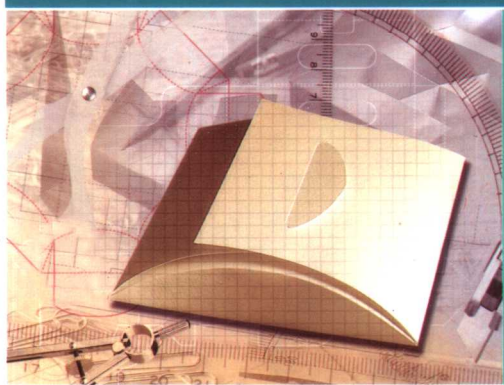


高等数学



主 编 闫保英 李立群 冯锡刚
副主编 曹爱民 李百秀 高 杨 梁沛沛



国防工业出版社

National Defense Industry Press

内 容 简 介

本书系统讲解了高等数学的所有重要知识点,包括基本定义、定理、原理及需注意的要点。全书共分十二章,其中微积分六章,线性代数三章,概率论与数理统计三章。

本书适合于高职高专学校相关专业学生学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 闫保英主编. —北京:国防工业出版社,

2007 9

ISBN 978-7-118-05351-7

I. 高… II. 闫… III. 高等数学—高等学校—教材
IV 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135016 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

京南印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 12 1/2 字数 324 千字

2007 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 26.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高,数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域,人们越来越深该认识到数学教育在高等教育中的重要性。数学不仅是基础、是工具,更重要的,是一种思维模式——数学思维模式。数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体,也是素质教育的重要组成部分,当然,不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同。考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的具体情况,课程共分三个部分,不同部分反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求。

本教材在许多方面都具有明显的高等职业教育的特色,具体反映在:

1. 内容少而精,突出数学思想,重点介绍高等数学中的基本概念和基本方法;从培养读者的能力和提高素质的着眼点,有选择地保留了部分定理、性质的证明,不片面追求理论的推导、证明,而强调理论与实际的结合。力求从实际问题出发引出概念,结合数学内容的展开,介绍数学方法在经济、管理的应用。

2. 扩大了读者的知识面。将各专业不同需求的数学内容融进了一本教材中,在这知识经济时代是非常必要的,另一方面,可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望。当然,教师在授课时可按本专业的要求有选择的使用。

3. 各节后的习题配置除基本练习外,还有部分综合练习题,以提高读者分析问题,解决问题的能力。这些题目既具有启发性,又有广泛的应用性,全书共分十二章。其中微积分六章,线性代数三章,概率论与数理统计三章。

书中不足之外,敬请读者批评指正。

编者

2007.8

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
1.1 函数的概念	1
习题 1-1	8
1.2 极限的概念	8
习题 1-2	12
1.3 极限的性质与运算法则	12
习题 1-3	16
1.4 两个重要极限	17
习题 1-4	22
1.5 无穷小量与无穷大量	23
习题 1-5	27
1.6 函数的连续性	28
习题 1-6	35
复习题一	36
第二章 导数与微分	40
2.1 导数概念	40
习题 2-1	47
2.2 初等函数的导数	47
习题 2-2	54
2.3 高阶导数	55
习题 2-3	57
2.4 隐函数及参数方程所确定的函数的导数	57
习题 2-4	60
2.5 函数的微分	61

习题 2-5	66
复习题二	67
第三章 微分中值定理与导数应用	70
3.1 微分中值定理	70
习题 3-1	74
3.2 洛必达法则	74
习题 3-2	78
3.3 函数的单调性	79
习题 3-3	81
3.4 函数的极值	81
习题 3-4	89
3.5 曲线的凹向与拐点	90
习题 3-5	93
3.6 导数在经济分析中的应用	93
习题 3-6	98
复习题三	99
第四章 不定积分	102
4.1 不定积分的概念	102
习题 4-1	105
4.2 不定积分的性质与基本积分公式	106
习题 4-2	109
4.3 换元积分法	110
习题 4-3	116
4.4 分部积分法	116
习题 4-4	119
复习题四	120
第五章 定积分及其应用	123
5.1 定积分的概念	123
5.2 定积分的性质	128
习题 5-2	132

5.3 微积分基本公式	132
习题 5-3	138
5.4 定积分的换元积分法和分部积分法	139
习题 5-4	144
5.5 定积分的应用	144
习题 5-5	157
5.6 广义积分	158
习题 5-6	160
复习题五	161
第六章 多元函数微分学	165
6.1 多元函数的概念	165
习题 6-1	168
6.2 二元函数的极限与连续	168
6.3 偏导数与全微分	171
习题 6-3	178
6.4 复合函数和隐函数的偏导数	178
习题 6-4	182
6.5 二元函数的极值及求法	183
复习题六	188
第七章 行列式	190
7.1 二阶、三阶行列式	190
习题 7-1	192
7.2 n 阶行列式	192
习题 7-2	197
7.3 行列式的性质	197
习题 7-3	202
7.4 行列式按行(列)展开	203
习题 7-4	207
7.5 克莱姆(Cramer)法则	208
习题 7-5	212

复习题七	213
第八章 矩阵	215
8.1 矩阵的概念	215
8.2 矩阵的运算	218
习题 8-2	227
8.3 逆矩阵	229
习题 8-3	233
8.4 矩阵的秩与矩阵的初等变换	234
习题 8-4	244
8.5 线性方程组解的讨论	244
习题 8-5	253
复习题八	254
第九章 n 维向量及其线性关系	256
9.1 n 维向量	256
习题 9-1	260
9.2 向量间的线性关系	261
习题 9-2	265
9.3 向量组的秩	266
习题 9-3	272
9.4 线性方程组解的结构	272
习题 9-4	282
复习题九	282
第十章 随机事件及其概率	285
10.1 随机事件及其运算	285
10.2 概率	289
10.3 概率的性质	292
10.4 条件概率与乘法法则	295
10.5 独立试验概型	300
习题十	304
第十一章 随机变量及其分布	308

11.1	随机变量	308
11.2	离散型随机变量	310
11.3	几种重要的离散分布	313
11.4	连续型随机变量	316
11.5	几个常用的连续分布	318
	习题十一	322
第十二章	随机变量的数字特征	327
12.1	数学期望	327
12.2	几个重要分布的数学期望	331
12.3	方差	333
12.4	几个重要分布的方差	336
	习题十二	338
附表一		342
附表二		346
附表三		349
附表四		352
附表五		354
附表六		356
附表七		364
答案		365

第一章 函数、极限与连续

初等数学研究的对象基本上是不变的量,而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系.极限方法则是研究变量的一种基本方法.本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

§ 1.1 函数的概念

一、函数的概念

函数是微积分学的主要研究对象,它的实质就是变量之间的对应关系。

1. 函数的定义

在同一自然现象或技术过程中,同时变化着的几个变量间往往存在着相互依赖、相互制约的关系,这种关系在数学上称为函数关系。

定义 1 若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f ,使对每一个 $x \in D$,都有确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x)$, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域,也可以记作 $D(f)$ 。

对于 $x_0 \in D$ 所对应的 y 值,记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有对应的函数值 $f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,否则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点无定义。

函数的定义域也就是使函数有定义的 x 的值的全体;而相应的函数值的全体 $\{y \mid y=f(x), x \in D\}$, 称为函数 $y=f(x)$ 的值域, 记作 Z 或 $Z(f)$.

注意:

(1) 定义域与对应规则是确定函数的两个要素, 如果两个函数具有相同的定义域和对应规则, 则认为它们是相同的函数.

(2) 函数常用解析法、图像法、表格法来表示, 在高等数学中主要研究用解析法表示的函数.

(3) 若自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值总有一个, 这种函数叫做单值函数, 否则叫做多值函数. 凡没有特别说明时, 函数都是指单值函数.

2. 分段函数

有的函数在整个定义域上不能用一个统一的解析式表示, 而是在定义域的一些不相重叠的真子集上用不同的解析式表示, 这样的函数称为分段函数. 分段函数在整个定义域上是一个函数而不是几个函数.

$$\text{例 1 } f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

是确定在 $[0, +\infty)$ 上的一个函数. 当自变量 x 在 $[0, 1]$ 上取值时, 对应的函数值由 $y = \sin x$ 确定; 当自变量在 $(1, +\infty)$ 内取值时, 函数值由 $y = 1+x$ 确定. 当求函数值 $f(x_0)$ 时, 应注意 x_0 所属的范围, 代入相应的表达式. 如:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\sin x)_{x=\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = (1+x)_{x=2} = 1+2 = 3$$

3. 隐函数

用解析法给出的函数 $y=f(x)$, 它的因变量 y 是用自变量 x 的表达式表示出来的, 称为显函数. 例如 $y=x^2+1$, $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $y=\log_a(3x+1)$ 等. 而有些函数, 它的因变量 y 与自变量 x 的对应规则是用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示的, 称为隐函数, 此时也称方程 $F(x,$

$y)=0$ 定义了 y 是 x 的隐函数。如, 方程 $x^3+y^3=4$ 定义了 y 是 x 的隐函数. 它的显函数形式为 $y=\sqrt[3]{4-x^3}$ ($x \in R$).

从方程 $F(x, y)=0$ 解出 y 的过程称为隐函数的显化过程。但是并非所有隐函数都能显化, 例如方程 $x^5+y^5+xy=0$ 所定义的隐函数就不能用代数方法显化。

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 若存在正数 M , 使得对任一 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界; 否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界。

例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对任意实数 x , $|\sin x| \leq 1$ 。

又如, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 或 $[-3, -1]$ 内有界, 因为, 当 $x > 1$ 时, $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$; 当 $-3 \leq x \leq -1$ 时, $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$ 。但 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在一个正数 M , 使得 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$ 对 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立。事实上, 对任意取定的正数 M (不妨设 $M > 1$), 则 $\frac{1}{2M} \in (0, 1)$, 当 $x_1 = \frac{1}{2M}$ 时, $\left|\frac{1}{x_1}\right| = 2M > M$, 可见函数的有界性与区间有关。

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 若对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)}$$

则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的单调增函数 (或单调减函数), 单调增函数与单调减函数统称为单调函数。使函数保持单调性的自变量的区间称为该函数的单调区间。

函数的单调性是与区间有关的,如, $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加,在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少,在 $(-\infty, +\infty)$ 内既不是单调增函数也不是单调减函数.

单调增(减)函数的图形为沿横轴正方向上升(下降)的曲线,如图 1-1 所示.

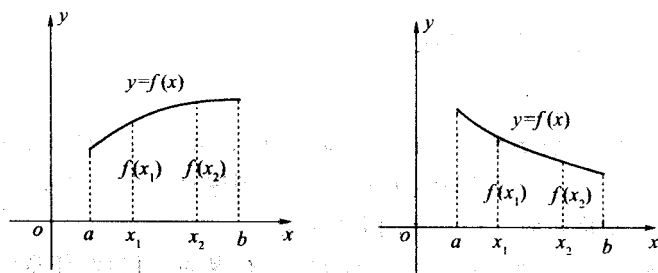


图 1-1

3. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$), 则称 $f(x)$ 为奇(偶)函数.

例如, $y = x^3$, $y = \sin x$ 都是奇函数, $y = x^2$, $y = \cos x$ 都是偶函数, $y = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个常数 T ($T \neq 0$), 使得对任何 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且恒有 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

三、复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

下列六类函数称为基本初等函数.

常数函数

$$y = c;$$

幂函数	$y = x^{\alpha}$ (α 是实数, $\alpha \neq 0$);
指数函数	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);
三角函数	$y = \sin x$ ($\cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$);
反三角函数	$y = \arcsin x$ ($\arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$).

它们的图像及性质在此不再赘述.

2. 复合函数

先举一个例子, 设 $y = \sqrt{u}$, 而 $u = 1 - x^2$, 以 $1 - x^2$ 代替第一式的 u , 得 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

y 是 u 的函数, u 是 x 的函数, 所以通过 u , y 也是 x 的函数.

定义 6 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, 若函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$, $Z(\varphi) \cap D(f)$ 非空, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量, y 为因变量, u 称为中间变量.

注意:

(1) 不是任意两个函数都能复合成复合函数, 关键是 $u = \varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)$ 与 $y = f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 必须交集非空. 例如, $y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数.

(2) 复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域应该由使 $u = \varphi(x)$ 的函数值属于 $y = f(u)$ 的定义域的那些 x 所组成. 因此, 通常只是函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一部分. 如上例, $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 仅是 $u = 1 - x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一部分.

(3) 复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如, $y = \sin u, u = \sqrt{v}, v = 1 - x$ 复合而成的函数为 $y = \sin \sqrt{1 - x}$. 这里 u 及 v 都是中间变量.

(4) 利用复合函数的概念不仅能将若干简单函数复合成一个复合函数, 还可将较复杂的函数分解为若干个简单函数, 这对今后的许多运算是很有用的. 例如, $s = A \sin(\omega t + \varphi)$ 是由 $s = A \sin u, u = \omega t + \varphi$ 复合而成.

例 2 将下列初等函数分解为基本初等函数的运算:

$$(1) y = \sin(\ln \sqrt{x^2 - 1});$$

$$(2) y = \frac{1 + \cos^2 x}{\tan \sqrt{x}}.$$

解: (1) $y = \sin u$

$$u = \ln v$$

$$v = w^{\frac{1}{2}}$$

$$w = x^2 - 1$$

其中 y, u, v 作为中间变量 u, v, w 的函数都是基本初等函数, 而 w 是幂函数 x^2 与常数函数 1 的差. 即 y 作为 x 的函数是由基本初等函数经一次减法及三次复合而成.

$$(2) y = \frac{u}{v}, \text{ 其中}$$

$$u = 1 + w^2, \quad w = \cos x$$

$$v = \tan t, \quad t = x^{\frac{1}{2}}$$

y 是函数 u 与 v 的商, 而 u 是幂函数 w^2 与常数函数 1 的和.

3. 初等函数

定义 7 凡由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成, 并可用一个解析式子表示的函数, 称为初等函数.

例如:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, y = \sin^2 x, y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}} \text{ 都是初等函数.}$$

根据初等函数的定义, 分段函数不是初等函数.

四、经济学中常用的函数

经济学中常用的函数有以下几种.

1. 供给函数与需求函数

描述价格 P 与商品量 Q 之间关系的函数 $Q = f(P)$, 从生产厂家的角度看, 这是供给函数, 而从消费者的角度看, 这是需求函数.

如果市场上某商品的需求量恰好等于供给量, 则称该商品市

场处于平衡状态,这时的商品价格 P 称为市场均衡价格,商品量 Q 称为均衡数量。

2. 成本函数

成本一般由固定成本和可变成本组成. 固定成本在某个时期内是相对不变的,可视为常量;可变成本随产量 x 而变化.

设 C 为成本, C_1 为固定成本, $C_2(x)$ 为可变成本,则成本函数为 $C = C(x) = C_1 + C_2(x)$; 平均成本函数为 $\bar{C}(x) = C(x)/x$.

3. 收入函数

收入函数就是价格与销售量的乘积. 设 x 为销售量, P 为价格, R 为收入,则收入函数为 $R = R(x) = P(x) \cdot x$; 平均收入函数为 $\bar{R}(x) = R(x)/x = P(x)$, 其中 $P(x)$ 为商品的价格函数.

4. 利润函数

利润函数就是收入函数与成本函数之差. 设 L 为利润,则利润函数为 $L = L(x) = R(x) - C(x)$; 平均利润函数为 $\bar{L}(x) = L(x)/x$.

对于利润函数 $L(x)$, 有下列三种情况:

- (1) $L(x) > 0$, 有盈余生产, 即生产处于有利润状态;
- (2) $L(x) < 0$, 亏损生产, 即生产处于亏损状态;
- (3) $L(x) = 0$, 无盈亏生产, 无盈亏生产时的产量 x_0 称为无盈亏点或损益分歧点(亦称保本点或盈亏平衡点).

例3 生产某种产品的固定成本为 20 万元, 每生产 1 个单位产品, 成本增加 3 千元, 产品销售价格为 4 千元, 求: (1) 成本函数; (2) 收入函数; (3) 平均成本函数; (4) 损益分歧点; (5) 利润函数。

解: 设 x 为产量或销量, 则

(1) 成本函数 $C(x) = 20 + 0.3x$;

(2) 收入函数 $R(x) = 0.4x$;

(3) 平均成本函数 $\bar{C}(x) = C(x)/x = \frac{20}{x} + 0.3$;

(4) 令 $R(x) = C(x)$, 则 $0.4x = 20 + 0.3x$, 故损益分歧点为 $x = 200$;

(5) 利润函数 $L(x) = R(x) - C(x) = 0.1x - 20$.

习题 1-1

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-1)$, $f(1)$.

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成?

$$(1) y = \ln \sin^2(x+1); \quad (2) y = \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2;$$

$$(3) y = 2^{\omega^2 x}; \quad (4) y = \arccos \frac{x}{2}.$$

§ 1.2 极限的概念

极限是高等数学中最基本的概念之一. 在微积分中, 几乎所有的概念都是通过极限来定义的, 学好高等数学, 首先要准确地理解极限的概念, 并且掌握好极限的重要性质和运算法则.

一、数列的极限

简单地说, 数列就是按照自然数的顺序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

简记为 $\{x_n\}$, 数列 $\{x_n\}$ 也可以看作是定义在自然数集上的函数

$$x_n = f(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

数列 $\{x_n\}$ 中的每个数, 称为数列的项, x_n 称为数列的通项, 其中的下标 n 称为 x_n 的序号.

例1 考察以下四个数列:

$$(1) \{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \text{即 } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$(2) \{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n} + 1\right\}, \text{即 } \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{4} + 1, \dots, \frac{1}{2^n} + 1, \dots;$$