高等数学

主　编　闫保英　李立群　冯锡刚
副主编　曹爱民　李百秀　高　杨　梁沛沛

国防工业出版社
National Defense Industry Press

内 容 简 介

本书系统讲解了高等数学的所有重要知识点，包括基本定义、定理、原理及需注意的要点。全书共分十二章，其中微积分六章，线性代数三章，概率论与数理统计三章。

本书适合于高职高专学校相关专业学生学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学／闫保英主编．—北京：国防工业出版社，2007.9

ISBN 978-7-118-05351-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．闫…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材

Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135016 号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100044）

京南印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168　1/32　印张 12⅜　字数 324 千字

2007 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 26.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高，数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域，人们越来越深该认识到数学教育在高等教育中的重要性。数学不仅是基础、是工具，更重要的，是一种思维模式——数学思维模式。数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体，也是素质教育的重要组成部分，当然，不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同。考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况，课程共分三个部分，不同部分反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求。

本教材在许多方面都具有明显的高等职业教育的特色，具体反映在：

1. 内容少而精，突出数学思想，重点介绍高等数学中的基本概念和基本方法；从培养读者的能力和提高素质的着眼点，有选择地保留了部分定理、性质的证明，不片面追求理论的推导、证明，而强调理论与实际的结合。力求从实际问题出发引出概念，结合数学内容的展开，介绍数学方法在经济、管理的应用。

2. 扩大了读者的知识面。将各专业不同需求的数学内容融进了一本教材中，在这知识经济时代是非常必要的，另一方面，可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望。当然，教师在授课时可按本专业的要求有选择的使用。

3. 各节后的习题配置除基本练习外，还有部分综合练习题，以提高读者分析问题，解决问题的能力。这些题目既具有启发性，又有广泛的应用性，全书共分十二章。其中微积分六章，线性代数三章，概率论与数理统计三章。

书中不足之外，敬请读者批评指正。

编 者

2007.8

目　　录

第一章　函数、极限与连续

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

§1.1　函数的概念

一、函数的概念

函数是微积分学的主要研究对象，它的实质就是变量之间的对应关系.

1. 函数的定义

在同一自然现象或技术过程中，同时变化着的几个变量间往往存在着相互依赖、相互制约的关系，这种关系在数学上称为函数关系.

定义 1　若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使对每一个 $x \in D$，都有确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y = f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，也可以记作 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D$ 所对应的 y 值，记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的函数值. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有对应的函数值 $f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，否则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点无定义.

函数的定义域也就是使函数有定义的 x 的值的全体；而相应的函数值的全体 $\{y \mid y=f(x), x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$.

注意:

(1) 定义域与对应规则是确定函数的两个要素，如果两个函数具有相同的定义域和对应规则，则认为它们是相同的函数.

(2) 函数常用解析法、图像法、表格法来表示，在高等数学中主要研究用解析法表示的函数.

(3) 若自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。凡没有特别说明时，函数都是指单值函数.

2. 分段函数

有的函数在整个定义域上不能用一个统一的解析式表示，而是在定义域的一些不相重叠的真子集上用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数. 分段函数在整个定义域上是一个函数而不是几个函数.

例 1 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

是确定在 $[0,+\infty)$ 上的一个函数. 当自变量 x 在 $[0,1]$ 上取值时，对应的函数值由 $y=\sin x$ 确定；当自变量在 $(1,+\infty)$ 内取值时，函数值由 $y=1+x$ 确定. 当求函数值 $f(x_0)$ 时，应注意 x_0 所属的范围，代入相应的表达式. 如：

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=(\sin x)_{x=\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$f(2)=(1+x)_{x=2}=1+2=3$$

3. 隐函数

用解析法给出的函数 $y=f(x)$，它的因变量 y 是用自变量 x 的表达式表示出来的，称为显函数. 例如 $y=x^2+1$, $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $y=\log_a(3x+1)$ 等. 而有些函数，它的因变量 y 与自变量 x 的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的，称为隐函数，此时也称方程 $F(x,$

$y)=0$ 定义了 y 是 x 的隐函数。如,方程 $x^3+y^3=4$ 定义了 y 是 x 的隐函数.它的显函数形式为 $y=\sqrt[3]{4-x^3}\quad(x\in R)$.

从方程 $F(x,y)=0$ 解出 y 的过程称为隐函数的显化过程。但是并非所有隐函数都能显化,例如方程 $x^5+y^5+xy=0$ 所定义的隐函数就不能用代数方法显化.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若存在正数 M,使得对任一 $x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界;否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对任意实数 x,$|\sin x|\leqslant 1$.

又如,$y=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 或 $[-3,-1]$ 内有界,因为,当 $x>1$ 时,$\left|\frac{1}{x}\right|<1$;当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时,$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$.但 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在一个正数 M,使得 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.事实上,对任意取定的正数 M(不妨设 $M>1$),则 $\frac{1}{2M}\in(0,1)$,当 $x_1=\frac{1}{2M}$ 时,$\left|\frac{1}{x_1}\right|=2M>M$,可见函数的有界性与区间有关.

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的单调增函数(或单调减函数),单调增函数与单调减函数统称为单调函数。使函数保持单调性的自变量的区间称为该函数的单调区间.

函数的单调性是与区间有关的，如，$f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(-\infty,+\infty)$ 内既不是单调增函数也不是单调减函数.

单调增(减)函数的图形为沿横轴正方向上升(下降)的曲线，如图 1－1 所示.

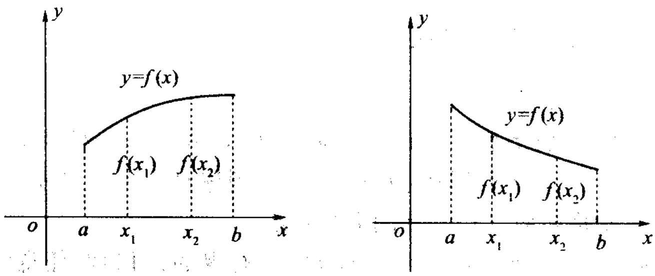

图 1－1

3. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称 $f(x)$ 为奇(偶)函数.

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数，$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数，$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对任何 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

三、复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

下列六类函数称为基本初等函数.

常数函数　　　　$y=c$；

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是实数，$\alpha\neq0$）；

指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）；

对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1$）；

三角函数 $y=\sin x$（$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$）；

反三角函数 $y=\arcsin x$（$\arccos x$、$\arctan x$、$\mathrm{arccot}\,x$）.

它们的图像及性质在此不再赘述.

2. 复合函数

先举一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1-x^2$，以 $1-x^2$ 代替第一式的 u，得 $y=\sqrt{1-x^2}$.

y 是 u 的函数，u 是 x 的函数，所以通过 u，y 也是 x 的函数.

定义 6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

注意：

（1）不是任意两个函数都能复合成复合函数，关键是 $u=\varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)$ 与 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 必须交集非空. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.

（2）复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应该由使 $u=\varphi(x)$ 的函数值属于 $y=f(u)$ 的定义域的那些 x 所组成. 因此，通常只是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一部分. 如上例，$y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，仅是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分.

（3）复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x$ 复合而成的函数为 $y=\sin\sqrt{1-x}$. 这里 u 及 v 都是中间变量.

（4）利用复合函数的概念不仅能将若干简单函数复合成一个复合函数，还可将较复杂的函数分解为若干个简单函数，这对今后的许多运算是很有用的。例如，$s=A\sin(\omega t+\varphi)$ 是由 $s=A\sin u$，$u=\omega t+\varphi$ 复合而成.

例 2 将下列初等函数分解为基本初等函数的运算：

(1) $y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$;

(2) $y=\dfrac{1+\cos^2 x}{\tan\sqrt{x}}$.

解:(1) $y=\sin u$

$u=\ln v$

$v=w^{\frac{1}{2}}$

$w=x^2-1$

其中 y,u,v 作为中间变量 u,v,w 的函数都是基本初等函数,而 w 是幂函数 x^2 与常数函数 1 的差. 即 y 作为 x 的函数是由基本初等函数经一次减法及三次复合而成.

(2) $y=\dfrac{u}{v}$,其中

$u=1+w^2$, $w=\cos x$

$v=\tan t$, $t=x^{\frac{1}{2}}$

y 是函数 u 与 v 的商,而 u 是幂函数 w^2 与常数函数 1 的和.

3. 初等函数

定义 7 凡由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成,并可用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

例如:

$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^2 x$, $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$都是初等函数.

根据初等函数的定义,分段函数不是初等函数.

四、经济学中常用的函数

经济学中常用的函数有以下几种.

1. 供给函数与需求函数

描述价格 P 与商品量 Q 之间关系的函数 $Q=f(P)$,从生产厂家的角度看,这是供给函数,而从消费者的角度看,这是需求函数.

如果市场上某商品的需求量恰好等于供给量,则称该商品市

场处于平衡状态,这时的商品价格 P 称为市场均衡价格,商品量 Q 称为均衡数量。

2. 成本函数

成本一般由固定成本和可变成本组成. 固定成本在某个时期内是相对不变的,可视为常量;可变成本随产量 x 而变化.

设 C 为成本,C_1 为固定成本,$C_2(x)$ 为可变成本,则成本函数为 $C=C(x)=C_1+C_2(x)$;平均成本函数为 $\overline{C}(x)=C(x)/x$.

3. 收入函数

收入函数就是价格与销售量的乘积. 设 x 为销售量,P 为价格,R 为收入,则收入函数为 $R=R(x)=P(x)\cdot x$;平均收入函数为$\overline{R}(x)=R(x)/x=P(x)$,其中 $P(x)$ 为商品的价格函数.

4. 利润函数

利润函数就是收入函数与成本函数之差. 设 L 为利润,则利润函数为 $L=L(x)=R(x)-C(x)$;平均利润函数为 $\overline{L}(x)=L(x)/x$.

对于利润函数 $L(x)$,有下列三种情况:

(1) $L(x)>0$,有盈余生产,即生产处于有利润状态;

(2) $L(x)<0$,亏损生产,即生产处于亏损状态;

(3) $L(x)=0$,无盈亏生产,无盈亏生产时的产量 x_0 称为无盈亏点或损益分歧点(亦称保本点或盈亏平衡点).

例3 生产某种产品的固定成本为20万元,每生产1个单位产品,成本增加3千元,产品销售价格为4千元,求:(1)成本函数;(2)收入函数;(3)平均成本函数;(4)损益分歧点;(5)利润函数。

解:设 x 为产量或销量,则

(1) 成本函数 $C(x)=20+0.3x$;

(2) 收入函数 $R(x)=0.4x$;

(3) 平均成本函数 $\overline{C}(x)=C(x)/x=\dfrac{20}{x}+0.3$;

(4) 令 $R(x)=C(x)$,则 $0.4x=20+0.3x$,故损益分歧点为$x=200$;

(5) 利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=0.1x-20.$

习题 1-1

1. 设$f(x)=\begin{cases}1+x,x\leqslant 0\\2,x>0\end{cases}$,求$f(0)$,$f(\frac{1}{2})$,$f(-1)$,$f(1)$。

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\ln\sin^2(x+1)$;　　(2)$y=(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})^2$;

(3) $y=2^{\cos^2 x}$;　　(4)$y=\arccos\frac{x}{2}$。

§1.2 极限的概念

极限是高等数学中最基本的概念之一.在微积分中,几乎所有的概念都是通过极限来定义的,学好高等数学,首先要准确地理解极限的概念,并且掌握好极限的重要性质和运算法则.

一、数列的极限

简单地说,数列就是按照自然数的顺序排列的无穷多个数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

简记为$\{x_n\}$,数列$\{x_n\}$也可以看作是定义在自然数集上的函数

$$x_n=f(n)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

数列$\{x_n\}$中的每个数,称为数列的项,x_n称为数列的通项,其中的下标n称为x_n的序号.

例1　考察以下四个数列:

(1) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$,即$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;

(2) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}+1\right\}$,即$\frac{1}{2}+1,\frac{1}{4}+1,\cdots,\frac{1}{2^n}+1,\cdots$;