

结构抗震 H_2 / H_∞ 优化控制与仿真

沙成满 王恩德 杨冬梅 著



東北大學出版社
Northeastern University Press

结构抗震 H_2 / H_∞ 优化控制与仿真

ISBN 7-81102-319-9



9 787811 023190 >

ISBN 7-81102-319-9 定价: 18.00元

结构抗震 H_2/H_∞ 优化控制与仿真

沙成满 王恩德 杨冬梅 著

东北大学出版社

• 沈 阳 •

© 沙成满 王恩德 杨冬梅 2006

图书在版编目 (CIP) 数据

结构抗震 H_2/H_∞ 优化控制与仿真 / 沙成满, 王恩德, 杨冬梅著. — 沈阳: 东北大学出版社, 2006.9

ISBN 7-81102-319-9

I. 结… II. ①沙… ②王… ③杨… III. 建筑结构—抗震设计 IV. TU352.104

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 110030 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 184mm×230mm

印 张: 7.5

字 数: 151 千字

出版时间: 2006 年 9 月第 1 版

印刷时间: 2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑: 孙 锋

封面设计: 唐敏智

责任校对: 闻 洋

责任出版: 秦 力

定 价: 18.00 元

前 言

随着世界经济技术的飞速发展, 钢结构、剪力墙等新的建筑结构形式不断出现和完善, 使得建筑物的高度不断提高, 高层和超高层建筑不断涌现. 相应地, 建筑物的抗震设计也从提高自身强度转向隔震与控震. 自从 Yao (1972) 提出结构控制的思想以来, 结构控制的理论与技术都得到了长足发展, 针对控制方案、算法设计, 国内外已经有很多学者从事这方面的研究工作.

本书是在前人工作基础上, 根据作者近几年的科研与教学工作总结撰写而成, 介绍了当前工程抗震领域的一些重要研究课题所取得的研究成果, 目的是向读者介绍结构 H_2/H_∞ 优化控制等领域的基本理论、基本思想和研究方法, 使读者能够在短期内快速地进入这一领域.

全书共分 9 章: 第 1 章为绪论; 第 2 章介绍了结构系统的范数等基本概念和定义; 第 3 章讨论了结构的以状态空间形式表达的结构系统方程, 其中的结构模型部分考虑了结构—岩土相互作用是本书的一个特色; 第 4~6 章讨论了结构的 H_2 控制、 H_∞ 控制和混合 H_2/H_∞ 控制问题; 第 7 章讨论了参数摄动情况下的鲁棒控制问题; 第 8 章讨论了时间域离散控制问题; 第 9 章为研究工作展望. 读者可根据自己的情况选读. 为了方便读者阅读, 尽量保证理论体系完整, 本书安排了有关基本概念和定义的章节, 但限于篇幅, 并未对更多的数学基础加以叙述, 相关的详细理论证明和概念请参阅相关书籍, 一般要求读者具备线性系统理论、结构力学和一定的数学基础.

本书适合于结构工程、工程力学、岩土工程、控制理论与工程等与之相关的工程与应用专业的研究人员和教师阅读及参考, 也可供有关专业的研究生和高年级本科生作为参考书.

研究工作得到了中国博士后基金(编号:2004036156)和教育部博士点基金(编号:20050145032)的资助,在此深表感谢.作者还要感谢东北大学岩土工程研究所刘斌教授给予的指导与支持,感谢东北大学资源与土木工程学院、人事处、科研处领导对博士后基金项目、博士点基金项目的关怀和支持.

由于作者水平所限,加之时间仓促,书中定有许多疏漏和不完善之处,恳请读者指正.

作 者

2006 年 6 月

于东北大学

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究现状	2
1.3 研究方法	4
1.4 内容安排	5
第 2 章 结构的系统理论基本知识 with 基本概念	7
2.1 状态空间模型与传递函数	7
2.2 线性分式变换	8
2.3 范数的定义	9
第 3 章 结构系统分析	14
3.1 不考虑 SSI 影响的系统方程	14
3.2 考虑 SSI 影响的系统方程	18
3.3 结构系统的反馈优化控制	25
第 4 章 结构 H_2 控制问题	27
4.1 结构 H_2 控制问题的提出	27
4.2 结构 H_2 输出反馈控制算法	29
4.3 结构仿真模型及其分析	31
4.4 SSI 对结构 H_2 输出反馈控制的影响	34
第 5 章 结构 H_∞ 控制问题	41
5.1 结构 H_∞ 控制问题的提出	41

5.2 结构 H_∞ 输出反馈控制算法	42
5.3 SSI 对结构 H_∞ 动态输出反馈优化控制的影响	44
第 6 章 结构 H_2/H_∞ 混合控制问题	52
6.1 结构 H_2/H_∞ 混合控制问题的提出	52
6.2 基于地震波能量范数 (P) 的 H_2/H_∞ 混合控制	54
6.3 基于地震波一般范数定义的 H_2/H_∞ 混合控制 LMI 方法	57
6.4 不考虑 SSI 的结构 H_2/H_∞ 混合优化控制的仿真与分析	58
6.5 考虑 SSI 的结构 H_2/H_∞ 混合优化控制的仿真分析	63
第 7 章 结构鲁棒控制问题	70
7.1 结构摄动分析	71
7.2 结构系统鲁棒控制方案	74
7.3 不考虑 SSI 的结构系统鲁棒控制仿真研究	77
7.4 考虑 SSI 的结构系统鲁棒控制仿真研究	80
7.5 考虑岩土动力学参数摄动结构系统鲁棒控制仿真研究	87
第 8 章 结构离散系统控制问题	92
8.1 第一工况	93
8.2 第二工况	96
第 9 章 研究工作展望	102
9.1 结论分析	102
9.2 研究展望	103
参考文献	105
附 录	113

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景

地震是困扰人类的一大自然灾害,地震的发生,轻者影响人类的正常生产、生活,重者造成生命及财产损失,因此,工程抗震问题一直是世界各国土木工程领域研究的热点.第二次世界大战结束的半个多世纪以来,随着科学技术和工程建设的突飞猛进,地震工程的理论和实践得到了很大的发展,人们已经能够利用计算机对高度复杂的结构体系进行非线性弹塑性地震反应分析,并以大型模拟地震振动台的实验作为辅助和检验,从而建立起能够反映实际的工程抗震设计方法.

在地震载荷作用下,为了满足结构对于强度、刚度和稳定性的要求,不得不增加建筑材料,加大结构的截面面积.尤其是高耸结构、大跨度桥梁等,其防振抗震要求更高,为确保结构安全和让居住者感到舒适,地震时结构不能有剧烈摇晃和过量变形,此类结构若只靠增强自身结构来抵御地震等外来动载荷,满足结构刚度和舒适度要求,这将使工程造价剧增.许多研究表明,要解决这一难题,与其从增加结构的强度、刚度方面考虑,不如使用隔振、控振的方法;另一方面,建筑变得越高,它们就越具有柔性,正常载荷条件下,对于一个理想的设计,结构的反应将保持在一个安全的范围内.当一个结构太具柔性,通过传统实践总结出来的设计规范就可能变得不太适用.对这些问题的解决是通过改变结构设计,从而导致了结构控制概念的诞生.第一个提出在结构工程中使用控制的是 Yao^[1] (1972), Yao 认为结构的变形等性能能够通过控制手段加以控制,以使它们在环境载荷作用下,能保持在一个指定的范围内,为确保安全,结构的位移需要限制,对于建筑的居住者,从舒适方面考虑,需要限制加速度.

进入 20 世纪 80 年代以来,很多学者开始了结构隔振与控振的研究^[2-28],由此,结构的振动控制研究不断深入,已逐渐形成一门新兴学科,国内外都有许多研究成果和工程实例.它的核心思想是利用结构振动控制理论,采用某种控制装置来施加控制力,抑制结构的动力反应,从而改变了传统的加强承重结构来抵抗地震载荷的方法,所以,结构振动控制开创了结构抗震设计的一个新时代.

结构振动的控制方式分为被动控制和主动控制两种.被动控制针对计算到的结构的

几个低阶振型,设计阻尼或耗能装置,给结构施加力,以抵消或削弱地震载荷的影响^[5,10,19,27].与主动控制相比,被动控制以其设计安装简单、易于维护和不用耗能等优点被广为采用,其理论和实践都发展很快,提出了很多控制方案和措施,国内外都有很多工程实例,著名的有美国纽约世贸中心(110层)、匹兹堡钢铁大厦(64层)等使用 VD(Viscoelastic Dissipator,即黏弹性耗能器),澳大利亚悉尼电视塔、纽约的西蒂柯布中心(Citicorp Center)、波士顿的约翰·汉考克大厦(John Hancock Tower)等使用 TMD(Tuned Mass Damper,即调频质量阻尼器),310.10米高的南京电视塔采用 TLD(Tuned Liquid Damper,即调频液体阻尼器),等等.

振动主动控制即在受控结构的有关部位安装结构变形传感器,如绝对加速度传感器、光纤及应变片等传感设备,传感器将检测到的信息实时传递到主控计算机,计算机按照事先编制的控制方案(算法)计算出需要施加给结构的控制力,再由主控计算机将控制信息传递到伺服机构,与被动控制相比较,所施加的控制力是经过在线反馈计算的,具有极佳的控制效果,但设计安装复杂,需要耗能,安装、维护成本高,因此,国内外工程实践中还未普及,较少采用.20世纪80年代,基本停留在理论及实验室研究和少数工程试点阶段,90年代以来,随着工业技术的提高及一批大型超高建筑的建设,对控制效果的要求不断提高,主动控制的研究热潮在北美、日本等发达国家兴起,并逐渐开始应用于工程实践^[2-5].

1.2 研究现状

在结构控制中,控制的目的是用控制装置施加给结构的控制力去换取结构的位移(以及速度和加速度),优化控制方案的基本研究思想总是谋求控制效果与控制代价的最佳组合,用最小的控制代价获得最大的控制效果,使能耗与受控后的节点位移这对矛盾得到统一.因此,系统的受控输出 Z 由结构位移(也可以包括加速度和速度)和控制力的加权线性二次型构成,是控制优化的最终目标,最优控制的目的就是寻求一个控制方案,使闭环后系统受控输出 Z 极小化.

20世纪80年代就有学者研究主动控制算法,并提出了很多控制方案.但最早系统提出结构优化 H_2, H_∞ 控制算法的应属 B. F. Spencer Jr. 等人(1994)^[10],应用现代控制理论,将 H_2, H_∞ 范数赋予物理含义,设计出结构控制 H_2 和 H_∞ 输出反馈算法,并对多种地震波激励下结构未受控和受控闭环系统进行了系统的仿真研究,代表性的有 Scotte Breneman 等人(1998)^[62]全面研究了 H_∞ 控制方案,对位移、速度及加速度分别与控制力的不同权数对控制效果的影响;Seshasayee Ankireddi(1999)^[101]研究了离散 H_2 控制问题,并

进行了时域和频域仿真分析,等等.综合前人工作,有如下方面问题需要解决.

①前人的大多数研究是建立在“结构的基础是固定的”假设基础上,大多未考虑地基岩土动力学特性的影响,即结构—岩土相互作用(Structure-Soil Interaction,简称 SSI)的影响.一般地讲,对于一般建筑结构,由于软岩尤其是风化壳岩石或土能起到衰减地震波的作用,SSI 的作用能降低结构的反应,因此,不考虑 SSI 的抗震设计将使结构偏于安全,但对于高耸结构,SSI 的影响分为两个方面:一方面,由于增加了基础的平移和转动而增加了结构反应;另一方面,又起到衰减地震波的作用,最后结构要看哪方面因素占主导地位.但 SSI 对结构控制律的影响还不清楚,只是 20 世纪 90 年代初岩土的动力学特性对结构控制方案的影响才被认识到(Wong and Luco, 1991)^[9,31],岩土地基与结构相互作用对控制律有相当大的影响,他们的方案基于在结构的顶端或节点控制震动波的反射与传播,以此改变能量流. S. M. Shahid Alam(1994)^[3]研究了 SSI 对一种优化控制律的影响,结果表明,SSI 对控制律的影响是相当大的,并给出了基于状态观测器的状态反馈控制器形式的解,但未给出具有输出反馈形式的解.由于位移状态不易观测,应用价值受限.因此,结构抗震 H_2 , H_∞ 控制的诸多领域有待进一步研究.

②对于结构的地震分析,无论是应用有限元、边界元还是应用离散元等各种数值分析方法,都分为确定性分析和非确定性分析^[26,33-37],前者假定地震信号是确定的(例如通常采用 San-Fernando 波和 El-Centro 波),后者则把地震信号作为随机变量去研究.而对于控制律的研究,与确定性分析相对应, H_∞ 控制要求地震信号属于某一确定性集合,并考虑其中最坏情况,因此,确保系统安全,并使系统具备一定的鲁棒性能,但所得控制方案并未考虑地震信号属于该集合外很高的概率情况,过于保守,浪费控制能源;与随机分析相对应, H_2 控制是基于 LQG(Linear Quadratic Gauss,即线性二次型高斯)的随机控制理论上^[48,53-56],将地震信号作为随机过程考虑,认为地震信号发生在整个频域上的概率是均等的,把地震波作为零均值、单位方差(或均值、方差为常量)的高斯白噪声过程处理,以此求出最优或次优控制方案,但由此所得结论是建立在统计结论基础上,是标称值的总体优化,未考虑其他小概率信号一旦发生所产生的严重后果.因此,单一 H_2 或 H_∞ 方案都是不全面的.

③未讨论结构摄动对控制律的影响.事实上,人们在把实际问题抽象成结构模型时,作了很多假设,并且结构的很多参数都无法直接测到或测准,如结构的刚度、弹性模量、阻尼系数;当考虑 SSI 的影响时,地基岩土的弹性模量、泊松系数、阻尼系数以及地震波传播的剪切波速都不易测准,因此,必然产生结构模型的摄动,结构摄动下控制系统的鲁棒性问题不容忽视,鲁棒性差的控制律,轻者影响控制效果,重者导致闭环系统失去稳定,产生灾难性后果.

1.3 研究方法

控制方案的设计方法分为时域和频域两种,在时域上的控制器设计,目前已有不少成果发表^[26,29,37].近年来,在频域上做出的优化控制设计方案也见于很多控制类文献,并极具吸引力.众所周知,结构的动力行为以及动力源经常是以频域函数形式给出的,作为直接进行模型分析的传递函数,是以频率形式表达的.各种动力灾害,如地震、台风(强风)、海啸巨浪等,经常被模型化为随机过程,在频域内,通过能量谱密度表达,频域优化控制设计允许设计者直接处理这些结构模型的原始表达和输入激励信号.这些方法也允许设计者在期望的频率范围内进行控制方案的设计,以及在高频段降低控制行为,因为在高频段测量噪声和不确定性会显著增加.频域设计方法已经被广泛接受,如 Doyle etc. (1989)^[49]提出的 H_∞ 控制方案就是在频域上完成的.由此本书的控制方案主要是在频域上设计的,在进行仿真研究中,主要以单位频域响应为主,对于离散控制系统问题,进行了时域上的仿真研究.

为了检验控制算法的有效性,必须对其进行实践检验.应该说,最有效的检验手段就是实验研究,最有影响的实验研究应属美国 B. F. Spencer(1998)^[5],为便于对控制方案的比较等提出实验模型标准化问题(Benchmark Problem).他在美国印第安纳州圣母大学(Uni. of Notre, IN. U. S. A.)建立了一个他自己认为是标准化模型的三层钢结构实验模型,高度为 158cm,楼板总质量为 227kg,结构框架为 77kg,模型频率近似原形频率的 5 倍,模型系统的头三阶振型频率分别为 5.81, 17.68 和 28.53,与此对应的阻尼系数分别为 0.33%, 0.22% 和 0.3%,其他结构物理参数与原型对应的比例如下,力 1:60,质量 1:206,时间 1:5,位移 4:29,加速度 7:12,AMD(Active Mass Damper,即主动质量阻尼器)置于结构模型之上.AMD 质量占总质量的 1.7%,并对一些控制方案进行了实验与仿真对比研究,二者吻合得较好.

但不幸的是,由于以下原因,使控制算法的实验室研究方法受到限制:①受控结构在实验室按比例缩小,但像加速度传感器、作动器之类的设备按小比例尺制作,存在制造工艺上的困难,如果要求精度,将使实验成本提高;②由于比例尺大幅缩小,使得实验结论与实际问题的误差增加,因此,一些精度不高的实验室研究意义不大,只能作为参考;③对于复杂模型,更是难于精确再现;④控制目标的多样性.实际问题中,对于不同的结构所采取的方案是不同的,不可能都进行研究.因此,实验室研究目前也仅限于美国印第安纳州圣母大学和斯坦福大学(Stanford Uni. CA. U. S. A.)等少数几个实验室.

与此对应的是,由于以下原因,数值仿真研究被广泛使用:①由于有限元等数值计算技术的空前发展,在结构分析时,已被广泛使用,对模型的数学描述的精度令人满意,因

此,使用数值仿真验证控制算法是可行的,并已被实验及实际应用所证实;②低成本,不需要任何材料和设备,对硬件几乎无要求.因此,对于控制算法的研究,以数值仿真为主,以实验研究为辅.

前已述及,结构控制的目标主要有:控制结构位移,以确保安全;控制加速度,以保证居住者的舒适.本书的研究主要从安全角度着想,因此,所选优化目标为控制力与结构顶点位移的加权线性二次型,权数的选取主要依据对控制力和位移的重视程度,研究过程中,对各种权数的情况都作了讨论.

1.4 内容安排

本书作者根据近几年的科研成果和教学工作情况撰写而成,反映了工程抗震领域的研究现状和主要成果,同时也简要介绍了目前相关的概念与基本理论.本书在前人工作的基础上,针对目前该领域存在的一些问题,研究了当考虑结构—岩土相互作用时的结构 H_2 、 H_∞ 控制、混合控制和鲁棒控制等问题,对各种控制律的影响,内容的安排大致分为9章.

第1章为绪论,介绍了研究背景、研究现状、研究方法和内容安排.

第2章介绍了与结构控制相关的基本概念、定义和系统基本理论.包括系统的状态空间模型与传递函数,线性分式变换以及系统与输入输出信号的范数定义.

第3章主要讨论了结构模型.对于不考虑 SSI 影响的模型,考虑为具有不连续质量的梁底部约束顶部自由的受迫振动问题;考虑 SSI 的影响,在地震作用下,岩土地基的阻抗矩阵是和频率有关的,而近似地以结构的最小基频代替频率,从而使问题线性化.

第4章主要讨论 H_2 控制问题. H_2 控制是基于 LQG 理论上,将地震波视为高斯白噪声随机过程,以此求出使得闭环系统 H_2 范数极小化的控制律.对于优化输出中不同的控制力与位移权数,重点研究 SSI 对于控制律的影响.

第5章主要讨论 H_∞ 控制问题. H_∞ 控制主要考虑当地震信号与系统结构的最低阶振型共振这种最坏情况,寻求一种控制律,在频域上,最低阶振型频点处于极小化最大奇异值的上确界,以确保结构安全.本书重点研究两种不同工况、不同控制力与位移权数情况下,SSI 对控制律的影响.

第6章针对 H_∞ 和 H_2 控制方案的优缺点,引入 H_2/H_∞ 混合控制方案,将 H_2 控制、 H_∞ 控制方案加以折中.这种方案的基本思想是寻求这样一种控制方案:首先保证系统的 H_∞ 范数小于一个给定值,以此确保系统安全,在此条件下,极小化系统的 H_2 范数.在算法上,引用求解耦合 Riccati 方程和 Lyapunov 方程的方法,该方法存在初值选取的问题,

还可使用 LMI (Linear Matrix Inequation, 即线性矩阵不等式) 方法求取控制器, 并在两种不同工况、不同控制力与位移权数情况下、对闭环系统进行了仿真研究.

第 7 章主要讨论鲁棒 H_∞ 参数摄动控制问题. 讨论 SSI 加剧和减缓结构反应的两种情况是否考虑 SSI 上部结构参数、地基岩土参数弹性模量(E)、泊松系数(μ)、密度(ρ)和最小基频(ξ)等在给定区间内独立与同步摄动情况下, 寻求一种控制律, 使得闭环系统稳定, 并具备鲁棒性能, 还讨论了上述参数摄动对系统鲁棒性能的影响.

第 8 章利用 1940 年 El-Centro 波作为地震波输入, 仿真研究了标准模型 H_∞ 控制情况下, 位移和控制力的时程反应, 在时域内, 讨论了离散时间系统在不同控制力与位移权数、不同采样间隔的情况下, 两种不同工况 SSI 对于结构系统的影响.

第 9 章对一些主要结论进行了分析, 并对今后的研究进行了展望.

第2章 结构的系统理论基本知识与基本概念

在高层建筑结构的抗震控制研究中,建筑物的刚度、阻尼等参数可以认为是不随着时间改变的,因此,建立起来的模型可以认为是线性时不变系统.这一章介绍基于线性时不变系统的 H_2 , H_∞ 控制所需要的基础知识和基本概念.这些知识和基本概念为以后各章提供了基础.

2.1 状态空间模型与传递函数

考虑有限维数的线性时不变系统,描述这些系统目前常采用状态空间模型和传递函数模型.状态空间模型描述为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ z = Cx + Du. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, x 是 n 维状态向量, u 是 m 维输入向量, z 是 p 维输出向量, A, B, C, D 分别是 $n \times n, n \times m, p \times n, p \times m$ 维实数矩阵,即 $x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B \in \mathbf{R}^{n \times m}, C \in \mathbf{R}^{p \times n}, D \in \mathbf{R}^{p \times m}, \mathbf{R}^n$ 为实数向量的集合, $\mathbf{R}^{m \times n}$ 为 $m \times n$ 维实数矩阵的集合.状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 是一个一阶微分方程组,当给出初始状态 $t=0$ 时的 $x(0)$ 和输入 $u(t)$ 时,可得到以下形式的解:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

其中,矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

式中 I 为 n 阶单位阵.

除了状态空间模型外,线性时不变系统的另外一种重要描述方式是传递函数.对式(2.1)两端取拉普拉斯(Laplace)变换,并取 $x(0)=0$,得:

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s), \\ Z(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases} \quad (2.2)$$

其中,时间域信号的拉普拉斯变换分别用与之对应的大写字母表示,即 $x(t), u(t), z(t)$

的拉普拉斯变换分别用 $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{U}(s)$, $\mathbf{Z}(s)$ 表示, s 为复频率. 在式(2.2)中, 消去 $\mathbf{X}(s)$ 可得:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \quad (2.3)$$

其中,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.4)$$

定义为线性时不变系统(式(2.1))的传递函数.

传递函数把系统的输入输出直接联系起来, 是一个 $p \times m$ 维的有理函数矩阵. 当给出 $\mathbf{G}(s)$ 时, 可以找到系统的一种状态空间模型, 如式(2.1), 它是传递函数 $\mathbf{G}(s)$ 的一种状态空间实现, 把式(2.4)的实现记为:

$$\mathbf{G}(s) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$$

或

$$\mathbf{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right].$$

2.2 线性分式变换

包括建筑结构在内的所有受控对象都可以用图 2-1 所示的图形描述, 它是最一般的方框图. $\mathbf{G}(s)$ 和 $\mathbf{K}(s)$ 分别表示受控结构对象和控制器的传递函数模型. 由此引出线性分式变换的概念.

考虑如图 2-1 所示的系统, 有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

把 $\mathbf{G}(s)$ 分解成:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

它的状态空间实现为:

$$\mathbf{G}(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right].$$

显然, 有:

$$\mathbf{G}_{ij}(s) = \mathbf{C}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{D}_{ij} \quad (i, j = 1, 2).$$

设控制器的状态空间实现为:

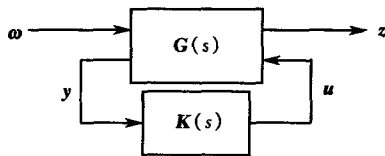


图 2-1 控制系统线性分式变换

$$G_{11}(s) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}.$$

省略其中的变量复频率 s , 则 ω 到 z 的闭环传递函数为:

$$T_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}.$$

它是 G 和 K 的线性分式变换, 其状态空间实现为:

$$T_{zw}(G, K) = \begin{bmatrix} A + B_2F_L D_K C_2 & B_2F_L C_K & B_1 + B_2F_L D_K D_{21} \\ B_K E_L C_2 & A_K + B_K E_L D_{22} C_K & B_K E_L D_{21} \\ C_1 + D_{12}F_L D_K C_2 & D_{12}F_L C_K & D_{11} + D_{12}F_L D_K D_{21} \end{bmatrix}.$$

其中,

$$E_L = (I - D_{22}D_K)^{-1}, F_L = (I - D_K D_{22})^{-1}.$$

2.3 范数的定义

2.3.1 函数空间与导出范数

(1) 时间域向量函数空间与导出范数

$L_2(-\infty, +\infty)$: 所有平方可积函数 $x(t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^n$ 所构成的函数空间, 对于 $x(t) \in \mathbf{C}^n(-\infty, +\infty)$, 有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt < +\infty.$$

其中“ $\|\cdot\|$ ”为 Euclidean 范数, 积分为 Lebesgue 积分.

在 $L_2(-\infty, +\infty)$ 上定义内积: 如果 $x(t), y(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, 则其内积定义为:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt.$$

则使 $L_2(-\infty, +\infty)$ 成为 Hilbert 空间. 由内积导出的范数定义为:

$$\|x(t)\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 频率域向量函数空间与导出范数

L_2 : 所有对频率 ξ 平方可积的复向量函数 $x(j\xi): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^n$ 全体所成的空间, 即满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(j\xi)x(j\xi)d\xi < \infty.$$