，使 $x_n>n$. 于是得到一个数列 $\{x_n\} \subset A$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

若 $\sup A=M_0<+\infty$，按上确界的定义(3)，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，则 $\exists x_n \in A$，使得

$$M_0 \geqslant x_n>M_0-\frac{1}{n}$$

取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=M_0$.

下确界也有类似的三点说明，这里不再赘述.

在上(下)确界的定义中，并没有回答数集上确界与下确界的存在性问题. 那么，在什么情况下，数集 A 的上(下)确界存在？下面的定理回答了这个问题.

定理 5(确界存在定理) 非空有上界的实数集 A 必有上确界，非空有下界的实数集 A 必有下确界.

证 将数轴上每个单位区间二等分，则存在以 2 为分母的有理数作为 A 的上界，设其中最小者为 r_1；再将数轴上每个单位区间 2^2 等分，则存在以 2^2 为分母的有理数作为 A 的上界，设其中最小者为 r_2. 按此方法对数轴继续进行划分，则对任何正整数 n，都存在以 2^n 为分母的最小有理数 r_n 作为 A 的上界，从而得到一个单调减的有理数列 $\{r_n\}$，使 $x \leqslant r_n$ 对 A 中的一切数 x 和正整数 n 均成立，$\{r_n\}$ 是有下界的. 由单调有界准则可知，存在实数 M，使得

$$\lim_{n\to\infty} r_n=M$$

因 $x \leqslant r_n$ 对 A 中的一切数 x 和正整数 n 均成立，所以 M 是数集 A 的一个上界；

另外，对 $\forall \varepsilon>0$，A 中必存在数 $x_\varepsilon>M-\varepsilon$，否则，$(M-\varepsilon, M)$ 内一定存在以 2^n 为分母的最小有理数 r_n 作为 A 的上界，这与数列的做法及 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=M$ 相矛盾. 所以 $M=\sup A$.

对于下确界的情况同理可证.

定义 4 设 A 是一个数集，$\Delta=\{\delta \mid \delta \text{ 是区间}\}$ 是以区间为元素所组成的集合. 若 $\forall x \in A$，$\exists \delta_x \in \Delta$，使 $x \in \delta_x$，则称集合 Δ 覆盖了数集 A 或 Δ 为 A 的一个覆盖；若 Δ 是由开区间所组成的集合，则称 Δ 为 A 的一个开覆盖；若 Δ 是由有限个区间所组成的集合，则称 Δ 为 A 的一个有限覆盖.

例 3 $\Delta_1=\left\{\left[0, \dfrac{1}{2}\right), \left[\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n+1}\right), [1,2] \,\middle|\, n \in \mathbf{N}^+\right\}$ 覆盖了区间 $[0,2]$；