



高等学校规划教材

GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

罗琬华 编著

电动力学

DIAN DONG
LI XUE

西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

0442/28

2007



高等学校规划教材

GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

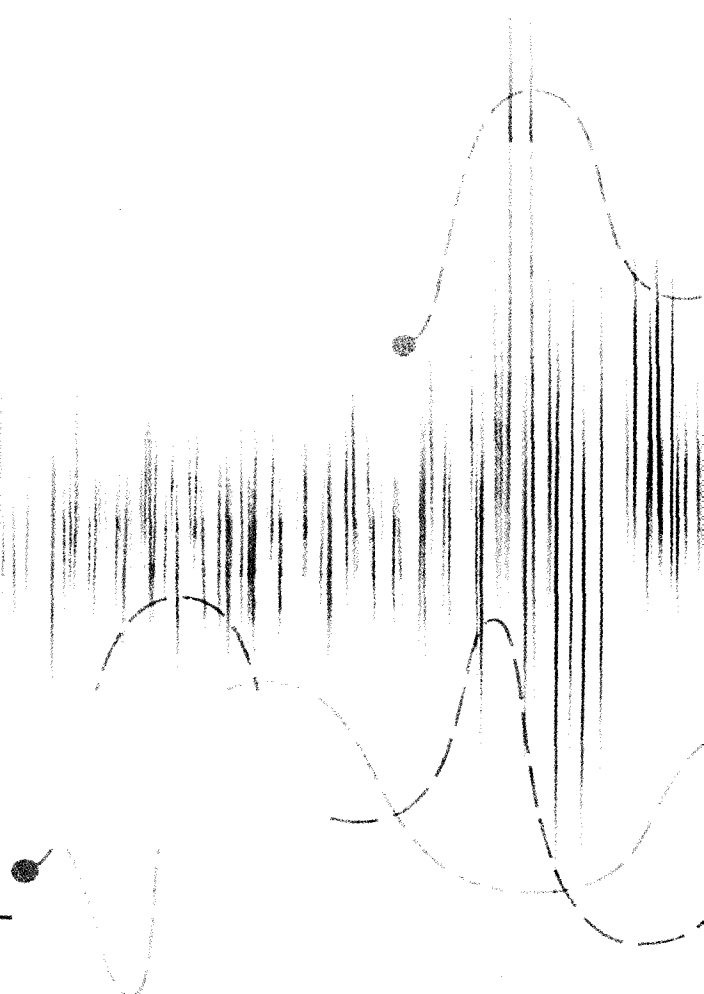
DIAN DONG
LI XUE

电动力学

罗琬华 编著

西南师范大学出版社

XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE



图书在版编目(CIP)数据

电动力学/罗琬华编著. —重庆:西南师范大学出版社,
2007.9

高等学校规划教材

ISBN 978-7-5621-3958-4

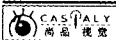
I. 电… II. 罗… III. 电动力学—高等学校—教材
IV. 0442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 142141 号

电动力学

罗琬华 编著

责任编辑:杨光明

整体设计:  周娟 钟琛

出版、发行:西南师范大学出版社

重庆·北碚 邮编:400715

网址:www.xscbs.com

印 刷:西南农业大学印刷厂

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:13.25

字 数:380 千字

版 次:2007 年 9 月第 1 版

印 次:2007 年 9 月第 1 次

书 号:ISBN 978-7-5621-3958-4

定 价:22.00 元

电动力学课程是大学本科物理专业的一门专业必修课程,也是许多工科院校的专业基础课程。通过这门课程学生可以学习到电磁场的基本性质、基本运动规律,了解到电磁场与物质相互作用的现象和本质,还可以培养学生的抽象思维能力、应用数学解决复杂问题的能力以及发展学生科学的世界观。一直以来,电动力学课程因自身的特点在师生中有难教难学的说法,近年来由于大学扩招,这种说法成了一种呼声,电动力学课程本身的魅力和教育效能受到了影响。我们认为在这样的背景下,电动力学课程需要在共同的基本教学目标下,有不同的教学要求,有不同的教学方法,这就需要不同的教材。教材要多样化,多层次,适合不同的学生,让每一个学生都在这门课程中找到乐趣,有所收获。为此我们编写了这本教材,其定位为:为师范院校物理专业本科学生提供入门学习电动力学、欣赏电动力学、理解电动力学、应用电动力学的素质教育服务。具体地讲,我们主要考虑了以下几方面:

1. 始终注意学生的学习兴趣,最大限度地调动学生的学习动力。兴趣是学生学习的最大动力。电动力学本身的确是抽象枯燥的,怎样才能做到这一点呢?(1) 加强当前学习和未来的链接。对现在的大学生来讲,学习的兴趣不完全在于学科知识本身的特点以及内容的呈现方式。物理学曾经吸引了很多优秀青年去钻研,去为之努力奋斗。固然物理学简洁的理论形式、深奥的内涵是吸引青年的重要原因,但是物理学在 20 世纪初创造的辉煌成就才是主因。兴趣实际上和青年渴望成功的需要密切相关。现在我们大多数学生的兴趣在哪里呢?最有助于就业竞争的肯定是最能吸引学生的,从这个角度来审视电动力学课程确实难以引起大多数学生的兴趣。有研究表明,当学习者看出所学的东西与自己的生活目的有关时,学习时间可以缩短三分之二到五分之四。因此我们在教材编写中注意引导学生认识学习材料与个人生活、人生目的的关联性,鼓励学生主动参与教学过程。学习电动力学知识的时候,强调这些知识对后继课程或者将来工作的重要性(这需要特别针对学习对象,比如对师范专业的学生可以用电动力学知识讨论中学物理学教学疑难问题)。(2) 加强当前学习和过去已经学习过知识的链接。学习的兴趣也和学生的原有知识结构有关,若当前面对的学习资料无法和自己原有的知识结构联系起来时,学习是没有兴趣的。现代认知心理学研究^①表明,新知能与已经习得的旧知能和已经形成的价值能发生联系,则能增强学习动机。所以编写教材时我们充分注意学生的学习背景,建立进入新知识的桥梁。电动力学在知识系统上有好多方

① 高文主编,现代教学的模式化研究,山东教育出版社

面和学生的知识结构有很大的距离,尤其是现在学生的数学基础大打折扣的现实情况下。电动力学需要较高的抽象思维能力和逻辑推理能力,这也是对现在学生的能力基础很大的挑战。为此,我们一改以往教材总是将数学等内容作为附录放在最后的模式,而在开头就学习“数学准备”这部分,从而在心理上使学生明确,数学是学习电动力学的必要基础,也可以让学生作好较为系统的数学准备。

2. 教材内容体系要保持整体性、系统性。电动力学的特点就是其严密的逻辑和论证,高度概括的理论体系,这些都由课程的内容体系来体现,所以尽管我们的教材对象是师范专业物理本科学生,目标是素质教育,但是仍然要保持内容体系的系统性和整体性。

3. 教材内容呈现以强调物理内涵为主。电动力学理论性程度很高,用数学公式可以简洁地演绎其全部理论,但是这样可能掩盖其物理内涵。我们曾经对中学教师做过关于电动力学知识的遗忘的调查,结果是,凡是以数学公式呈现的知识,都遗忘严重,而以语言,尤其以语言描述分析的例子相对遗忘较少。从素质教育出发,我们在教材中强调物理内涵,对数学描述的规律,也尽可能用语言加以阐述。

4. 引入前沿和应用知识的前提是加强学生科学素质的培养,激发学习动机。经常看到关于在教材中引入前沿知识从而开拓学生眼界,增强学生科学素质的讨论。我们的看法是,引入前沿知识不仅为开拓眼界,也为激发学生的学习兴趣,增强学习动机。所以在引入前沿知识时,一要和教材内容体系结合密切,或应用,或发展;二要给学生思考讨论的余地,即参与的空间。因为前沿和应用知识不一定是系统的,所以以附录方式给出。

5. 练习题的多样性。要学好电动力学肯定需要一定量的练习,练习的作用一方面是为了掌握学习的概念、规律和方法,另一方面就是给学生应用所学知识的平台。掌握知识和应用知识是密切相关的,掌握为了应用,能否应用是掌握的判据。掌握和应用都是有层次的。我们的想法是,既然绝大多数的学生将来都不会从事以电动力学为基础的专业,做大量的计算没有多大意义,练习可以是理解基本概念,训练基本方法,分析基本现象,讨论实际问题等,总之使学生认为练习是应用,是愉快的参与。

以上各点是我们对本教材的设想。以学生为本是基本理念,但是否达到预期设想还需实践检验。

1 数学准备

11 第一篇 电磁现象的普遍规律

第 1 章 电磁场基本理论 13

§ 1 静电场的基本方程 14

§ 2 静磁场的基本方程 16

§ 3 真空中的麦克斯韦方程组 18

§ 4 洛伦兹力公式 21

§ 5 电荷守恒定律的微分形式 22

§ 6 介质中的麦克斯韦方程组 介质的电磁性质方程 22

§ 7 电磁场的边值关系 27

本章小结 29

习题一 30

第 2 章 电磁作用下的守恒定律 32

§ 1 电磁场的能量和能量守恒定律 32

§ 2 电磁场的动量和动量守恒定律 36

§ 3 电磁场的角动量和角动量守恒定律 37

本章小结 39

习题二 40

附录 麦克斯韦 42

45 第二篇 静电磁场

第 3 章 静电磁场的基本理论和研究方法 47

§ 1 静电磁场的势函数 47

§ 2 静电磁场的基本方程 50

§ 3 静电磁场势的边值关系 51

§ 4 唯一性定理 53

§ 5 静电磁场的能量 56

本章小结 58

习题三 59

第 4 章 求解静电磁场的方法 61

§ 1 无限大接地导体板右侧空间的电场 电像法 62

§ 2 在均匀电场中均匀介质球内外的电场 分离变量法 67

§ 3 定域电荷和电流在远处的场 电多极矩法和磁多极矩法 73

§ 4 利用某空间单位点电荷的场求一般电荷分布的场 格林函数法 76

§ 5 超导体的电磁性质 78

本章小结 84

习题四 86

附录 1 补充例题 89

附录 2 阿哈罗诺夫-玻姆(Aharonov-Bohm)效应 90

附录 3 静电磁场理论在脑功能探测中的应用 91

95 第三篇 时变电磁场

第5章 电磁波的传播 97

§1 电磁波在绝缘介质中的传播 98

§2 电磁波在介质分界面上的反射与折射 全反射 104

§3 平面电磁波在有导体的空间中传播 111

§4 有界空间的电磁波 117

本章小结 126

习题五 127

第6章 电磁波的辐射 129

§1 电磁势及其方程 130

§2 推迟势(达朗贝尔方程的解) 133

§3 推迟势的多极展开 电偶极辐射 134

本章小结 140

习题六 140

附录1 原子的激光冷却与捕陷 143

附录2 电磁波在等离子体中的传播 144

147 第四篇 狭义相对论

第7章 狭义相对论的原理和相对论电动力学 149

§1 电磁学和相对性原理 149

§2 洛伦兹变换 152

§3 物理量的协变性 155

§4 电动力学规律的协变性 161

本章小结 167

习题七 168

第8章 相对论的时空理论和相对论力学 170

§1 相对论的时空理论 170

§2 相对论性的力学 177

本章小结 183

习题八 183

附录1 迈克尔逊-莫雷实验 186

附录2 爱因斯坦与相对论 187

第9章 带电粒子与电磁场的相互作用 191

§1 运动带电粒子的电磁场 191

§2 介质对电磁波的影响 197

§3 经典电动力学的适用范围 200

本章小结 201

习题九 202

主要参考书目 203

数学准备

学习电动力学不可避免地要应用数学,没有良好的数学基础,学习电动力学会有很大困难.电动力学要用的绝大多数数学知识大家在数学课程中已经学过,但是因为实际应用少而不熟悉.为此我们先学习相关的数学知识,为电动力学的学习作好数学准备.我们将学习最常用的矢量分析、特殊函数等.这里以引入为主,除了必要的推导,一般不作证明.

第一部分 矢量分析与张量分析初步

矢量分析和张量分析都是研究场的数学方法.场在数学中就是空间的点函数,空间的标量函数就是标量场,空间的矢量函数就是矢量场.在物理学中不同物理对象的空间函数成为重力场、流体场、电磁场等,研究它们的数学方法都是矢量分析.

§ 1.1 矢量代数 δ 符号

一、矢量代数的基本公式

直角坐标系的基矢用 e_1, e_2, e_3 表示,位置矢量 x 可表示为

$$x = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \sum_{i=1}^3 x_i e_i,$$

任意矢量 a, b 则表示成

$$a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i, b = \sum_{i=1}^3 b_i e_i.$$

1. 矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标积(点积)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \sum_i a_i b_i,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos \theta.$$

其中, θ 为矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的夹角, a, b 是矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模.

2. 矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的矢积(叉积)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{n}.$$

式中, $\mathbf{n}$ 为垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 且满足右手螺旋的单位矢量.

3. 三矢量的混合乘积

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

可以看出, 只要保持 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的次序不变, 可以交换“ $\cdot$ ”和“ $\times$ ”的位置, 但是必须先矢乘后标乘.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

4. 三矢量的矢积

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

这两个公式说明, 三矢量的矢积为括号外的矢量点乘远处的矢量后乘以近处的矢量, 再减去括号外的矢量点乘近处的矢量后乘以远处的矢量.

二、 δ 符号

克隆尼克 δ 符号定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

式中 i, j 为所有整数.

由定义有

1. 对角标对称

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

2. 和式

$$\sum_{j=0}^{(\infty)} b_j \delta_{ij} = b_i.$$

3. 基矢的标积

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

4. 偏导数

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

§ 1.2 ∇ 算符 梯度、散度和旋度的算符表示

一、 ∇ 算符

1. ∇ 算符的定义

∇ 算符是一个矢量微分算符,它作用于后面的函数.在直角坐标系中,定义为

$$\nabla = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

在球坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

在柱坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. 拉普拉斯算符 ∇^2

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 称为拉普拉斯算符.

在直角坐标系中

$$\nabla^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在球坐标系中

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

在柱坐标系中

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

二、标量场的梯度

标量是没有方向的量,但是在不同方向上其变化率不同,因此其变化率是有方向的.如图

1 电势是标量,在垂直于等位面方向 $\mathbf{n}$ 上的变化率 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 最大,其他方向 $\mathbf{l}$ 的变化率与 $\mathbf{n}$ 方向变化率的关系是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos \theta.$$

定义 P 点方向变化率 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 为该点的梯度.梯度是矢量,其大小是标量场某点空间变化率的最大值,方向是增加最快的方向.

用 ∇ 算符表示 $\varphi(\mathbf{x})$ 的梯度,

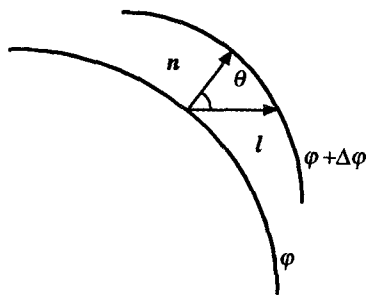


图 1

$$\text{grad}\varphi = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nabla \varphi.$$

三、矢量场的散度

电磁学中,我们引入电场线描述电场,电场线从正电荷发出,止于负电荷,没有电荷处,电场线是连续的,电荷量大,则发出(或终止)的电场线多.这些由电场线描述的源和它激发的场的关系,在矢量分析中用散度来定量描述.设矢量场中某点 P ,包围 P 点的闭合面 S ,则 P 点的散度定义为

$$\text{div}\mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}.$$

式中 ΔV 是 S 包围的体积, P 点在 ΔV 中.由定义可见,散度是标量,空间各点的散度构成一个标量场.

1. 用 ∇ 算符表示散度

$$\text{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

式中, ∇ 算符与 $\mathbf{E}$ 的标积按一般矢量的标积运算.在直角坐标系中,

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

2. 矢量场的高斯公式

矢量场的高斯公式给出面积分和体积分的变换关系.设 $\mathbf{E}$ 的各分量及其偏导数是连续函数, S 为 V 的表面,则有

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

3. 复合函数的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}(u)}{du}.$$

四、矢量场的旋度

在电磁学中,我们知道静电场的力线不能闭合,静电场沿任意闭合曲线 L 的积分,称为静电场对 L 的环流,总是为零.涡旋电场和磁场的力线却总是闭合曲线.力线反映的矢量场的这种性质,我们叫场的涡旋性质,在矢量分析中,用旋度来定量描述.设矢量场中某点 P ,取环绕 P 点的回路 L ,则 P 点的旋度定义为

$$\text{rot}\mathbf{B} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{n}_0.$$

式中, ΔS 是 L 为周界的曲面, P 点在曲面 ΔS 上. $\text{rot}\mathbf{B}$ 的大小,就是当面元 ΔS 的法线 $\mathbf{n}$ 取一切

可能方向时, $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$ 的最大值; $\text{rot}\mathbf{B}$ 的方向,就是该极限值取最大值时 $\Delta S = \mathbf{n}\Delta S$ 的方向,将这方向记作 $\mathbf{n}_0$.由此可见,每一点 P 对应一个矢量 $\text{rot}\mathbf{B}$,故 $\text{rot}\mathbf{B}$ 是一个矢量场.

1. 用 ∇ 算符表示旋度

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}.$$

式中, ∇ 算符与 $\mathbf{B}$ 的矢积按一般矢量的矢积运算. 在直角坐标系中,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

2. 斯托克斯公式

斯托克斯公式给出线积分和面积分的变换关系. 设 $\mathbf{B}$ 的各分量及其偏导数是连续函数, l 是曲面 S 的边界线,则

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

3. 复合函数的旋度

$$\nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}(u)}{du}.$$

五、关于散度和旋度的一些定理

1. 标量场的梯度必为无旋场

$$\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0.$$

证明: 令矢量场 $\mathbf{f} = \nabla \varphi$, 直角坐标系中, $\nabla \times \nabla \varphi$ 的 x 分量

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \varphi)_x &= (\nabla \times \mathbf{f})_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

同理可以证明其他分量也为零, 即 $\mathbf{f} = \nabla \varphi$ 是无旋场, 故 $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$.

2. 矢量场的旋度必为无源场

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0.$$

$$\text{证明: } \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = 0.$$

3. 无旋场必可以表示为标量场 φ 的梯度

由定理1很容易看出, 若 $\nabla \times \mathbf{f} = 0$, 则 $\mathbf{f} = \nabla \varphi$.

4. 无源场必可以表示为另一矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度

由定理2可以看出, 若 $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, 则 $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$.

六、常用的 ∇ 算符运算公式

从前面的计算可以看出, ∇ 算符在运算中, 第一可以当作矢量, 所以运算时要按照矢量运算公式; 第二它代表微分运算, 所以要应用微分运算法则, 并且记住微分是对后面的函数进行, 所以 ∇ 算符在运算中又不能当作普通的矢量.

下面的公式有的只要我们记住上面两点, 很容易可以得出, 有的复杂一点, 这里我们不打算证明, 但是这些公式后面都可能用到, 希望同学们重视.

1. $\nabla(\varphi\psi) = \varphi(\nabla\psi) + \psi(\nabla\varphi)$.
2. $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{f} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{f}$.
3. $\nabla \times (\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{f} + \varphi(\nabla \times \mathbf{f})$.
4. $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$.
5. $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + (\nabla \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g}$.
6. $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}$.
7. $\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$.
8. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f}$.

七、对 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 的运算

这里可以认为 $\mathbf{x}(x, y, z)$ 是场点坐标, $\mathbf{x}'(x', y', z')$ 是源点坐标, $\mathbf{r}$ 是源点到场点的矢量, 如图 2 所示. ∇ 表示对场点微分, ∇' 对源点微分.

1. $\nabla r = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r}$.
2. $\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.
3. $\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$.
4. $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, r \neq 0$, 在 $r = 0$ 点不成立.
5. $\nabla \cdot \mathbf{r} = -\nabla' \cdot \mathbf{r} = 3$.
6. $\nabla \times \mathbf{r} = 0$.

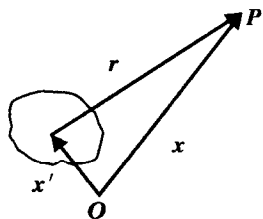


图 2

以上式子说明, 对于 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, 有 $\nabla = -\nabla'$

下面的式子中, $\mathbf{a}, \mathbf{k}$ 及 $\mathbf{E}_0$ 是常矢量.

7. $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}$.
8. $\nabla[\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \nabla \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{d \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$.
9. $\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \nabla \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0 = \frac{d \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$.

八、矢量场的一些定理

1. 格林定理

φ 和 ϕ 都是区域 V 中任意连续函数, S 是 V 的表面, 则

$$\oint_S \varphi \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \int_V [\varphi \nabla^2 \phi + \nabla \varphi \cdot \nabla \phi] dV.$$

证明: 由高斯公式

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

$\mathbf{E}$ 是任意连续的矢量场. 所以

$$\oint_S \varphi \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \phi) dV.$$

$$\int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \phi) dV = \int_V [\varphi \nabla^2 \phi + \nabla \varphi \cdot \nabla \phi] dV$$

2. 亥姆霍兹定理

定理 若给定矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 在区域 V 内的散度和旋度, 以及它在边界面 S 上的法向分量 $A_n(\mathbf{x})|_S$ 或者切向分量 $A_t(\mathbf{x})|_S$, 则 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 惟一确定.

证明: 设 $\mathbf{A}_1(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ 同时满足定理的条件, 令

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}),$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0, \nabla \times \mathbf{a} = 0.$$

且在边界上,

$$a_n|_S = 0, \text{ 或者 } a_t|_S = 0.$$

因为标量场的梯度必为无旋场, 所以由

$$\nabla \times \mathbf{a} = 0, \text{ 有 } \mathbf{a} = \nabla \varphi,$$

两边取散度, 则

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0.$$

由格林定理, 并且令 $\varphi = \phi$,

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = \int_V [\varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2] dV.$$

则

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \varphi)^2 dV.$$

对第一种边界条件 $a_n|_S = 0$ 可得

$$\varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s}|_S = \varphi \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}|_S = \varphi a_n d\mathbf{s}|_S = 0,$$

所以

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \varphi)^2 dV = 0.$$

对第二种边界条件 $a_t|_S = 0$, 可得 $\mathbf{a} = \nabla \varphi$ 在 S 面上切向分量为 0, 即 φ 在曲面 S 上没有变化, S 是 φ 的等值面, 可以将 φ 提出积分号, 则有

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 dV = \oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = \varphi \oint_S \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = \varphi \oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \varphi \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = 0.$$

即两种边界条件下都有

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 dV = 0.$$

因为 $(\nabla \varphi)^2 \geq 0$, 要 $\int_V (\nabla \varphi)^2 dV = 0$, 只能 $\nabla \varphi = 0$, 即 $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0$.

即

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}).$$

定理得证.

亥姆霍兹定理就是矢量场的唯一性定理, 它告诉我们, 要确定一个矢量场, 须确定它的散度、旋度以及边界条件(即边界切向值或者边界法向值), 在后面的学习中, 我们将具体研究电场和磁场的散度和旋度、边界条件, 以及电磁场的唯一性定理.

§ 1.3 张量以及张量分析初步

一、张量的概念

有的物理量用标量可以描述,比如电荷量,只需要一个数;有的物理量需要矢量才能描述,比如力、场强,需要 3 个分量,还有的物理量需要张量才能描述. 比如弹性体内部的相互作用力. 考虑弹性体内部 P 点,在 P 点作一面元 $ds = ds_x e_x + ds_y e_y + ds_z e_z$,其中 ds_x 表示 ds 垂直于 x 轴的投影面,其余类似,如图 3 所示. 面元前方介质给面元后方介质的力,应该是 ds_x, ds_y, ds_z 3 个投影面所受力的合力. 显然,任意投影面比如 ds_x 所受的力不会沿 x 方向,通常应该有 $dF_{xx}, dF_{xy}, dF_{xz}$ 3 个分量,也就是说,需要 9 个分量才能确定面元 ds 前方介质给其后方介质的力. 这样在三维空间需 9 个分量才能确定的量叫张量.

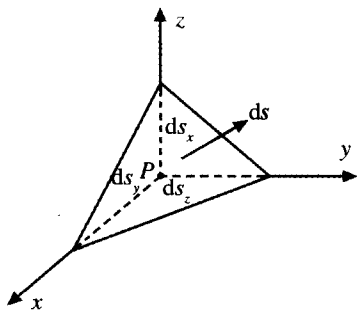


图 3

通常张量 T 的 9 个分量用矩阵表示成

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

或写成

$$T = \sum_{ij} T_{ij} e_i e_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

二、并矢

两矢量不作任何运算并列,称为并矢, A 和 B 的并矢写作 AB .

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}.$$

并矢是张量. 一般来说

$$AB \neq BA.$$

三、单位张量

$$I = e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 = \sum_{i=j} e_i e_j,$$

可以用单位矩阵表示为

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

四、张量的代数运算

并矢 $\mathbf{AB}$ 与矢量 $\mathbf{C}$ 的点乘规则为

$$(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}.$$

因此并矢与矢量的点乘是一个矢量,而且一般有

$$(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}),$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{f} = \sum_{ij} T_{ij} f_j \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{T} = \sum_{ij} T_{ij} f_i \mathbf{e}_j.$$

单位张量和任意一矢量的点乘等于该矢量:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{f}.$$

五、张量分析

将算符 ∇ 作用在张量或并矢上时,只要注意 ∇ 算符的矢量性和微分运算特性,可得

$$(1) \nabla \cdot (\mathbf{fg}) = (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}.$$

$$(2) \nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}).$$

$$(3) \oint \mathbf{ds} \cdot \mathbf{T} = \int dV \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

$$(4) \oint \mathbf{ds} \cdot (\mathbf{fg}) = \int dV \nabla \cdot (\mathbf{fg}).$$

第二部分 δ 函数 复数 泰勒级数

一、 δ 函数

在电动力学中,一些特殊函数是经常用到的,比如 δ 函数.

1. δ 函数的定义

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}')$$

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = 1.$$

若积分区域 V 包含 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, 则 $\mathbf{x}' \in V$.

2. δ 函数的性质(以一维为例)

若 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty, \infty)$ 的任一连续函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

这叫做 δ 函数的选择性质.

3. δ 函数常用表达式

$$\delta(r) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}.$$

4. 点电荷密度的 δ 函数表示

点电荷是电荷分布的极限情况,它可以看作一个体积很小而电荷密度很大的带电小球的极限.若设电荷分布在小体积 ΔV 内,当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时,体积内的电荷密度 $\rho \rightarrow \infty$,而保持总电量不变,因此处于 x' 点的单位点电荷的密度可以用 δ 函数表示.

$$\rho(x) = \delta(x - x').$$

当 $x \neq x'$ 时,其值为 0,而对包括 x' 点的区域积分值等于 1.

二、复数的表示

由欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta,$$

则复数可以表示为

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta}.$$

式中, $r = |z|$ 是复数的模, θ 为复数的幅角.

三、泰勒级数

1. 将一维函数 $f(x)$ 在 x_0 点展开成幂级数

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

成为 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数.

2. 考虑三维情况,假定 $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 是 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 的某一函数,在 $\mathbf{x}' = 0$ 点将 $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 展开成泰勒级数,有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= f(\mathbf{x}) + \frac{f'(\mathbf{x})}{1!}(-\mathbf{x}') + \frac{f''(\mathbf{x})}{2!}(-\mathbf{x}')(-\mathbf{x}') + \cdots \\ &= f(\mathbf{x}') - \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) + \cdots \\ &= f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}' \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{x}' \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}) + \cdots \end{aligned}$$

取 $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{1}{R}$, 有

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots$$

$R = |\mathbf{x}|$ 是坐标原点到场点的距离.

习题

1. 证明 6 页上第七中的各式。

2. 证明: $\delta(r) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$.