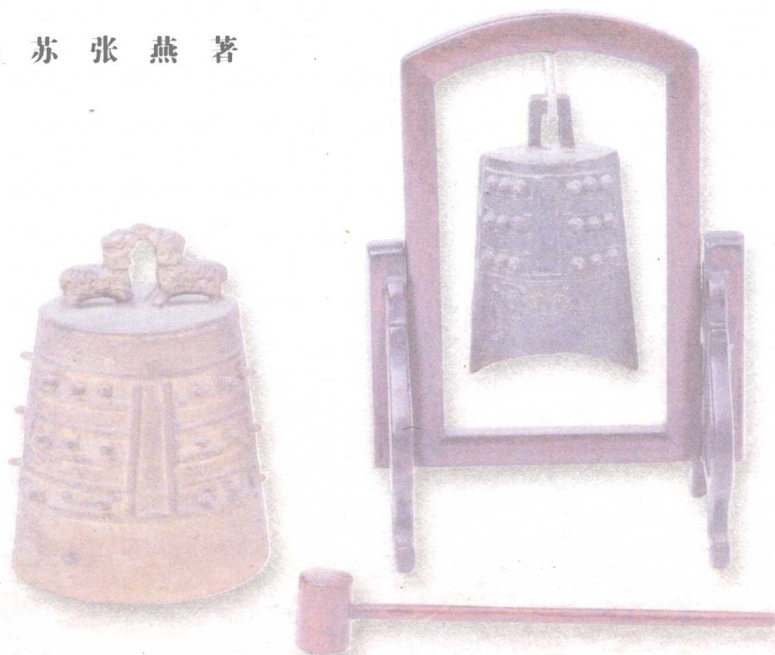


智苑文丛 第2辑 冯云 夏风 主编

张 苏 张 燕 著



律学 算解新论

大众文艺出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

律学算解新论 / 张燕 张苏著. —北京: 大众文艺出版社, 2006. 11

(智苑文丛第2辑 / 冯云, 夏风主编)

ISBN 7-80171-903-4

I. 律... II. ①张... ②张... III. 律学—研究

IV. J612

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 127911 号

律学算解新论

大众文艺出版社出版发行

(北京市东城区交道口菊花胡同7号 邮编: 100009)

北岳印务有限责任公司印刷 新华书店经销

开本: 850 × 1168 毫米 1 / 32 印张: 3.75

字数: 210 千字

2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 册

ISBN 7-80171-903-4

定价: 98.00 元 (全四册)

版权所有, 翻版必究

大众文艺出版社发行 电话: 84040746

引 言

所谓“律学”是指关于律音与律制的系统研究。律学描述律音与律制的声学性质与美学性质,阐述律音的生成法则,揭示律制的基本特征。律学立足于音乐声学^注而涉足于音乐美学。可知,律学即音乐声学与音乐美学的交集。律学试图为未来的作曲家、未来的演唱家、未来的演奏家,以及为业余的准作曲家、准演唱家、准演奏家解读音乐提供一个美学与声学的基础。

律学作为一种学术研究对象既古老又年轻。我们说律学“古老”,是说律学早在两千六百五十年前管子创用“三分律”时就产生了。继之,早在两千五百年前,《考工记》便记述了古人对律学的声学属性所作的探索。例如,古人发现,“薄厚之所震动,清浊之所由出。…钟大而短,则其声疾而短闻;钟小而长,则其声舒而远闻。”并且,早在两千一百年前,司马迁《史记》又记述了古人对律学的美学属性所作的探索。例如,古人认为“闻宫音使人温舒而广大,闻商音使人方正而好义,闻角音使人恻隐而爱人,闻徵音使人乐善而好施舍,闻羽音使人整齐而好礼。”可知,早在两千多年前,我国不仅创用了律学的生律法则,并且还探索了律学的声学属性与美学属性。

我们说律学“年轻”,是说律学作为一门系统知识,则在1950年才由缪

【注】:这里,所谓“音乐声学”是指关于决定音高的振动频率,决定音程的振动频率比,决定音响的振动幅宽,决定音色的振动波形等等的研究。所谓“音乐美学”是指关于音乐之感情色彩、音乐之陶冶功能、音乐之欣赏标准的研究。

天瑞先生以其所著《律学》一书所确立。

由此可知,律学是一门演进漫长的学科,从而可知,律学汇集了各代人的智慧和成就。

本书——《律学算解新论》将承袭缪天瑞先生所确立的律学基本框架。本书的侧重点,如本书书名所示,在于“算解”。本书对算解范例通常先自推算解公式,再按自推算解公式自编算解程序,从而大大简化了律学的算解过程。

本书作者期待本书能引领音乐专业的学子们较轻松地登入律学殿堂。

张 燕 张 苏

2006 年 11 月 23 日

目 录

引言	(1)
----------	-----

声律编

常见古今律制的亲缘关系	(1)
以管氏三分法从黄钟生律永回不到黄钟之证明	(14)
管氏三分法律名与毕氏五度法音名两者之间的对应关系	(20)
管氏三分法与毕氏五度法等价论断验证:寻同索异	(22)
“上生”与“下生”:无疑之疑——兼与陈应时先生商榷	(26)
朱熹“四折取中”定徽法	(29)
计算音分的便捷方法	(31)

均调编

国乐历代所采黄钟音高与所采互异七均	(34)
何故燕乐只取七律为均?	(54)
燕乐恰恰七均互异解说	(64)
何故苏祇婆所传五旦亦应隋代黄太林南姑五均?	(70)
燕乐黄钟宫均徵调与道宫均角调两调竟是纯律大小两调!	(73)
历代俗乐择调	(75)
段沈蔡张各家所记燕乐二十八调排序比较	(79)
何故“角”调变为“闰”调?	(89)
《事林广记》雅俗八十四调排序探幽	(94)

记谱译谱编

俗字谱姜夔记法与张炎记法比较	(98)
----------------------	------

工尺谱王光祈今译与杨荫浏今译比较	(100)
《事林广记》雅俗八十四调“迷宫图”详解	(108)
《事林广记》雅俗八十四调音阶俗字谱校勘	(114)

附录 1: 参考算解程序

I. 中国传统律制算解参考程序	(115)
《吕氏春秋》十二律算解程序及其算解打印	(115)
《后汉书·律历志》京房六十律算解程序及其算解打印	(125)
《隋书·律历志》钱乐之三百六十律算解程序及其算解打印	(129)
管氏“三分法”与毕氏“五度法”统一算法算解程序及其算解打印...	(137)
互异七均算解程序及其算解打印	(148)
II. 欧洲传统律制算解参考程序	(163)
(1) 毕氏律制算解程序	(163)
毕氏律制 25 音算解程序及其算解打印	(163)
毕氏律制大调音阶算解程序及其算解打印	(174)
毕氏律制小调音阶算解程序及其算解打印	(178)
毕氏律制大调音阶与小调音阶统一算解程序及其算解打印	(182)
(2) 纯律制算解程序	(195)
纯律制大调音阶算解程序及其算解打印	(195)
纯律制小调音阶算解程序及其算解打印	(200)
III. 世界通用十二平均律算解程序	(205)
十二平均律大调音阶与小调音阶算解程序及其算解打印 ...	(205)
IV. 世界通用音程值计量算解程序	(211)
音分值与千分八度值算解程序及其算解打印	(211)

附录 2: 参考便览

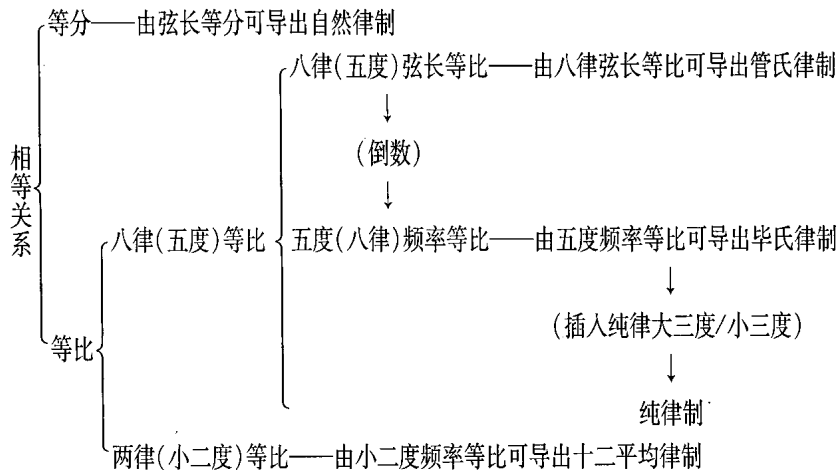
I. 声律编参考便览	(230)
中国传统十二基律与中国传统七声	(230)
西方传统二十六音与西方传统七声	(232)

管氏法十二律与毕氏法二十五律	(234)
历代黄钟音高	(235)
七均音程计算表	(236)
管子三分法十二律频率比与毕达哥拉斯五度法十二音频率比	(237)
II. 均调编参考便览	(238)
按十二律黄钟音高逐律算得互异七均及其音程序列对照表	(238)
燕乐七均音程“透视”表	(245)
计算音分的便捷方法	(246)

一、声律编

常见古今律制的亲缘关系

常见的古今律制为自然律制(natural temperament),管氏律制(Guanzi intonation),毕氏律制(Pythagorean intonation),纯律制(just intonation),十二平均律制(twelve-tone equal temperament)五种律制。这五种律制的生律法则都是基于特定相等关系而导出。因此,这五种律制是一个同宗律制家族。依其亲缘关系,这五种律制可绘一如下的亲缘树:



一、自然律制

中国是世界音乐古国。早在万年前中国古人就演奏音乐了^①。古人演

^① “河南舞阳贾湖遗址发现了一批新石器时代的七音骨笛,其年代距今7600年以上

奏音乐所用的律制自然是“自然律制”。

所谓“自然律制”是指凭先天的智慧与先天的本能而不是凭后天的知识与后天的技能所创造的律制。这种自然律制便是“等分生律法”及其所生之律。无疑,等分生律法是古人最早创用的生律法。这种等分生律法最早用于弦乐器琴上。据我国上古口传史籍《世本》记述:“伏羲作琴”。“神农作琴”。“神农氏琴长三尺六寸六分,上有五弦,曰宫商角徵羽”。伏羲为口传史中第一个作琴人,神农为口传史中第二个作琴人。据考太昊伏羲公元前 2852 年即位,炎帝神农公元前 2737 年即位^①。若此说可信,则我国早在公元前两千八百年前便已有琴了,而在前两千七百年前便已有五弦琴了。显然,古人既已创造琴,古人便会立即创用演奏琴的定弦按弦法。据汉代学者桓谭在其《新论》一书中说,虞舜夏禹皆善操琴。虞舜“援琴作操,其声清以微”,夏禹“援琴作操,其声清以溢”。据考虞舜公元前 2255 年即位,夏禹公元前 2205 年即位^②。若此说可信,则公元前两千二百多年前我国琴术便已可使“六马仰秣”了。无疑,虞舜夏禹“援琴作操”所用的定弦按弦法便是留传迄今的等分法。由此可知,我国早在公元前两千二百多年前便创用了基于等分生律法的自然律制。我国这种公元前两千二百多年前所创用的“自然律制”也就是欧洲十四世纪至十六世纪文艺复兴时期所谓“自然律制”(natural temperament)。由于“自然律制”最适于教堂合唱,所以“自然律制”也称“最适律制”(just intonation),通译“纯律”。

最早所生之律当然是宫、商、角、徵、羽五声。古人在琴弦上找出宫商角徵羽五声的按点,无疑是采用试探的方法。古人当然不会忽略采用一条细柔物折成等分段的试探方法。这是一种最简便的方法。只须把细柔物一端对齐“龙龈”,另一端对齐“岳山”截断,以此细柔物代表弦长;并按古人最常用的徵调式把全弦弹出的音定为徵声;便可作如下试探:

第一次试探,把细柔物折一折痕成二等分并以其折痕即 $1/2$ 处为按点,听其音,辨出为徵声;

第二次试探,把细柔物折两折痕成三等分并以其邻近龙龈的折痕即 $2/3$

① 据梁实秋主编《远东英汉大辞典》附录《中国朝代表》载:伏羲(太昊) B. C. 2852 年即位,神农(炎帝) B. C. 2737 年即位。

② 据梁实秋主编《远东英汉大辞典》附录《中国朝代表》载:虞舜 B. C. 2255 年即位,夏禹 B. C. 2205 年即位。

处为按点,听其音,辨出为商声;

第三次试探,把细柔物折三折痕成四等分并取其邻近龙龈的折痕即 $3/4$ 处为按点,听其音,辨出为宫声;

第四次试探,把细柔物折四折痕成五等分并取其从龙龈计的第二折痕即 $3/5$ 处为按点,听其音,辨出为角声。

徵、商、宫、角四声的按点已找出,现在,尚须找出羽声的按点。

第五次试探至第八次试探,当把细柔物五折六等分时,听其音,无羽声,当把细柔物六折七等分时,听其音,也无羽声,当把细柔物七折八等分时,听其音,仍无羽声,而当把细柔物八折九等分并取其邻近龙龈的折痕即 $8/9$ 为按点时,听其音,辨出恰为羽声。

于是,由试探得知,只须一折,二折,三折,四折,八折,便可得徵,商,宫,角,羽五声的按点。

兹将徵,商,宫,角,羽五声排成音阶如下:

五声	徵	羽	宫	商	角	徵
折数与等分数	1	八折九等分	三折四等分	二折三等分	四折五等分	一折二等分
按点弦长比	1	$8/9$	$3/4$	$2/3$	$3/5$	$1/2$
按点频率比	1	$9/8$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$2/1$
现代唱名	do	re	fa	sol	la	do

我们看到,等分法是多么自然。所以,北宋崔遵度在其《琴笈》一书中说这些按点是“天地自然之节”。

这里所示音阶的按点 $3/4$ 即后世第 10 徽,按点 $2/3$ 即后世第 9 徽,按点 $3/5$ 即后世第 8 徽。

不过,“八折九等分”较繁。于是,后世把这“八折九等分”的 $8/9$ 改为三折四等分取邻近龙龈的 $1/4$ 等分段的中点 $7/8$,从而避免了“八折九等分”。但等分点 $7/8$ 不是按点。 $7/8$ 可这样取得:在三折四等分的四个 $1/4$ 等分段中,取其邻近龙龈的 $1/4$ 等分段的中点得 $1/8$,把这 $1/8$ 加到其余三个 $1/4$ 上,便得 $7/8$ 。也就是

$$1/8 + 3 \times (1/4) = 1/8 + 3/4 = 1/8 + 6/8 = 7/8。$$

等分点 $7/8$ 即后世第 13 徽。

我们应特别注意取邻近龙龈的一等分段的中点的方法。

北宋朱熹把这些取等分点的方法概括为“四折取中”四字。“取中”即取一等分段的中点。

四折：

一折二等分：得一折痕，折痕处为 $1/2$ ；标记： $1/2$ 为第 7 徽；

二折三等分：得二折痕，折痕处为 $1/3, 2/3$ ；标记： $1/3$ 为第 5 徽， $2/3$ 为第 9 徽；

三折四等分：得三折痕，折痕处为 $1/4, 2/4, 3/4$ ；标记： $1/4$ 为第 4 徽， $3/4$ 为第 10 徽；

四折五等分：得四折痕，折痕处为 $1/5, 2/5, 3/5, 4/5$ ；标记： $1/5$ 为第 3 徽， $2/5$ 为第 6 徽， $3/5$ 为第 8 徽， $4/5$ 为第 11 徽；

取中：

取二折三等分邻近龙龈的 $1/3$ 等分段的中点，得 $1/6$ ；标记： $1/6$ 为第 2 徽；

$1/6 + 2/3 = 1/6 + 4/6 = 5/6$ ，标记： $5/6$ 为第 12 徽；

取三折四等分邻近龙龈的 $1/4$ 等分段的中点，得 $1/8$ ；标记： $1/8$ 为第 1 徽；

$1/8 + 3/4 = 1/8 + 6/8 = 7/8$ ，标记： $7/8$ 为第 13 徽。

若“四折取中”绘一图示则更一目了然。

四折取中定徽图示

四折五等分: | ——— | ——— | ——— | ——— | ——— |
 $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$

三折四等分: | — | ——— | ——— | ——— | ——— | — | — |
 $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$

二折三等分: | ——— | ——— | ——— | ——— | ——— | ——— |
 $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$

一折二等分: | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
 $\frac{1}{2}$

四折取中等分点: $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$

徽序: 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

用十三徽所弹出的调式当然是中国“纯律”调式,而不是欧洲“纯律”调式。但是,并非用等分法弹不出欧洲“纯律”调式。

例如,欲弹欧洲纯律五声大音阶,只须三折,四折,八折三种折。

五声	徵	羽	宫	商	角	徵
折数与等分数	1	八折九等分	三折四等分	八折九等分	四折五等分	三折四等分
按点弦长比	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
按点频率比	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$
现代唱名	do	re	fa	sol	la	do

欲弹欧洲纯律五声小音阶,也只须三折,七折,八折三种折。

五声	徵	羽	宫	商	角	徵
折数与等分数	1	八折九等分	三折四等分	八折九等分	七折八等分	七折八等分
按点弦长比	1	8/9	3/4	$6/9 = 2/3$	5/8	$4/8 = 1/2$
按点频率比	1	9/8	4/3	3/2	8/5	2/1
现代唱名	do	re	fa	sol	la	do

欲弹欧洲纯律七声小音阶，仍只须五折，七折，八折三种折。

七声	徵	羽	闰	宫	商	角	变	徵
折数与等分数	1	八折九等分	五折六等分	七折八等分	五折六等分	七折八等分	八折九等分	五折六等分
按点弦长比	1	8/9	5/6	$6/8 = 3/4$	$4/6 = 2/3$	5/8	5/9	$3/6 = 1/2$
按点频率比	1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2/1
现代唱名	do	re	mi	fa	sol	la	si	do

但是，欲弹欧洲纯律七声大音阶，便须四折，五折，七折，八折，十四折五种折了。

七声	徵	羽	闰	宫	商	角	变	徵
折数与等分数	1	八折九等分	四折五等分	七折八等分	五折六等分	四折五等分	14折15等分	五折六等分
按点弦长比	1	8/9	4/5	$6/8 = 3/4$	$4/6 = 2/3$	3/5	8/15	$3/6 = 1/2$
按点频率比	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1
现代唱名	do	re	mi	fa	sol	la	si	do

可见，用等分律制可弹出欧洲纯律制七声大小音阶。

二、管氏律制与毕氏律制

若以 L 表示弦长比,以 F 表示频率比,以 u 表示由低而高生律,以 $(u + 1)$ 表示所生之律的八律(五度)序数,以 (u) 表示由生之律的八律(五度)序数,以 d 表示由高而低生律,以 $(d + 1)$ 表示所生之律的八律(五度)序数,以 (d) 表示由生之律的八律(五度)序数,则八律(五度)等比枝杈可延伸如下:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{八律(五度)弦长等比 - 由八} \\ \text{律弦长等比可导出管氏律制} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{由低而高生律表达式} \quad 3L(u+1) = 2L(u) \\ L(u+1) = 2/3L(u) \text{①} \\ \text{由高而低生律表达式} \quad 2L(d+1) = 3L(d) \\ L(d+1) = 3/2L(d) \text{②} \end{array} \\
 \downarrow \\
 \text{(倒数)} \\
 \downarrow \\
 \left. \begin{array}{l} \text{五度(八律)频率等比 - 由} \\ \text{五度频率比可导出毕氏律制} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{由低而高生律表达式} \quad 2F(u+1) = 3F(u) \\ F(u+1) = 3/2F(u) \text{③} \\ \text{由高而低生律表达式} \quad 3F(d+1) = 2F(d) \\ F(d+1) = 2/3F(d) \text{④} \end{array}
 \end{array}$$

通常,管氏生律法单用①式,而毕氏生律法则并用③式与④式。

(1) 管氏生律法

管氏生律法即“三分损益法”。通常,管氏生律法只用①式,即由低而高生律表达式 $L(u+1) = 2/3 L(u)$ 。这是因为,管氏生律法以黄钟为最低律并以黄钟为始律。所以,管氏生律法的法则为:(a)生律起点为黄钟其弦长 = 9 寸;(b)生律路径为由低而高单向生律;(c)生律比率为 $2/3$,若所生之律其弦长 < 4.5 ,则乘以 2。

(2) 毕氏生律法

毕氏生律法即“五度相生法”,通常,毕氏生律法并用③式与④式,即由低而高生律表达式 $F(u+1) = 3/2 F(u)$ 与由高而低生律表达式 $F(d+1) = 2/3 F(d)$ 。这是因为,毕氏生律法以“中央”为内点,并以 c 为始律。所以,毕氏生律法的生律法则为:(a)生律起点为 c 其频率 = 261.63 赫兹,其频率比 = 1;(b)生律路径为由 c 向高低双向生律;(c)生律比率由低而高为 $3/2$,若所生之律其频率比 > 2 ,则除以 2,由高而低为 $2/3$,若所生之律其频率比 < 1 ,则乘以 2。

“单向生律”：所生各律位于始律的一侧。传统术语“上生与下生”不是“双向生律”而是“单向生律”。

“双向生律”：所生各律位于始律的两侧。

(3) 管氏法十二律与毕氏法二十五律

管氏上生 12 律

													→													→												
													1 2 3 4 5 6 7													8 9 10 11 12												
													黄林 太南 姑应蕤													大 夷 夹 无 仲												
bb	d	bb	a	bb	e	bbb	b	f	bc	bg	bd	ba	be	bb	f	c	g	d	a	e	b	$\#f$	$\#c$	$\#g$	$\#d$	$\#a$	$\#e$	$\#b$										
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13														
←													← →																									

毕氏下生 13 律

毕氏上生 13 律

(4) 管氏法与毕氏法两者之间的相同点与相异点

两者相同点：“两者都采用八律（五度）等比法。

两者相异点：管氏法为单向生律法，毕氏法为双向生律法。

(5) 管氏法与毕氏法两者之间的效能比较

两者之间的效能是等价的，即凡采用管氏法所生之律也可采用毕氏法生得，反之，凡采用毕氏法所生之律也可采用管氏法生得。

验证算例一：用毕氏算法重算用管氏算法所算得之十二律

黄	林	太	南	姑	应	蕤	大	夷	夹	无	仲
f	c	g	d	a	e	b	$\#f$	$\#c$	$\#g$	$\#d$	$\#a$

设起点黄钟弦振动长度为 9 寸，先用管氏算法，依次乘以弦振动长度比 $2/3$ 向上生各律，若所得数 $< 9/2$ ，则乘以 2。得：

黄	林	太	南	姑	应	蕤	大	夷	夹	无	仲
f	c	g	d	a	e	b	$\#f$	$\#c$	$\#g$	$\#d$	$\#a$
9	6	8	5.33	7.11	4.74	6.32	8.43	5.62	7.49	4.99	6.66

试再用毕氏算法重算，设太簇为起点，其弦振动长度为 8 寸，从太簇向上生律，依次乘以 $2/3$ ，若所得数 $< 9/2$ ，则乘以 2，从太簇向下生律，依次乘以 $3/2$ ，若所得数 > 9 ，则除以 2，也得：

黄	林	太	南	姑	应	蕤	大	夷	夹	无	仲
f	c	g	d	a	e	b	$\#f$	$\#c$	$\#g$	$\#d$	$\#a$
9	6	8	5.33	7.11	4.74	6.32	8.43	5.62	7.49	4.99	6.66

比较两种算法可知,用管氏法算得各律,用毕氏法也可算出。

验证算例二:用管氏算法重算用毕氏向下生律算法所算得之十三律

设起点为 c,其频率为 523.26,从 c 向下生律,依次乘以频率比 $2/3$,从 c 向上生律略,于是,得:

^{bb}d	^{bb}a	^{bb}e	^{bb}b	bf	bc	bg	bd	ba	be	bb	bf	c
516.22	387.16	290.37	435.56	326.67	490.00	367.50	275.63	413.44	310.08	465.12	348.84	523.26

试再用管氏算法重算,设起点为下方端点,其频率为 516.217,从 ^{bb}d 向上生律,依次乘以频率 $3/2$,若所得数 > 523.26 ,则除以 2,于是,也得:

^{bb}d	^{bb}a	^{bb}e	^{bb}b	bf	bc	bg	bd	ba	be	bb	bf	c
516.22	387.16	290.37	435.56	326.67	490.00	367.50	275.63	413.44	310.08	465.12	348.84	523.26

比较两种算法可知,用毕氏法算得各律,用管氏法也可算出。

可见,用三分法所生各律与用五度法所生各律对应相等,也就是说,毕氏五度法与管氏三分法等价。

三、纯律

所谓“纯律”即欧洲文艺复兴时期所采用的自然律制。但其生律法则不是“等分法”,而是将纯律大三度(频率比为 $5/4$,弦长比为 $4/5$)与纯律小三度(频率比为 $6/5$,弦长比为 $5/6$)引入毕氏律制。这是因为,纯律是用于教堂合唱而不是用于弦乐。

兹以位于音名右上角的字母“j”表示纯律,引入纯律大三度 $e^j = 5/4$,则

纯律大六度 $a^j = 4/3 e^j = 4/3(5/4) = 5/3$,

纯律大七度 $b^j = 3/2 e^j = 3/2(5/4) = 15/8$,

于是,得如下纯律大音阶:

音名	c	d	e^j	f	g	a^j	b^j	c
频率比	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	$2/1$
唱名	do	re	mi	fa	sol	la	si	do

再引入纯律小三度 $^be^j = 6/5$,则

纯律小六度 $^ba^j = 4/3 ^be^j = 4/3(6/5) = 8/5$,

纯律小七度 $^bb^j = 3/2 ^be^j = 3/2(6/5) = 9/5$,

于是,得如下纯律小音阶:

音名	c	d	$\flat e^j$	f	g	$\flat a^j$	$\flat b^j$	c
频率比	1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2/1
唱名	do	re	mi	fa	sol	la	si	do

采用引入纯律大三度与小三度所生得之纯律大小音阶与我们用“等分法”所生得之纯律大小音阶是一样的。

等分律制与等比律制之间并无一条不可逾越的鸿沟。事实上,任一律的频率比的倒数都是相应的弦长比。因此,任一律都可视为一种等分。例如,管律仲吕的弦长比为 131072/177147,可视为将全弦等分 177147 等分段,取其 131072/177147 等分点为按点。再如,毕氏律 $\flat d$ 的频率比为 1048576/531441,其弦长比为 531441/1048576,也可视为将全弦等分 1048576 等分段,取其 531441/1048576 等分点为按点。只是将一条 9 寸弦等分 177147 等分有难度,而将一条弦等分 1048576 等分更有难度罢了。

纯律大小音阶还可从管氏律制中找到。请勿惊诧,中国是一个音乐古国,若发现外国某一音乐现象中国早已有之不足为奇。我们可立刻看到,燕乐俗呼黄钟宫均徵调与道宫均角调两调竟是纯律大小两调!且看燕乐七均。

燕乐七均(俗呼)

	宫	商	角	变	徵	羽	闰	宫
正宫		180	204	204	114	180	204	114
高宫		204	204	204	90	204	204	90
中吕宫		204	204	180	114	204	180	114
道宫		204	180	204	114	180	204	114
南吕宫		180	204	204	90	204	204	114
仙吕宫		204	204	180	114	204	204	90
黄钟宫		204	180	204	114	204	180	114

仔细观察可发现,黄钟宫均徵调与道宫均角调两调便是纯律大小两调音阶。

若将黄钟宫均徵调与纯律大调音阶置于一处,将道宫均角调与纯律小