21世纪高职高专公共课教材

高等数学习题册

主编　邱　文　香永辉
主审　敖屹兰

华南理工大学出版社

21世纪高职高专公共课教材

高等数学习题册

主编　邱　文　香永辉
参编　潘立守　卢　春
主审　敖屹兰

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题册/邱文,香永辉主编.一广州：华南理工大学出版社，2007.7
（21世纪高职高专公共课教材）
ISBN 978-7-5623-2634-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①邱…②香… Ⅲ.高等数学-高等学校-习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第124404号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640）
营销部电话：020-87113487 87110964 87111048（传真）
E-mail：**scutc13@scut.edu.cn** **http://www.scutpress.com.cn**
责任编辑：欧立局
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：5 **字数**：101千
版 次：2007年7月第1版 2007年7月第1次印刷
印 数：1~3000册
定 价：13.00元

目　录

习题解答

习题 1.1

1. 观察下列数列有无极限，如有极限，请指出其极限值.

(1) $y_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$；　　　　(2) $y_n=1-\sin(n+1)$；

(3) $y_n=\dfrac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{2}\right)}{n}$；

(4) $y_n=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n+1} & (n\text{ 为奇数})；\\ (-1)^n & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$

解　(1) $y_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$，当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时，y_n 的各项依次为：

$$\frac{2}{5},\frac{4}{25},\frac{12}{125},\frac{60}{625},\frac{300}{15625},\cdots$$

因为当 $n\to\infty$ 时，y_n 无限趋近于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$$

(2) $y_n=1-\sin(n+1)$，当 n 无限增大时，$\sin(n+1)$ 在 -1，1 之间摆动，y_n 不能趋近于一个确定的常数，所以这个数列没有极限.

(3) $y_n=\dfrac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{2}\right)}{n}=\dfrac{\cos 2n}{n}$，当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时，y_n 的各项依次为：$\frac{\cos 2}{1},\frac{\cos 4}{2},\frac{\cos 6}{3},\frac{\cos 8}{4},\frac{\cos 10}{5},\cdots$因为当 $n\to\infty$ 时，y_n 无限趋近于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{2}\right)}{n}=0$$

$$(4)\ y_n=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n+1} & (n\ 为奇数)\\ (-1)^n & (n\ 为偶数)\end{cases}$$

①当 n 依次取 1,3,5,7,9,…等奇数时，y_n 的各项依次为

$$1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{4},1-\frac{1}{6},1-\frac{1}{8},1-\frac{1}{10},\cdots$$

所以当 n 为奇数且无限增大时，y_n 无限趋近于 1.

②当 n 依次取 2,4,6,8,10,…等偶数时，y_n 的各项均为 1.

综上所述，n 无论为奇数还是偶数，当其无限增大时，y_n 的极限均为 1，即

$$\lim_{n\to\infty}y_n=1$$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{2n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{1-2x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{(x+2)(x-1)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=3\times1-2=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{2n}\right)=5$

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|}\neq\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|}$

所以极限不存在.

$$(4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{1-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}-2}=-\frac{1}{2}$$

$$(5)\ \lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-1)=-1-1=-2$$

$$(6)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=2$$

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x<0)\\ x^2-2x & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

讨论 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限是否存在.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2-2x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \infty$$

所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限不存在.

习题 1.2

1. 指出下列函数哪些是无穷小量，哪些是无穷大量：

(1) $f(x)=100x^3\ (x\to 0)$；

(2) $f(x)=\dfrac{1-(-1)^x}{x}\ (x\to\infty)$；

(3) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$；

(4) $f(x)=3^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^-)$；

(5) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}\ (x\to 0)$；

(6) $f(x)=\log_a x\ (x\to 0^+)$.

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 0}100x^3=0$

所以 $f(x)=100x^3\ (x\to 0)$是无穷小量.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

即，当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小量.

而当 $x\to\infty$时，$1-(-1)^x$ 在 0,2 之间摆动，即，$1-(-1)^x$ 是有界函数.

根据无穷小量的性质，函数 $f(x)=\dfrac{1-(-1)^x}{x}\ (x\to\infty)$ 是无穷小量.

(3)因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$

所以 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$是无穷大量.

(4)因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}3^{\frac{1}{x}}=0$

所以 $f(x)=3^{\frac{1}{x}}\ (x\to0^-)$是无穷小量.

(5)因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=\infty$

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\infty$.

所以 $f(x)=\frac{x}{x^2}\ (x\to0)$是无穷大量.

(6)因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=\infty$

所以 $f(x)=\log_a x\ (x\to0^+)$是无穷大量.

2. 下列函数在自变量怎样变化时是无穷小？怎样变化时是无穷大？

(1)$y=\frac{3}{x^5}$; (2)$y=\tan x$;

(3)$y=10^{\frac{1}{x}}$; (4)$y=\frac{1}{2x+1}$.

解 (1)因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^5}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3}{x^5}=\infty$$

所以函数 $y=\frac{3}{x^5}$在 $x\to\infty$时,是无穷小;在 $x\to0$ 时,是无穷大.

(2)因为

$$\lim_{x\to k\pi}\tan x=0\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所以函数 $y=\tan x$ 在$x\to k\pi$时,是无穷小;在 $x\to k\pi+\frac{\pi}{2}$时,是无穷大.

(3)因为

$$\lim_{x\to0^-}10^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}10^{\frac{1}{x}}=\infty$$

所以函数 $y=10^{\frac{1}{x}}$在$x\to0^-$时,是无穷小;在 $x\to0^+$时,是无穷大.

(4)因为

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} = \infty$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{2x+1}$在 $x\to\infty$时,是无穷小;在 $x\to-\dfrac{1}{2}$时,是无穷大.

3. 下列无穷小量哪一个较高阶,哪一个是同阶或等价?

(1)当 $x\to 0$ 时,x^2-x^3 与 x^2-3x.

解 因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-x^3}{x^2-3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1-x)}{x-3} = 0$$

所以当 $x\to 0$ 时,x^2-x^3 是比 x^2-3x 高阶的无穷小.

(2)当 $x\to 4$ 时,$x^2-7x+12$ 与 x^2-5x+4.

解 因为

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x-3}{x-1} = \frac{1}{3}$$

所以当 $x\to 4$ 时,$x^2-7x+12$ 是 x^2-5x+4 的同阶无穷小.

4. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x \to 2}(x^2-4)\cos\dfrac{1}{x-2}$;　　(2)$\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}\operatorname{arccot}x$;

(3)$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x+2}{x-2}$;　　(4)$\lim\limits_{x \to \infty}(3x^2-x+1)$.

解 (1)因为$\lim\limits_{x \to 2}(x^2-4)=0$ 且$\left|\cos\dfrac{1}{x-2}\right|\leqslant 1$,即有界,所以

$$\lim_{x \to 2}(x^2-4)\cos\frac{1}{x-2}=0$$

(2)因为$\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}=0$ 且 $0\leqslant \operatorname{arccot}x\leqslant\pi$ 即有界,所以

$$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}\operatorname{arccot}x=0$$

(3)因为$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=0$

所以$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x+2}{x-2}=\infty$

(4)因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-x+1)=\infty$

习题 1.3

1. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to1}(3x^2+2x-1)$;

(2)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x+5}$;

(3)$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+5}{x+1}$;

(4)$\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$;

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^3}}{2+5x}$;

(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-5}{(x+1)^2}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to1}(3x^2+2x-1)=3\times1^2+2\times1-1=4$

(2)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x+5}=\dfrac{2^2-1}{2+5}=\dfrac{3}{7}$

(3)因为$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{2x^2+3x+5}=0$

所以$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+5}{x+1}=\infty$

(4)$\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6$

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^3}}{2+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+2}}{\frac{2}{x}+5}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$

(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-5}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-5}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\infty$

2. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan5x}{2x}$;

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{2x}$;

(3)$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$;

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{\cos 5x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{5}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{1}{2x}}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[-\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)}\right]=-1$

(注：$(\pi-x)\to 0$)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{2x}=\lim\limits_{4x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{-3x\to 0}\left\{\left[1+(-3x)\right]^{-\frac{1}{3x}}\right\}^{\left(-\frac{3}{2}\right)}=e^{-\frac{3}{2}}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{x^2}=\dfrac{\lim\limits_{\frac{x^2}{2}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right]^2}{\lim\limits_{\frac{x^2}{-3}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x^2}{3}}\right)^{-\frac{x^2}{3}}\right]^{-3}}=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5$

3. 用等价无穷小替代求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)\cdot\arcsin x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x^2(e^{5x}-1)}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)\cdot\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+\cos x)\cdot x^2}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x^2(e^{5x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x(1-\cos 2x)}{x^2(e^{5x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot\frac{(2x)^2}{2}}{x^2\cdot 5x}=\frac{4}{5}$

习题 1.4

1. 用函数连续的定义证明 $y=x^2-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证明 在$(-\infty,+\infty)$内任取一点x_0.显然,函数$y=x^2-1$在x_0的任一个邻域内都有定义.

设自变量在点$x=x_0$处有增量Δx,则函数相应的增量为:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = [(x_0+\Delta x)^2-1]-[x_0^2-1] \\ &= 2x_0\Delta x+\Delta x^2\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x+\Delta x^2) = 0$$

所以根据定义1.9(2)可知函数$y=x^2-1$在点$x=x_0$处是连续的.

而x_0是$(-\infty,+\infty)$内任取的一点,故$y=x^2-1$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

2. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & (x>5)\\ 2x & (x\leqslant 5)\end{cases}$$

在点$x=5$的连续性.

解 因为$f(5)=2\times 5=10$,而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^+}f(x) &= \lim_{x\to 5^+}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5^+}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}\\ &= \lim_{x\to 5^+}(x+5) = 10\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 5^-}f(x) = \lim_{x\to 5^-}2x = 10$$

即 $\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 5}f(x)=f(5)=10$

所以函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & (x>5)\\ 2x & (x\leqslant 5)\end{cases}$在点$x=5$处连续.

3. 求函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$的连续区间.

解 因为初等函数在其定义区间内是连续的,所以函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$的连续区间即为其定义区间.

当$\begin{cases}4-x\geqslant 0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}$时,函数$f(x)$有意义.解得$x\in(1,2)\cup(2,4]$.

故函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$的连续区间为$(1,2)\cup(2,4]$.

4. 判断方程 $x^4-5x^2+1=0$ 在区间$(0,2)$内是否有实根?

解 设 $f(x)=x^4-5x^2+1$. 它在闭区间$[0,2]$上是连续的,并且在区间端点的函数值 $f(0)=1, f(2)=-3$,则 $f(0)\cdot f(2)<0$. 根据定理 1.10 可知,在$(0,2)$内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$,即

$$\xi^4-5\xi^2+1=0 \quad (0<\xi<2)$$

这表明方程 $x^4-5x^2+1=0$ 在区间$(0,2)$内至少有一个实根.

习题 2.1

1. 一物体的运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}t^2-t$,求:

(1)物体在 $t=3$ 秒到 $3+\Delta t$ 秒的平均速度.

(2)物体在 $t=3$ 秒时的瞬时速度.

解 (1)物体在 $t=3$ 秒到 $3+\Delta t$ 秒的平均速度为:

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\left[\frac{1}{2}(3+\Delta t)^2-(3+\Delta t)\right]-\left[\frac{1}{2}\times 3^2-3\right]}{\Delta t}$$

$$=2+\frac{1}{2}\Delta t$$

(2)物体在 $t=3$ 秒时的瞬时速度为:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(2+\frac{1}{2}\Delta t\right)=2$$

2. 根据导数的定义求下列函数的导数.

(1)$y=\sqrt{x}$; (2)$y=x^{-2}$;

(3)$y=x^3-x$; (4)$y=\ln x$.

解 (1)因为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$

$$=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

所以 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(2)因为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^{-2}-x^{-2}$

$$=-\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{[x(x+\Delta x)]^2}$$

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\dfrac{2x+\Delta x}{[x(x+\Delta x)]^2}=-\dfrac{2}{x^3}$

(3)因为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)]-[x^3-x]$

$=(3x^2+3x\cdot\Delta x+\Delta x^2-1)\Delta x$

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\cdot\Delta x+\Delta x^2-1)=3x^2-1$

(4)因为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$

$=\dfrac{\Delta x}{x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

$=\dfrac{1}{x}\ln\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\ln e=\dfrac{1}{x}$

3. 证明:$(\cos x)'=-\sin x$.

证明 设 $f(x)=\cos x$,则函数 $f(x)$的增量

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\cos(x+\Delta x)-\cos x$

$=-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-2\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=-\sin x$

即 $$(\cos x)'=-\sin x$$

4. 求曲线 $y=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 的切线的斜率.

解 因为$(\sin x)'=\cos x$

得在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的切线的斜率:

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 的切线的斜率:

$$y''\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. 求曲线 $y=\ln x$ 在点 $x=1$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,得 $y'\Big|_{x=1}=1$.

当 $x=1$ 时,$y=0$.

代入切线方程和法线方程得:

切线方程:

$$y-0=1(x-1) \qquad 即 \qquad x-y-1=0$$

法线方程:

$$y-0=-1(x-1) \qquad 即 \qquad x+y-1=0$$

6. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<0); \\ \ln(1+x) & (x\geqslant 0) \end{cases}$$

在点 $x=0$ 的连续性和可导性.

解 (1)连续性.因为

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0^-}[f(0+\Delta x)-f(0)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}[\Delta x-\ln(1+0)]=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0^+}[f(0+\Delta x)-f(0)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}[\ln(1+\Delta x)-\ln(1+0)]=0$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=0$,即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

由连续定义 1.9(2)可知

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<0) \\ \ln(1+x) & (x\geqslant 0) \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处是连续的.

(2)可导性.因为

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x-\ln(1+0)}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)-\ln(1+0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln e = 1$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

所以函数

$$f(x) = \begin{cases} x & (x<0); \\ \ln(1+x) & (x \geqslant 0) \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处可导.

7. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \geqslant 0); \\ x & (x<0) \end{cases}$$

在点 $x=0$ 可导.

证明 当 $\Delta x > 0$ 时，

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = \sin\Delta x - \sin 0 = \sin\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$$

当 $\Delta x < 0$ 时，

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = \Delta x - \sin 0 = \Delta x$$

所以

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$，故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

即函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \geqslant 0); \\ x & (x<0) \end{cases}$$

在点 $x=0$ 可导.

习题 2.2

1. 求下列函数的导数：

(1) $y = 5x^3 - 4x^2 + x + \sqrt{2}$；

(2) $y = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x^3}$；

(3) $y = (\sqrt{x} - 1)(\sin x - \tan x)$；

(4) $y = x^2 \sin x$；