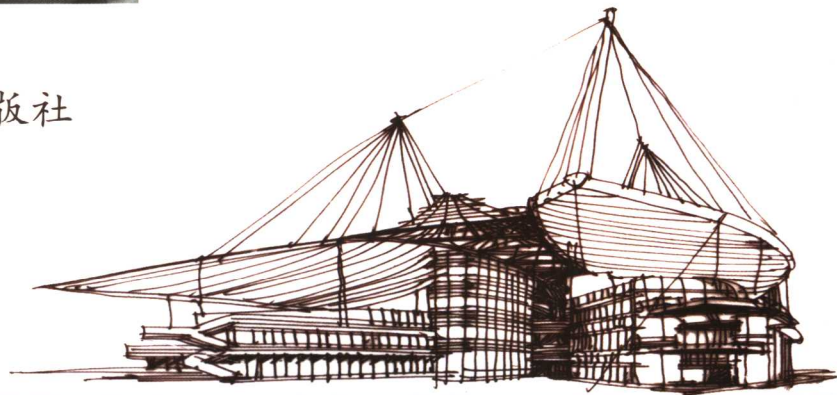


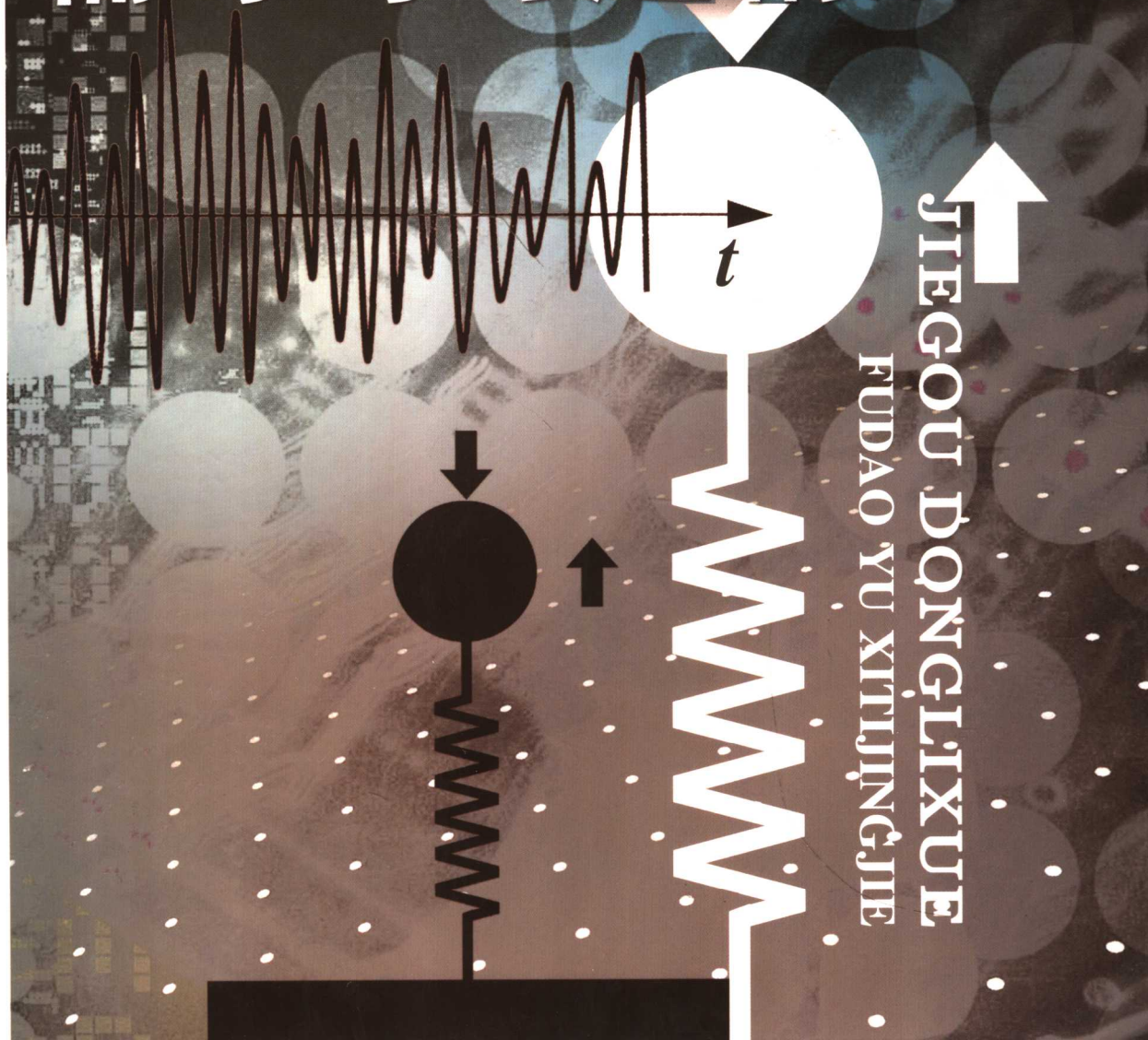
合肥工业大学出版社

盛宏玉 编著



结构动力学

辅导与习题精解



结构动力学辅导与 习题精解

盛宏玉 编著



合肥工业大学出版社

内 容 提 要

本书配合作者最近修订的《结构动力学》教材而编写,除了对教材所附习题作了详细解答外,还增加了相当数量的基本概念题和自测练习题,其中部分给了简单提示或解答过程,目的是帮助读者通过大量的练习,熟练掌握结构动力学的基本理论和计算技巧。

本书可作为本科高年级学生的复习与备考参考书,或作为报考研究生复习用书,也可供教师及有关工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学辅导与习题精解/盛宏玉编著. —合肥:合肥工业大学出版社,2007.12

ISBN 978-7-81093-698-9

I. 结… II. 盛… III. 结构动力学—高等学校—教学参考资料 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 179286 号

结构动力学辅导与习题精解

盛宏玉 编著

责任编辑 陆向军

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2007 年 12 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	印 次	2007 年 12 月第 1 次印刷
邮 编	230009	开 本	787×1092 1/16
电 话	总编室:0551-2903038	印 张	16.75
	发行部:0551-2903198	字 数	403 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发 行	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-698-9

定价:24.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换。

编者的话

本书作者编著的《结构动力学》(合肥工业大学出版社,2005年5月第1版,2007年9月第2版),系统地介绍了结构动力学的基本理论、求解方法及工程应用,内容由浅入深,适合不同专业人士学习和参考。全书涉及结构系统动力学分析和计算的多方面内容,具有较强的理论体系和工程参考价值,出版后得到一些同行和高校师生的大力支持,在此深表谢意!

本书编者在教材的试用过程中,对各章所附习题做了详细解答,在此汇编成册,供广大读者在学习中参考。每章分为四部分,第一节为本章重点,帮助读者理清该章应掌握的重点内容;第二节为基本概念题,目的是帮助读者清晰理解该章所涉及的一些基本概念;第三节为教材所附习题的解答,供读者在学习时参考;第四节为附加的自测练习题。第二节的基本概念题和第四节的自测练习题部分给了简单提示或解答过程,目的是帮助读者通过大量的练习,熟练掌握结构动力学的基本理论和计算技巧。

由于作者水平有限,加上时间仓促,有错误和不当之处,敬请读者指正。

作 者

2007年12月

目 录

第 1 章 绪 论	(1)
1.1 本章重点	(1)
1.2 基本概念题	(1)
1.3 习题解答	(1)
1.4 自测练习题	(6)

第一篇 离散系统的线性振动

第 2 章 单自由度系统的振动	(8)
2.1 本章重点	(8)
2.2 基本概念题	(8)
2.3 习题解答	(10)
2.4 自测练习题	(20)
第 3 章 离散系统的动力学参数及其确定方法	(30)
3.1 本章重点	(30)
3.2 基本概念题	(30)
3.3 习题解答	(31)
3.4 自测练习题	(39)
第 4 章 多自由度系统的振动	(43)
4.1 本章重点	(43)
4.2 基本概念题	(43)
4.3 习题解答	(43)
4.4 自测练习题	(68)
第 5 章 大型结构的实用分析方法	(72)
5.1 本章重点	(72)
5.2 基本概念题	(72)
5.3 习题解答	(73)
5.4 自测练习题	(89)

第 6 章 模态参数识别的基本原理与方法	(93)
6.1 本章重点	(93)
6.2 基本概念题	(93)
6.3 习题解答	(93)
6.4 自测练习题	(105)
第 7 章 动态子结构法	(109)
7.1 本章重点	(109)
7.2 基本概念题	(109)
7.3 习题解答	(110)
7.4 自测练习题	(132)

第二篇 连续系统的线性振动

第 8 章 一维杆件系统的振动分析	(135)
8.1 本章重点	(135)
8.2 基本概念题	(135)
8.3 习题解答	(136)
8.4 自测练习题	(154)
第 9 章 弹性系统的二维和三维振动分析	(159)
9.1 本章重点	(159)
9.2 基本概念题	(159)
9.3 习题解答	(160)
9.4 自测练习题	(178)

第三篇 非线性振动

第 10 章 单自由度系统的非线性振动	(181)
10.1 本章重点	(181)
10.2 基本概念题	(181)
10.3 习题解答	(182)
10.4 自测练习题	(200)
第 11 章 多自由度非线性系统的振动分析	(204)
11.1 本章重点	(204)

11.2 基本概念题.....	(204)
11.3 习题解答.....	(204)
11.4 自测练习题.....	(213)

第四篇 专题部分

第 12 章 随机振动与动态信号分析处理	(216)
12.1 本章重点.....	(216)
12.2 基本概念题.....	(216)
12.3 习题解答.....	(217)
12.4 自测练习题.....	(231)
第 13 章 结构的动态特性设计	(235)
13.1 本章重点.....	(235)
13.2 基本概念题.....	(235)
13.3 习题解答.....	(236)
13.4 自测练习题.....	(247)
第 14 章 隔振、减振与振动控制.....	(250)
14.1 本章重点.....	(250)
14.2 基本概念题.....	(250)
14.3 习题解答.....	(257)
14.4 自测练习题.....	(258)

第1章 绪论

§ 1.1 本章重点

- 1.1.1 动力学问题的分类;
- 1.1.2 自由度与广义坐标;
- 1.1.3 约束及其分类;
- 1.1.4 虚位移、虚功与虚功原理;
- 1.1.5 动能与势能;
- 1.1.6 建立系统运动方程的常用方法。

§ 1.2 基本概念题

1.2.1 动力自由度与结构力学几何构造分析中所说的自由度有什么不同?

提示:动力自由度是指由于系统的弹性变形而引起各质点的位移分量,而结构力学几何构造分析中所说的自由度是指结构中的刚体由于约束不够而产生的刚体运动。

1.2.2 动力学问题按照系统特性及输入、输出关系可分为三类问题,试问:这种划分是不是绝对的?

提示:应该不是绝对的,因为工程中还有不少动力学问题,输入、输出或系统特性并不都是完全已知的,往往只知道其中的一部分,因此有可能是一个混合问题。

1.2.3 约束有定常约束和非定常(与时间有关)约束之分,因为虚位移一定要满足约束条件,所以虚位移往往与时间有关,这种说法是否正确?

1.2.4 描述系统运动的坐标数是否总是与系统的自由度数相等?

提示:不一定,要看系统中是否存在非完整约束。由于非完整约束的不可积性,无法应用约束方程消去某些变量。因此,要描述非完整系统,需要的坐标数总是大于系统的自由度数。

1.2.5 对于受非理想约束的完整定常系统,如何应用虚功原理?

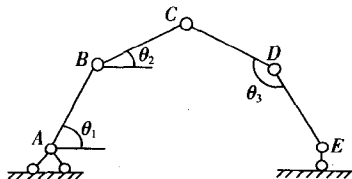
1.2.6 拉格朗日方程适合于保守系统,是否也适合于非保守系统?

§ 1.3 习题解答

【1.1】 分析图示机构的自由度数。

解:视 AB、BC、CD 和 DE 为刚体,按结构力学的几何组成分析,机构的自由度为

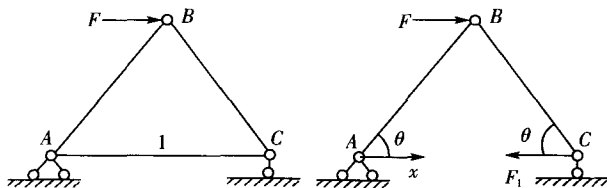
$$n = 4 \times 3 - 3 \times 2 - 3 = 3$$



题 1.1 图

也可以取图示的三个转角为广义坐标。因此,该机构具有 3 个自由度。

【1.2】 图示的三角形桁架,各杆的边长相等,试用虚位移原理求 1 杆的内力。



题 1.2 图

解:将 1 杆截断,以轴力 F_1 代替。设各杆长为 a ,取图示的坐标系,则有

$$x_B = a \cos \theta, x_C = 2a \cos \theta$$

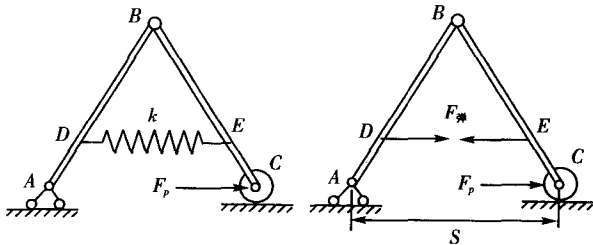
$$\delta x_B = -a \sin \theta \cdot \delta \theta$$

$$\delta x_C = -2a \sin \theta \cdot \delta \theta$$

根据虚功原理:

$$\delta W = F \delta x_B - F_1 \delta x_C = 0, \text{ 即: } F_1 = F \delta x_B / \delta x_C = 0.5 F$$

【1.3】 图示机构,已知 $AB = BC = l$, $DB = a$,弹簧的刚度系数为 k ,当 AC 间的距离等于 s_0 时弹簧处于自然位置,现在 C 点作用一水平向右的力 F_p ,求平衡时 AC 的距离 s 。



题 1.3 图

解:将弹簧解除,代之为弹性恢复力 $F_{\text{弹}}$ 。根据几何关系有:

$$DE = a \cdot s / l, \quad \delta(DE) = a \cdot \delta s / l$$

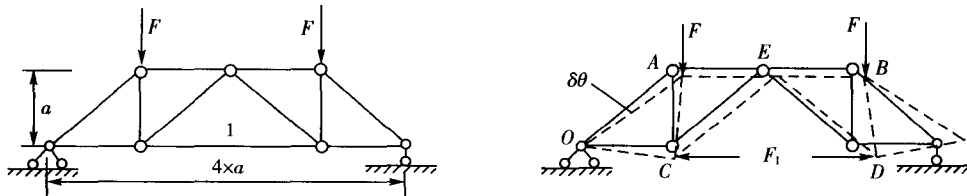
$$F_{\text{弹}} = k(s - s_0) \cdot a / l$$

根据虚功原理:

$$\delta W = F_p \delta s - F_{\text{弹}} \delta(DE) = 0$$

$$\text{整理得: } s = s_0 + \frac{F_p l^2}{k a^2}.$$

【1.4】 图示平面桁架,各斜杆与水平线成 45° 角度,求 1 杆的内力。



题 1.4 图

解: 将 1 杆撤除, 以轴力 F_1 代替, 并给剩余结构以虚线所示的虚位移。设 OA 杆有一虚位移转角 $\delta\theta$, 则各力作用点的虚位移为:

$$\delta y_A = \delta y_B = \sqrt{2}a \cdot \sin 45^\circ \delta\theta = a \cdot \delta\theta$$

$$\delta x_C = 0, \quad \delta x_D = 2\delta x_E = 2 \times \sqrt{2}a \cdot \cos 45^\circ \delta\theta = 2a \cdot \delta\theta$$

根据虚功原理:

$$\delta W = \sum F \delta s = 2F \delta y_A - F_1 \delta x_D = (F - F_1) \times 2a \delta\theta = 0$$

解得: $F_1 = F$ 。

【1.5】 用虚功原理求图示多跨静定梁中 A、B、D 和 F 支座处的反力。

解: 为求支座 A 处的竖向反力, 将支座 A 撤除, 用反力 Y_A 代替。设 ABC 杆有虚转角 $\delta\theta$, 则各力作用点处的虚位移为: $\delta y_A = 2a \cdot \delta\theta$, $\delta y_C = \delta y_G = a \cdot \delta\theta$, 根据虚功原理有

$$\begin{aligned} \delta W &= Y_A \delta y_A + F_2 \delta y_C + F_1 \delta y_G + M \delta\theta \\ &= (2Y_A + F_1 + F_2 + M/a) \cdot a \delta\theta = 0 \end{aligned}$$

解得: $Y_A = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2 + M/a)$;

同样, 为求支座 B 处的竖向反力, 将支座 B 撤除, 用反力 Y_B 代替。设 ABC 杆有虚转角 $\delta\theta$, 则 CDE 和 EFG 的转角各为 $3\delta\theta$, 各力作用点处的虚位移为: $\delta y_B = -2a \cdot \delta\theta$, $\delta y_C = \delta y_G = 3a \cdot \delta\theta$, 于是

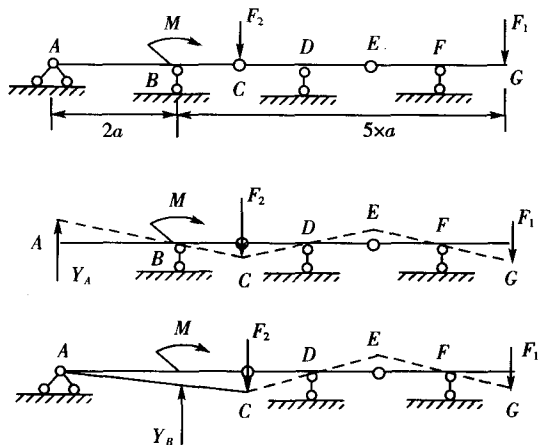
$$\delta W = Y_B \delta y_B + F_2 \delta y_C + F_1 \delta y_G + M \delta\theta = (-2Y_B + 3F_1 + 3F_2 + M/a) \cdot a \delta\theta = 0$$

解得: $Y_B = \frac{1}{2}(3F_1 + 3F_2 + M/a)$;

同理可解出: $Y_D = -2F_1$, $Y_F = 2F_1$ (均以向上为正)。

【1.6】 质量为 m_1 和 m_2 的两物体悬挂如图所示, 两弹簧的刚度系数分别为 k_1 和 k_2 , 试分别用拉格朗日方程和哈密顿原理列出两物体的运动微分方程。

解: (1) 用拉格朗日方程推导运动方程:



题 1.5 图

系统有两个自由度,选静平衡位置为广义坐标 x_1 和 x_2 的起始位置,求出系统的动能、势能及拉格朗日函数分别如下:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2), V = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

由保守系统的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

得:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

或写成矩阵形式:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ 。同样,拉格朗日函数也可以用矩阵形式表达为: $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{K}\mathbf{x}$, 由下列矩阵形式的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

同样能得到方程(1)。可以看出,用矩阵形式推导运动方程非常简洁方便。

(2) 用哈密顿原理推导运动方程:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}\mathbf{x}) dt = - \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{x}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x}) dt = 0$$

由 $\delta \mathbf{x}$ 的任意性, 同样有: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。

【1.7】 图示系统,质量块 A 由刚度系数为 k 的弹簧与基础相连,质块上又连接一摆长为 l 的单摆 B, 质块的质量为 m_1 , 单摆的质量为 m_2 , 试列出系统的运动微分方程。

解: 系统有两个自由度,选静平衡位置为广义坐标 x, φ 的起始位置,广义力和动能为

$$Q_x = -kx, Q_\varphi = -m_2 gl \sin \varphi,$$

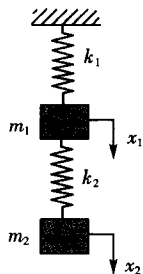
$$T = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2$$

图中摆作平面运动,故

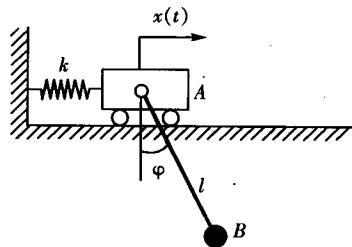
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

即: $v_B^2 = v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos \varphi$

式中 $v_A = \dot{x}$, $v_{BA} = l\dot{\varphi}$, 故动能可进一步写为



题 1.6 图



题 1.7 图

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{x}^2 + (l\dot{\varphi})^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi]$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$

得运动微分方程 $(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -kx$

$$m_2l\ddot{x}\cos\varphi + m_2l^2\ddot{\varphi} - m_2l\dot{\varphi}\sin\varphi = -m_2gl\sin\varphi$$

此系统是保守系统,所以也可取 $x=0, \varphi=0$ 处为该系统的零势能位置,系统在图示一般位置上的势能为: $V = \frac{1}{2}kx^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$ 。将其代入保守系统的拉格朗日方程即可得到同样的运动微分方程。

若系统只在平衡位置附近作微幅振动,则 $\cos\varphi \approx 1, \sin\varphi \approx \varphi$, 令高阶小量 $\varphi^2 = 0$, 故有 $\varphi\dot{\varphi} = 0$, 所以运动微分方程可化简为

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\varphi} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

【1.8】 一个匀质的刚性细杆悬挂在细绳 OA 上,绳的长度为 l ,细杆的长度为 $\frac{1}{2}l$,总质量为 m ,试推导系统的运动微分方程。

解:系统有两个自由度,对细杆取图示的局部坐标, O 点为重力势能的零势能位置,则系统的动能和势能分别为:

$$T = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} \int_0^{l/2} (x^2 + y^2) \frac{2m}{l} ds$$

$$V = -mg(l\cos\varphi_1 + \frac{1}{4}l\cos\varphi_2)$$

由于:
$$\begin{cases} x = l\cos\varphi_1 + s\cos\varphi_2, y = l\sin\varphi_1 + s\sin\varphi_2 \\ \dot{x} = -\dot{\varphi}_1 \cdot l\sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_2 s \cdot \sin\varphi_2 \\ \dot{y} = \dot{\varphi}_1 \cdot l\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2 s \cdot \cos\varphi_2 \end{cases}$$

$$\text{则: } \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}_1^2 + s^2\dot{\varphi}_2^2 + 2ls(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

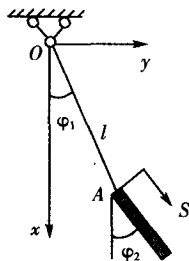
$$\approx l^2\dot{\varphi}_1^2 + s^2\dot{\varphi}_2^2 + 2ls\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

于是:
$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l/2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{2m}{l} ds = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{12}\dot{\varphi}_2^2)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{12}\dot{\varphi}_2^2) + mg(l\cos\varphi_1 + \frac{1}{4}l\cos\varphi_2)$$

由保守系统的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$



题 1.8 图

并考虑到 $\sin\varphi_1 \approx \varphi_1, \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \frac{g}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

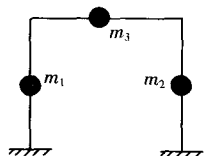
§ 1.4 自测练习题

1.4.1 (填空题) 图示两个系统, 已知各质点的质量 m_i , 刚架的质量不计, 忽略杆的轴向变形, 试分别确定两系统的动力自由度:

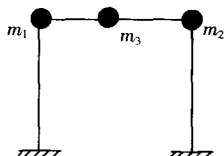
(1) $n =$ _____; (2) $n =$ _____.

1.4.2 (填空题) 图示两个系统, 已知各质点的质量 m_i , 刚架的质量不计, 忽略杆的轴向变形, 试分别确定两系统的动力自由度:

(1) $n =$ _____; (2) $n =$ _____.

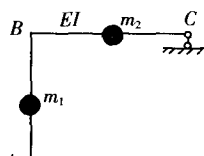


(1)

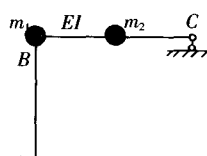


(2)

题 1.4.1



(1)



(2)

题 1.4.2

1.4.3 (选择题) 拉格朗日方程的适用范围是: 系统所受的约束为

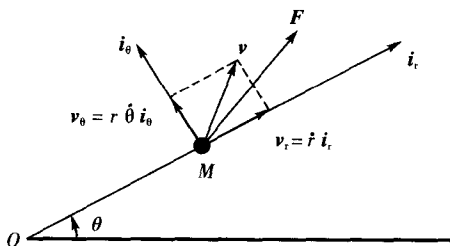
(1) 几何约束; (2) 定常约束; (3) 理想约束; (4) 完整约束。

1.4.4 (演绎题) 用拉格朗日方程推导质点在平面极坐标系下的运动方程。

解: 质点在平面内运动时有两个自由度, 选极坐标 r 和 θ 为广义坐标, 速度分量为 $\dot{r}$ 和 $\dot{\theta}$, i_r 和 i_θ 分别为 r 和 θ 方向的单位矢量, 作用在质点上的主动力 F 在两方向上的投影分别为 F_r 和 F_θ 。质点的绝对速度和动能分别为:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$



题 1.4.4

根据虚功原理可以求出对应于广义坐标 r 和 θ 的广义力

$$Q_r = \frac{\delta W_r}{\delta r} = \frac{F_r \delta r}{\delta r} = F_r; Q_\theta = \frac{\delta W_\theta}{\delta \theta} = \frac{F_\theta \cdot r \delta \theta}{\delta \theta} = F_\theta r$$

将上述结果代入拉格朗日方程: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = F_r$ 和 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = F_\theta$, 得

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

1.4.5 由弹簧约束的物理双摆,两杆的长度均为 l ,两球的质量均为 m ,两根弹簧的刚度系数均为 k ,以 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 为广义坐标,试建立系统的运动方程。

1.4.6 一半圆形状圆柱体的质量为 m ,在水平面上滚动而无滑动地作微幅摆振,圆柱半径为 r ,质心 C 距圆心的距离为 e ,图中的 φ_m 为最大摆幅,绕通过形心轴线的转动惯量为 I ,或回转半径的平方 $i^2 = I/m$ 。试建立圆柱体作微小振动的运动方程。

解:系统具有一个自由度,选半圆柱偏离平衡位置的角度 θ 为广义坐标,取零势能在平衡位置,考虑到接触点 A 为速度瞬心,并略去高阶微量,可将系统的动能和势能表为:

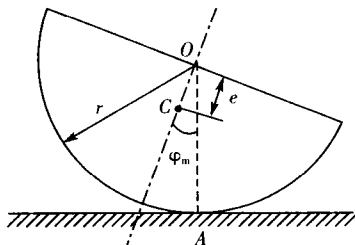
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} [J_C + m \cdot \overline{AC}^2] \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} [J_o - me^2 + m \cdot (R^2 + e^2 - 2Re \cdot \cos\theta)] \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} mR^2 - 2mRe \cdot \cos\theta \right] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} mR^2 - 2mRe \right] \dot{\theta}^2 \\ V &= mge(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} mge\theta^2 \end{aligned}$$

代入拉格朗日方程得运动方程如下:

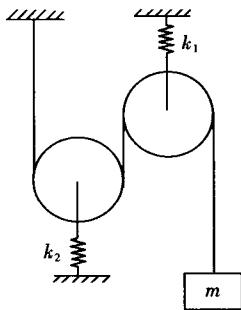
$$\left(\frac{3}{2} mR^2 - 2mRe \right) \ddot{\theta} + ge\theta = 0$$

1.4.7 图示两个滑轮分别由两根弹簧支持,用不可伸长的软绳绕过两滑轮悬吊一质量为 m 的重物,滑轮的重不计,试求重物的运动方程,并求等效刚度及重物作微幅振动的周期。

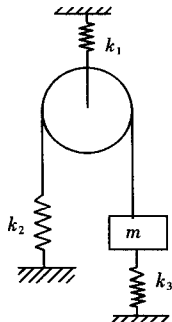
1.4.8 图示滑轮由弹簧 k_1 支持,用不可伸长的软绳绕过滑轮分别连接弹簧 k_2 和悬吊质量为 m 的重物,滑轮的重不计, $k_1 = 2k, k_2 = k_3 = k$,试求系统的固有频率。



题 1.4.6



题 1.4.7



题 1.4.8

第一篇 离散系统的线性振动

第2章 单自由度系统的振动

§ 2.1 本章重点

- 2.1.1 单自由度系统的力学模型与运动方程的建立;
- 2.1.2 固有频率及求固有频率的几种常用公式;
- 2.1.3 无阻尼自由振动的响应及其特点;
- 2.1.4 有阻尼自由振动的响应及其特点;
- 2.1.5 能量法求系统的固有频率;
- 2.1.6 简谐荷载作用下系统的动力响应;
- 2.1.7 矢量分析法原理;
- 2.1.8 周期荷载作用下系统的动力响应;
- 2.1.9 任意荷载作用下系统的动力响应,杜哈美积分;
- 2.1.10 求动力响应的数值方法;
- 2.1.11 动力响应的频率分析法,富里叶积分。

§ 2.2 基本概念题

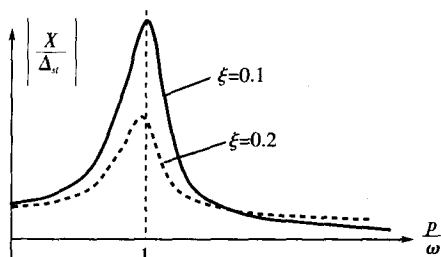
2.2.1 一台转动机械从启动到工作转速正好要经过系统的固有频率(又称为转子的临界转速),为减小共振,便于转子顺利通过临界转速,通常采用什么措施比较直接有效?并简单说明原因。

提示:影响系统的动力响应主要有四方面因素:(1) 系统的固有特性;(2) 激振力的频率;(3) 激振力的大小,可以通过转子的动平衡来调节;(4) 系统的耗能(阻尼)特性。对本题来讲,前两方面因素应该是确定的,应重点从后两方面考虑。

2.2.2 某多层车间厂房,生产设备安装在楼板上。已知生产设备中有四级传动机构,各级转子的转速分别为1500转/分、3000转/分、4200转/分和6000转/分。若在生产过程中设备附近的楼板发生了强烈的周期振动,为达到减振的目的,针对下面出现的两种情况,应采取什么样的措施来解决?(1) 经过振动测试与频谱分析,发现楼板振动的主要成分是频率为 $f = 70\text{Hz}$ 的简谐振动;(2) 经过对设备的反复动平衡调试,楼板的振动虽然有所缓解,但仍有较明显的振感。

提示:见题 2.2.1 的提示。(1) 查明振源主要从分析受迫振动的频率着手;(2) 在受迫振动无法消除的情况下,采取隔振和阻尼耗能等措施是很有效的。

2.2.3 单自由度系统受迫振动的幅频曲线如图,其中 ω 为系统的固有频率, p 为激振力的频率, X 为振幅, Δ_s 为静变形。现用汽车运送精密仪器,由于地面的高低不平将引起车身的振动。为减小精密仪器的受迫振动,常在精密仪器下面铺垫海绵或塑料泡沫等弹性材料,请说明其中的道理。

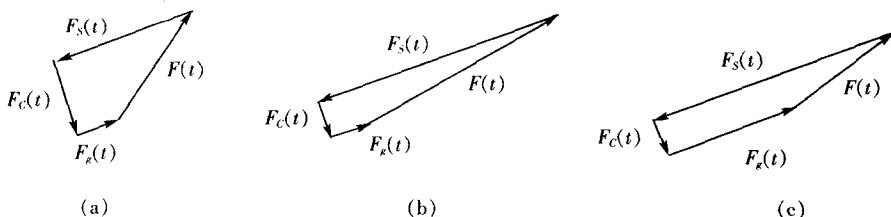


题 2.2.3 图

提示:见题 2.2.1 的提示。不过,此时除激振力的频率外,其他三方面因素都起作用。

2.2.4 下图几种情况是反映单自由度系统动平衡的矢量关系图,其中 $F(t)$ 为外力, $F_s(t)$ 为弹性恢复力, $F_c(t)$ 为阻尼力, $F_k(t)$ 为惯性力,试问哪种情况能近似为静力问题来处理,并简单说明理由。

提示:主要看与平衡的外力相比,弹性恢复力 $F_s(t)$ 所占比例的大小。



题 2.2.4 图

2.2.5 (简答题) 对单自由度系统,何为柔度系数?何为刚度系数?它们之间的关系是什么?

2.2.6 (简答题) 举例说明振动系统自由振动和受迫振动的相同点和不同点。

2.2.7 人站在桥上可以感受到桥面的振动,试问当车辆行驶在桥上和驶离桥面后桥面的主要振动特征有什么不同?

提示:汽车行驶在桥面时所引起的振动是受迫振动,汽车驶离桥面后桥面的振动是自由振动。

2.2.8 降低高频振动和低频振动所采取的措施各有什么不同?

提示:当受迫振动的频率较高时,可以调节系统的固有频率,使激振频率远大于系统的固有频率而处于减振区,如采取隔震措施;当受迫振动的频率较低时,一般避开共振比较困难,这时采取阻尼减振往往是非常有效的。

2.2.9 为减小大跨、高柔结构的风致振动,最常见和有效的方法有哪些?试举例说明。

提示:见习题 2.2.8 的提示。

2.2.10 什么是单位脉冲响应?什么是单位阶跃响应?它们分别对应何种激励形式?

2.2.11 阻尼对结构系统自由振动的动力响应有什么影响?在实践中常用什么方法测量系统的阻尼系数?

2.2.12 阻尼对结构系统受迫振动的动力响应有什么影响?在实践中常用什么方法测

量系统的固有频率?

2.2.13 求解单自由度系统的动力响应一般采用杜哈美(Duhamel)积分,试说明其物理含义。

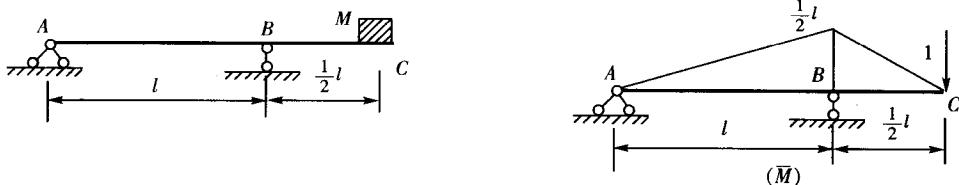
2.2.14 如果一个信号(可以理解为任一形式的动力响应)的频谱特性为周期函数,那么该信号在时域内具有什么样的特征?

提示:考虑周期函数的性质及时域和频域的对偶性。

2.2.15 如何求一个单自由度系统的复频响应函数?

§ 2.3 习题解答

【2.1】 外伸梁的尺寸如图所示,梁的抗弯刚度为 EI ,伸臂的端点固定一质量为 M 的重物,不计梁的质量,试确定其自由振动的频率;若在初始时刻给重物一个初速度 v_0 ,求其自由振动的响应,包括振幅和相位。



题 2.1 图

解:质点 M 在垂直方向振动,为确定单自由度系统的振动,首先要计算等效刚度。为此,应用单位荷载法计算柔度系数,在伸臂端作用单位竖向荷载,作出单位弯矩图 $\bar{M}$ 。

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int \bar{M}^2 ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{8} \right) \times \frac{l}{3} = \frac{l^3}{8EI}$$

$$\therefore k = \frac{1}{\delta} = \frac{8EI}{l^3}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{8EI}{Ml^3}}$$

初始条件为: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$; 自由振动的响应为: $x = A \sin(\omega t + \varphi)$

其中,振幅: $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} = \frac{\dot{x}_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{Ml^3}{8EI}}$ 相位: $\varphi = \arctan \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} = 0$ 。

【2.2】 一根梁两端由刚度系数为 k 的弹簧支承, $EI = \infty$ 。在梁的不正中位置有一质量为 M 的重物,略去梁的质量,试计算重物作自由振动的周期。

解:取两弹簧未变形的位置为坐标原点,在运动过程中,设重物的位移为 $Y(t)$,两弹簧的变形分别为 y_1 和 y_2 ,则其弹性恢复力分别为:

$$F_1 = ky_1, F_2 = ky_2$$

而系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} M \dot{Y}^2, V = \frac{1}{2} k (y_1^2 + y_2^2)$$