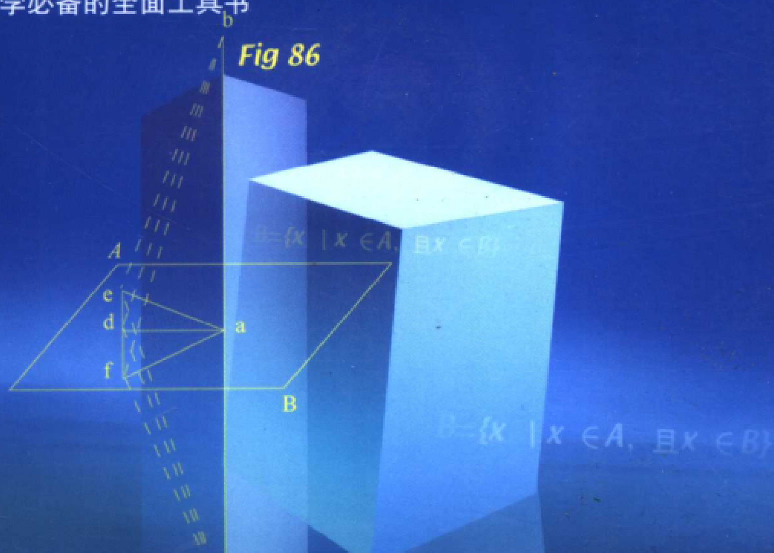
BSK高考命题研究组

超级数学专题题典

圆锥曲线

□ 紧扣大纲 关注高考

□ 学习数学必备的全面工具书



世界图书出版公司

封面设计：张艳美 杨恩国

超级数学专题题典

01 函数
02 不等式
03 数列
04 简单几何体
05 直线和圆的方程
06 圆锥曲线
07 直线和平面
08 三角函数
09 排列组合与概率
10 向量
11 复数
12 导数与极限

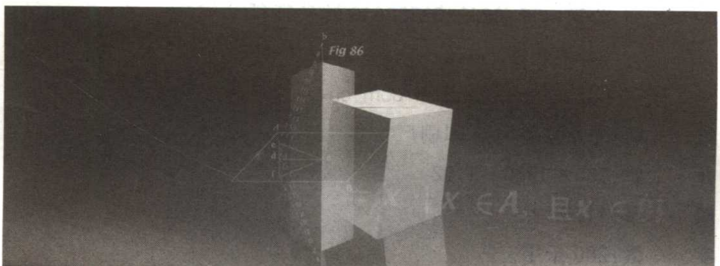
ISBN 978-7-5062-5701-5

9 787506 257015 >

WS/5701 定价：12.00元

BSK 高考命题研究组

超级
数学专题题典
圆锥曲线



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——圆锥曲线/BSK 高考命题研究组编著.
—上海:上海世界图书出版公司,2007.2

ISBN 978-7-5062-5701-5

Ⅰ.超... Ⅱ.B... Ⅲ.圆锥曲线—高中—习题—升学参考资料
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 153798 号

超级数学专题题典——圆锥曲线

BSK 高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司
上海市尚文路 185 号 B 楼　　邮政编码 200010
公司电话:021－63783016 转发行科
(各地新华书店经销)
http://www.wpcsh.com.cn

印　　刷:北京京都六环印刷厂
开　　本:880×1230　1/32
印　　张:11.5
字　　数:200 千字
版　　次:2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5062-5701-5/ G・81
定　　价:12.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系
(质检科电话:010－84498871)

前　言

参考书和教材不同，它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学，大部分都看过至少一本参考书，有个别的，甚至看完了市面上所有的参考书，这是为什么呢？

教材都是自成体系，为了配合大纲和课堂教学，其中很多内容讲述得恰到好处，可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科，必须具备三点：首先是清晰的知识框架，其次是翔实的知识内容，再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点，从理论上讲，反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的，只是需要花费较长的时间去领悟。不过，实际情况往往是限于课时进度，同学们用于学习单一科目的时间本就有限，花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥，有没有什么捷径可以走呢？答案是没有。虽然没有捷径，但却有另外一条路可供选择，这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题，透过现象看本质；或是补充个别知识点，完善整个知识框架；或是通过纵横向比较，揭示出本来就存在，但教科书却未明示的一些规律；或是汇总前人的经验，揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《BSK 高中数学专题》正是本着这样的初衷编写的，一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点：

(1)知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出，全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲，帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系，使学习、记忆和运用有序化。第二部分"高屋建瓴"，帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时，突破难点、提高思维。在力求提高的同时，把握尺度，不出偏题、怪题，使之虽然难度加大，但是并不偏离高考方向。

(2)题目搭配合理有序

习题配备由易到难，层层延伸。基础练习题，能力练习题，历届高考题，精选星级题，3 大部分 6 小块，覆盖高中低档各类题型，层层递进，级级延伸，为复习、备考提供丰富的资料储备；题目讲解不拘一解，详尽规范，引导读者去探究"一题多解"、"多题一解"、"一题多变"和"万变归一"的思路与学习方法，使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

(3)框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图，为读者学习和探索提供参考路标。

(4)成书符合使用习惯

全书采用“知识点讲解”——“对应例题”——“另一个知识点讲解”——“对应例题”的编排模式，更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了“考频”概念，借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容，甚至这一类问题的掌握程度，以寻找更合适的复习之道，从而达到优质、有效的复习效果。

(5)自成体系一书多用

本套书完全基于教材，但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点，只要是涉及某专题的，基本上都收录进书，并分别成册；不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排，而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容，而且还脱离了教材变动的局限性，使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学，可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充；对于正在紧张复习，即将投入的高考的同学，使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场；而对于高中教育的研究者，本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限，疏漏之处在所难免，敬请不吝指正。

BSK 高考命题研究组

2006 年 9 月

目　录

第一篇　知识篇

本专题知识结构图

圆锥曲线方程	椭圆	椭圆的定义、几何性质和标准方程
		直线与椭圆的位置关系及判定
	双曲线	双曲线的定义、几何性质和标准方程
		直线和双曲线的位置关系及判定
	抛物线	抛物线的定义、几何性质和标准方程
		直线与抛物线的位置关系及判定
	圆锥曲线综述	坐标平移和平移变换
		坐标平移和圆锥曲线的一般理论
		微积分思想在圆锥曲线中的应用
	圆锥曲线的应用	圆锥曲线的理论应用
		圆锥曲线方程应用题

陈省身前辈生前曾多次警示我们，学习数学，决不能得“意”忘“形”. 强调在数字化几何问题的过程中，一定要注意到内在的几何关系和几何背景.

但从另一个角度说，我们在处理几何问题时，也要学会通过对其数字化，来找到图形和图形之间的联系及背后隐藏的一般规律，从而从更高的层面来理解几何图形本身.

做到形中有数、数中有形、数形结合. 只有这样才能更好的了解几何，也只有这样才能更好的解决几何问题.

笔者建议大家，在遇到圆锥曲线题目时，尝试自己去寻找题目背后所隐含的几何背景，为自己更好的理解圆锥曲线打好基础.

第一章 椭圆

本章知识结构图

<table>
<tr><td rowspan="11">椭圆</td><td rowspan="5">椭圆的定义、几何性质和标准方程</td><td>椭圆的定义
① 普通定义：对 $\forall F_1、F_2,a\in\mathbf{R}$，如果 $2a>|F_1F_2|$，$|MF_1|+|MF_2|=2a$ 等价于点 M 在椭圆上
② 第二定义：$\forall F,l,e\in\mathbf{R}$，且 $F\notin l$，$0<e<1$，d 为动点 M 到直线 l 的距离，$\frac{|MF|}{d}=e$ 等价于点 M 在椭圆上</td></tr>
<tr><td>椭圆定义的延伸</td></tr>
<tr><td>椭圆的标准方程
焦点在 x 轴上：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$
焦点在 y 轴上：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td>椭圆的参数方程
椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\alpha,\\y=b\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，α 被称为离心角），长轴在 y 轴的情况可采用类似方法</td></tr>
<tr><td>椭圆焦三角形的面积公式
椭圆上点和焦点构成的的三角形的面积为 $b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">椭圆和直线的位置关系</td><td>直线和椭圆的位置关系</td></tr>
<tr><td>椭圆的切线
① 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上 $P(x_0,y_0)$ 点的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$
② 直线 $Ax+By+C=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的条件为 $A^2a^2+B^2b^2=C^2$
③ 过椭圆外一点 $P(x_0,y_0)$ 引椭圆的两条切线，切点分别为 P_1,P_2，则切点弦方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td>直线和椭圆形成的弦长问题</td></tr>
<tr><td>椭圆的中点弦问题</td></tr>
<tr><td>椭圆的共轭直径</td></tr>
</table>

第一节　椭圆的定义、几何性质与标准方程

高考考点和趋势分析

椭圆可说是圆锥曲线中最重要的内容之一，是高考命题的热点之一，考查椭圆的定义、几何性质、标准方程以及借助椭圆的形式考查把几何条件转化为代数形式的变形能力，定值、最值也可能涉及，但计算能力的要求相比起来有所降低.

目标 1：掌握椭圆的定义和标准方程；

目标 2：掌握椭圆的简单几何性质.

知识点讲解与应用

1. 椭圆的定义

1.1 普通定义（也称第一定义或常用定义）（考频 6 次，其中，选择题 3 次，填空题 3 次，解答或证明题 0 次）

(1) 常用语言描述

平面内到两定点 F_1、F_2 的距离之和等于定长的点的轨迹叫做椭圆. 两定点 F_1、F_2 叫做椭圆的焦点. 两焦点间的距离叫做焦距. 线段 F_1F_2 的中点 O 叫做椭圆的中心. 椭圆中心与一个焦点的距离叫做半焦距，一般记作“c”.

(2) 符号语言描述

$\forall F_1$、F_2，$a \in \mathbf{R}$，且 $2a > |F_1F_2|$，如果 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$，那么点 M 的轨迹是椭圆.

1.2 圆锥曲线统一定义（第二定义）（考频 19 次，其中，选择题 7 次，填空题 5 次，解答或证明题 7 次）

(1) 常用语言描述

平面内到定点 F 与定直线 l 的距离之比等于定值 e 的点的轨迹. 其中定点 F 称为焦点，定直线 l 称为准线，定值 e 称为离心率. 当 $0 < e < 1$ 时，动点轨迹为椭圆.

(2) 符号语言描述

$\forall F$，l，$e \in \mathbf{R}$，且 $F \notin l$，$0 < e < 1$，d 为动点 M 到直线 l 的距离，如果 $\dfrac{|MF|}{d} = e$，那么点 M 在椭圆上.

2. 椭圆定义的延伸（考频 5 次，其中，选择题 2 次，填空题 2 次，解答或证明题 1 次）

已知平面内一点 M 与两个定点 F_1，F_2 的距离的和是常数 $2a$，

若 $2a > |F_1F_2|$，则 M 点的轨迹为椭圆.

若 $2a = |F_1F_2|$，则 M 点的轨迹为以焦点 F_1，F_2 为端点的线段.

若 $2a<|F_1F_2|$，则 M 点无轨迹.

3. **椭圆的标准方程(考频 30 次，其中，选择题 17 次，填空题 4 次，解答或证明题 9 次)**

焦点在 x 轴上：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$；

焦点在 y 轴上：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

4. **椭圆的几何性质**

4.1 **椭圆的顶点(考频 15 次，其中，选择题 9 次，填空题 4 次，解答或证明题 2 次)**

过 F_1F_2 的直线与椭圆的两个交点 A_1 和 A_2 叫做椭圆的长轴顶点. 过椭圆的中心 O 且垂直于 F_1F_2 的直线(即线段 F_1F_2 的中垂线)与椭圆的两个交点 B_1 和 B_2 叫做椭圆的短轴顶点. 椭圆的长轴顶点和短轴顶点合称椭圆的顶点.

4.2 **椭圆的长轴和半长轴(考频 14 次，其中，选择题 6 次，填空题 1 次，解答或证明题 7 次)**

连结椭圆的两个长轴顶点之间的线段叫做椭圆的长轴；连结椭圆的一个长轴顶点和椭圆的中心之间的线段叫做椭圆的半长轴，半长轴的长度一般记作"a"，椭圆有两个半长轴.

4.3 **椭圆的短轴和半短轴(考频 3 次，其中，选择题 1 次，填空题 1 次，解答或证明题 1 次)**

连结椭圆的两个短轴顶点之间的线段叫做椭圆的短轴；连结椭圆的一个短轴顶点和椭圆的中心之间的线段叫做椭圆的半短轴，半短轴的长度一般记作"b"，椭圆有两个半短轴.

4.4 **椭圆的离心率(考频 7 次，其中，选择题 3 次，填空题 0 次，解答或证明题 4 次)**

椭圆的焦距与长轴长度的比值，叫做椭圆的离心率，通常记作"e"，$e=\frac{c}{a}$. 对于椭圆来说，有 $0<e<1$. 离心率是表示椭圆扁圆程度的参数，离心率越接近于 0，椭圆形状越接近于圆；离心率越接近于 1，椭圆形状越扁. 可以将圆看作离心率为 0 的椭圆.

4.5 **椭圆的弦(考频 18 次，其中，选择题 13 次，填空题 3 次，解答或证明题 2 次)**

连结椭圆上任意两点的线段叫做椭圆的弦.

4.6 **椭圆的焦半径(考频 3 次，其中，选择题 1 次，填空题 1 次，解答或证明题 1 次)**

椭圆上一点与焦点连结的线段称为椭圆的焦半径. 与左焦点连结的线段叫做左焦半径；与右焦点连结的线段叫做右焦半径.

4.7 **椭圆的焦准距(考频 4 次，其中，选择题 1 次，填空题 2 次，解答或证明题 1 次)**

椭圆的一个焦点到相对应的准线之间的距离叫做焦准距，也称为焦参数，一般记作"p"，$p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}(a>b>0,c>0,c^2=a^2+b^2)$.

4.8 **椭圆的通径(考频 3 次，其中，选择题 3 次，填空题 0 次，解答或证明题 0 次)**

若椭圆的弦交椭圆的长轴于椭圆的焦点，且垂直于椭圆的长轴，这样的弦称为椭圆的通径，一般记作"h"，$h=\frac{2b^2}{a}(a>b>0)$.

4.9 **椭圆的域(考频 4 次,其中,选择题 2 次,填空题 1 次,解答或证明题 1 次)**

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$上的点和其内部的点的坐标$(x,y)$都满足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$,这个范围也叫做椭圆的域.

4.10 **椭圆的准线(考频 6 次,其中,选择题 4 次,填空题 1 次,解答或证明题 1 次)**

存在一条直线和椭圆共面,椭圆上任一点到椭圆的一个焦点之间的距离与到这条直线的距离之比等于椭圆的离心率 e,则称这条直线为椭圆的准线. 每个椭圆都有两条准线,它们都垂直于椭圆的长轴,分布于椭圆两侧,且距椭圆中心的距离均为$\frac{a^2}{c}$. 此平面上,到焦点的距离与到准线的距离之比为离心率 e 的所有点均在椭圆上. 因此也可把椭圆定义为,平面上到一个定点的距离和到一条定直线的距离之比是一个小于 1 的常数的点的轨迹,这个定点就是椭圆的一个焦点,这条定直线就是对应于这个焦点的一条准线,这个小于 1 的常数就是椭圆的离心率.

4.11 **椭圆的对称性(考频 5 次,其中,选择题 4 次,填空题 1 次,解答或证明题 0 次)**

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$关于 x 轴和 y 轴对称,因此也关于原点(椭圆中心)对称,x 轴和 y 轴被称为椭圆的对称轴,原点被称为椭圆的对称中心.

5. **椭圆的参数方程(考频 4 次,其中,选择题 3 次,填空题 1 次,解答或证明题 0 次)**

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\alpha,\\ y=b\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数,α 被称为离心角),长轴在 y 轴的情况可采用类似方法.

例1 设 P 为椭圆上一点,F_1,F_2 是该椭圆的两个焦点,且 $\angle PF_1F_2=2\alpha$,$\angle PF_2F_1=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$,那么这个椭圆的离心率为________.

A. $1-\cos 2\alpha$　　B. $1-\sin\alpha$　　C. $2\cos\alpha-1$　　D. $1-2\sin\alpha$

分析 根据椭圆的基本概念,P 到 F_1、F_2 两点距离之和为 $2a$,而由正弦定理,PF_1、PF_2 可由 $2c$ 和 α 的关系式表达,然后可得到 a,c 的关系式,从而解出 e.

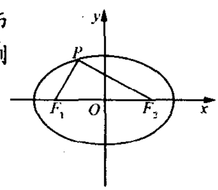


图 1-1-1

解答 选 C,如图 1-1-1,设椭圆长轴长为 $2a$,焦距为 $2c$,

则 $|F_1F_2|=2c$,$|PF_1|+|PF_2|=2a$,$e=\frac{c}{a}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由正弦定理可得,

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}.$$

$$\therefore \frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\angle F_2PF_1+\sin\angle F_1PF_2},\text{即}\frac{2c}{\sin 3\alpha}=\frac{2a}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}.$$

$$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{3-4\sin^2\alpha}{1+2\cos\alpha}=\frac{4\cos^2\alpha-1}{1+2\cos\alpha}=2\cos\alpha-1.$$

点评 本题考查三角形知识和椭圆的定义.

例2 试证:椭圆长轴的两个端点,是椭圆上到一个焦点距离最近或最远的点.

分析 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点坐标为$F(c,0)$，$P(x_0,y_0)$为椭圆上一点，那么上述问题就是求最大值与最小值问题.

证法1 $\because P(x_0,y_0)$在椭圆上，$\therefore \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$y_0^2=b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})$.

$$\therefore |PF|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-c)^2+(a^2-c^2)(1-\frac{x_0^2}{a^2})}$$

$$=\sqrt{x_0^2+c^2-2cx_0+a^2-c^2-x_0^2+(\frac{c}{a}x_0)^2}=\sqrt{a^2-2cx_0+(\frac{c}{a}x_0)^2}$$

$$=\sqrt{(a-\frac{c}{a}x_0)^2}=|a-\frac{c}{a}x_0|.$$

$\because x_0^2\leqslant a^2$，$\therefore -a\leqslant x_0\leqslant a$.

故当$x_0=a$时，$|PF|=a-c$为最小值，这时$y_0=0$.

$\therefore P(x_0,y_0)$为长轴的一个端点$(a,0)$时，为最小值；

当$P(x_0,y_0)$为长轴的另一个端点$(-a,0)$时，为最大值. 综上可知，命题正确.

证法2 由椭圆的第二定义，$P(x_0,y_0)$到焦点$F(c,0)$的距离与它到相应准线$x=\frac{a^2}{c}$的距离之比为常数$e=\frac{c}{a}$，即$\frac{|PF|}{|\frac{a^2}{c}-x_0|}=e$.

$\therefore |PF|=e|\frac{a^2}{c}-x_0|$，即$|PF|=|a-\frac{c}{a}x_0|$，以下讨论同证法1.

证法3 设$P(x_0,y_0)$为椭圆$\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数）上任一点，则

$$|PF|=\sqrt{(a\cos\varphi-c)^2+(b\sin\varphi)^2}$$
$$=\sqrt{a^2\cos^2\varphi-2ac\cos\varphi+c^2+(a^2-c^2)\sin^2\varphi}$$
$$=\sqrt{a^2-2ac\cos\varphi+c^2\cos^2\varphi}$$
$$=\sqrt{(a-c\cos\varphi)^2}=|a-c\cos\varphi|,$$

当$\varphi=0$时，$|PF|=a-c$为最小值；当$\varphi=\pi$时，$|PF|=a+c$为最大值.

此时，$P(x_0,y_0)$恰好是椭圆长轴的两个端点.

点评 上述方法中，第一种方法最容易想到，但是也比较繁琐，第二种方法借助第二定义，和图象联系起来，将点之间的距离转换成点到直线的距离，技高一筹.

例3 如图1-1-2，已知椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右准线l与x轴相交于点E，过椭圆右焦点F的直线与椭圆相交于A，B两点，点C在右准线l上，且$BC\parallel x$轴. 求证：直线AC经过线段EF的中点.

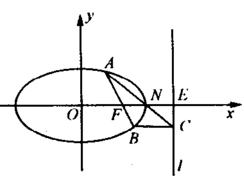


图1-1-2

分析 设出直线l的方程，则A、B坐标容易用直线斜率表示出来，C坐标也可用直线斜率表示，直线AC同理，所以与x轴

交点可求，然后证明其为 EF 的中点，这是显而易见的.

证法1 依题设可得椭圆的半焦距 $c=1$，右焦点为 $F(1,0)$，右准线方程为 $x=2$，点 E 的坐标为 $(2,0)$，EF 的中点为 $N(\frac{3}{2},0)$.

若 AB 垂直于 x 轴，则 $A(1,y_1)$，$B(1,-y_1)$，$C(2,-y_1)$，

$\therefore AC$ 中点为 $N(\frac{3}{2},0)$，即 AC 过 EF 中点 N.

若 AB 不垂直于 x 轴，由直线 AB 过点 F，且由 $BC \parallel x$ 轴知点 B 不在 x 轴上，故直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$k\neq 0$.

记 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，则 $C(2,y_2)$，x_1，x_2 满足二次方程 $\frac{x^2}{2}+k^2(x-1)^2=0$，

即 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$，$\therefore x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$，

又 $x_1^2=2-2y_1^2<2$，得 $x_1-\frac{3}{2}\neq 0$，故直线 AN，CN 的斜率分别为

$$k_1=\frac{y_1}{x_1-\frac{3}{2}}=\frac{2k(x_1-1)}{2x_1-3},\ k_2=\frac{y_2}{x_2-\frac{3}{2}}=2k(x_2-1).$$

$$\therefore k_1-k_2=2k\cdot\frac{(x_1-1)-(x_2-1)(2x_1-3)}{2x_1-3},$$

$\because (x_1-1)-(x_2-1)(2x_1-3)$

$$=3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4=\frac{1}{1+2k^2}[12k^2-4(k^2-1)-4(1+2k^2)]=0$$

$\therefore k_1-k_2=0$ 即 $k_1=k_2$，故 A,C,N 三点共线.

所以，直线 AC 经过线段 EF 的中点 N.

证法2 如图1-1-3，记直线 AC 与 x 轴的交点为 N，过 A 作 $AD\perp l$，D 是垂足. 因为 F 是椭圆的右焦点，l 是右准线，$BC\parallel x$ 轴，即 $BC\perp l$，根据椭圆的几何性质，

得 $\frac{|AF|}{|AD|}=\frac{|BF|}{|BC|}=e$（$e$ 是椭圆的离心率）.

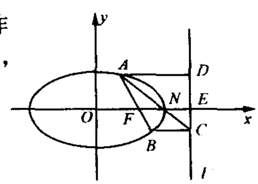


图 1-1-3

$\because AD\parallel FE\parallel BC$，

$$\therefore \frac{|EN|}{|AD|}=\frac{|CN|}{|CA|}=\frac{|BF|}{|AB|},\ \frac{|FN|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|}.$$

即得 $|EN|=\frac{|AD|\cdot|BF|}{|AB|}=e\cdot\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AB|}=\frac{|AF|\cdot|BC|}{|AB|}=|FN|$，

$\therefore N$ 为 EF 的中点，即直线 AC 经过线段 EF 的中点 N.

点评 本题采用同一法，分别求出中点和 N 点的坐标，再求证它们为同一个点. 这种方法对于证明一个点或者一个变量有什么特殊的位置关系等问题很有效.

例4 已知 A 点坐标 $(2,-\frac{12}{5})$，F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左焦点，点 P 是椭圆上的动点，求 $|PA|+|PF_1|$ 的最大值和最小值及相应的 P 点坐标.

分析 如图 1-1-4 所示，设右焦点为 F_2，由椭圆的定义可知 $|PF_1|=2a-|PF_2|$，所以可将 $|PA|+|PF_1|$ 转化为 $|PA|+2a-|PF_2|$，即 P 点到 A 点和 F_1 点的距离之差，利用数形结合处理较容易.

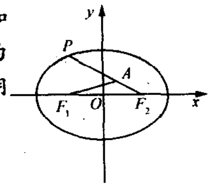


图 1-1-4

解答 当 $|PA|-|PF_2|=|AF_2|$ 时，$|PA|+|PF_1|$ 最大.

最大值为 $2a+|AF_2|$，此时，P 点是射线 AF_2 与椭圆的交点；

当 $|PA|-|PF_2|=-|AF_2|$ 时，$|PA|+|PF_1|$ 最小，

最小值为 $2a-|AF_2|$，此时，P 点是射线 F_2A 与椭圆的交点.

考虑 $A(2,-\frac{12}{5})$，$F_2(3,0)$. 直线 AF_2 的方程是 $3x-5y-9=0$.

由 $\begin{cases}12x-5y-36=0,\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$ 有 $5x^2-27x+28=0$，解得 $\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=\frac{12}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{7}{5},\\ y_2=-\frac{96}{25}.\end{cases}$

注意到 $x_1>3>2$，$x_2<2<3$，故使 $|PA|+|PF_1|$ 取最大值的点是 $P_1(4,\frac{12}{5})$，最大值为 $2a+|AF_2|=10+\frac{13}{5}=\frac{63}{5}$；使 $|PA|+|PF_1|$ 取最小值的点是 $P_2(\frac{7}{5},-\frac{96}{25})$，最小值为 $2a-|AF_2|=10-\frac{13}{5}=\frac{37}{5}$.

点评 借助椭圆的第一定义，将距离之和转化成距离之差，然后借用数形结合当三点共线的时候取得最值，即可省去大量的计算.

例5 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 内有一点 $P(1,1)$，F 是椭圆右焦点，M 为椭圆上一动点，求 $|MP|+\sqrt{2}|MF|$ 的最小值.

分析 注意到椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，F 又是椭圆的一个焦点，则可转化为椭圆上点到直线的距离的问题，结合图象易解.

解答 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 中 $a=2,b=\sqrt{2},c=\sqrt{2},e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右准线，过 $P(1,1)$ 作 l 的垂线，垂足记为 N，

准线方程 l 应为 $x=\frac{a^2}{c}=2\sqrt{2}$，因此 $N(2\sqrt{2},1)$，$|PN|=2\sqrt{2}-1$，

过 M 作 l 的垂线，垂足记为 Q，此时 $e=\frac{|MF|}{|MQ|}$，$|MQ|=\sqrt{2}|MF|$，

$\because |MP|+\sqrt{2}|MF|=|MP|+|MQ|\geqslant|PQ|\geqslant|PN|$，

$\therefore$ 有 $|MP|_{\min}=|PN|=2\sqrt{2}-1$.

点评 本题考查椭圆的第二定义和数形结合的方法.

例6 已知：椭圆中心在坐标原点，横纵轴平行于坐标轴. 点 $P(1,2)$ 为椭圆上一点，且与