Б. П. 吉米多维奇 Б.П.ДЕМИДОВИЧ

数学分析

■习题全集■

(俄) 吉米多维奇最新版

杨立信 毕秉钧 译

安徽人民出版社

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全集

杨立信　毕秉钧　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全集./(苏)吉米多维奇著.杨立信,毕秉钅
译.—合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978-7-212-02694-3

Ⅰ.吉…　Ⅱ.①吉…②杨…③毕…　Ⅲ.数学分析—高等学校—习题
Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113601 号

责任编辑 王玉法
装帧设计 刘晓莉
出版发行 安徽人民出版社
地　　址 合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编:230063
发 行 部 0551-2833066　0551-2833099(传真)
经　　销 新华书店
印　　刷 华东有色地质勘查局研究所印刷厂
开　　本 850×1168　1/32
印　　张 20.25
字　　数 485 千
版　　次 2007 年 9 月第 2 版
印　　次 2007 年 9 月第 1 次印刷
标准书号 ISBN978-7-212-02694-3
定　　价 25.00 元

前言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现应安徽人民出版社同志的邀请，南京水利科学研究院的资深翻译杨立信译审和金陵科技学院的毕秉钧教授共同对吉米多维奇著的《数学分析习题集》俄文第13版进行精心翻译，力求对本书内容进行科学、严谨、完整的表达。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有近五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题，同时附有习题简明答案。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。

值得一提的是，本书的俄文翻译是由南京水利科学研究院的资深翻译杨立信译审和金陵科技学院的毕秉钧教授共同完成的，保证了本书内容科学、严谨、完整的表达。

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

2007年7月

目　录

第一章　分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法　为了证明某定理对任意自然数n是正确的，只要证明下面两点：

(1) 该定理对$n=1$是正确的；(2) 若该定理对任何一个自然数n是正确的，则它对其后的一个自然数$n+1$也是正确的.

2. 分割　若把有理数分为A、B两类，使其满足下列条件：(1) 两类均非空集；(2) 每个有理数必属于一类，也仅仅属于一个类别；(3) 属于A类(下类)的任何数都小于属于B类(上类)的任意数，此分类法被称之为分割. $\dfrac{A}{B}$分割确定(a) 有理数和(b) 无理数. 有理数是指：或者下类A有最大数，或者上类B有最小数；无理数是指：A类没有最大数，而B类没有最小数. 有理数和无理数统称为实数*.

3. 绝对值　若x为实数，则绝对值$|x|$就是由下列条件所确定的非负数.

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{若 } x<0;\\ x, & \text{若 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何实数x和y，下列不等式成立

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4. 上确界和下确界　设$X=\{x\}$为实数的有界集，若：

(1) 每一个$x\in X$** 满足不等式

---

* 今后如没有相反的说明，我们把所研究的数都理解为实数.

** 符号$x\in X$表示数字x属于集X.

$x \geqslant m$,

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$,存在有 $x' \in X$,以致

$x' < m + \varepsilon$,

则数 $m = \inf\{x\}$ 被称为集 X 的下确界.

同样,若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$x \leqslant M$,

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$ 存在有 $x'' \in X$,以致

$x'' > M - \varepsilon$,

则数 $M = \sup\{x\}$ 被称为集 X 的上确界.

若集 X 下方无界,则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty,$$

若集 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差 若 $a(a \neq 0)$ 是可测量的准确值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta = | x - a |$$

被称为绝对误差,而

$$\delta = \frac{\Delta}{| a |}.$$

被称为可测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的个位数的一半,则说明 x 有 n 位准确的数字.

运用数学归纳法证明:下列等式对任何自然数 n 都成立.

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

5. 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 和 $a^{[0]}=1$.

证明：$(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$，式中 C_n^m 为由 n 个元素中选取 m 个的组合数，由此推导出牛顿的二项式公式.

6. 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

7. 证明：如果 $x>-1$，则不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (n>1)$ 是正确的，只有当 $x=0$ 时，等号成立.

8. 证明不等式，当 $n>1$ 时，$n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

提示：利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2\qquad(n=1,2,\cdots).$$

9. 证明不等式，当 $n>1$ 时，$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n$.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. 证明不等式

(1) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\qquad(n\geqslant 2)$;

(2) $n^{n+1}>(n+1)^n\qquad(n\geqslant 3)$;

(3) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k$

$$(0\leqslant x_k\leqslant\pi,\qquad k=1,2,\cdots,n);$$

(4) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

11. 设 c 为正整数，而且不是整数的平方，$\dfrac{A}{B}$ 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含 $b^2>c$ 这样的所有正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数，证明：A 类中无最大数，而 B 类中无最小数.

12. 用下列方法建立确定数$\sqrt[3]{2}$的分割$\frac{A}{B}$:A类包含符合$a^3<2$条件的所有有理数a;而B类含有所有其它的有理数,证明A类中无最大数,而B类中无最小数.

13. 作出适当的分割,证明等式

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$;

(2) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. 建立确定数$2^{\sqrt{2}}$的分割.

15. 证明所有非空并且下方有界的数集有下确界,而所有非空并且上方有界的数集有上确界.

16. 证明一切有理真分式$\frac{m}{n}$(其中m和n为自然数,且$0<m<n$)的集无最小和最大元素. 求该集的上确界和下确界.

17. 求出满足不等式$r^2<2$的有理数r集的下确界和上确界.

18. 设$\{-x\}$为数集,这些数为$x\in\{x\}$符号相反的数,证明:(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$;(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

19. 设$\{x+y\}$是所有$x+y$的和的集,其中$x\in\{x\}$和$y\in\{y\}$. 证明下列等式成立:

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

20. 设$\{xy\}$是所有xy乘积的集,其中$x\in\{x\}$和$y\in\{y\}$,而且$x\geqslant 0$和$y\geqslant 0$,求证等式

(1) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$.

21. 证明不等式

(1) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$;

(2) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$

22. $|x+1|<0.01$.

23. $|x-2|\geqslant 10$.

24. $|x|>|x+1|$.

25. $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1||<1$.

29. $|x(1-x)|<0.05$.

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

31. 测量长度 10 厘米时，绝对误差为 0.5 毫米，测量距离 500 千米时，绝对误差等于 200 米，哪种测量较为精确？

32. 数 $x=2.3752$，若这个数的相对误差为 1%，试求此数包含几位精确数字？

33. 数 $x=12.125$，含有 3 位精确数字，试求此数的相对误差是多少？

34. 矩形的边为 $x=2.50$ 厘米 ± 0.01 厘米，$y=4.00$ 厘米 ± 0.02 厘米. 问这个矩形的面积 S 在什么范围内？如果其边长取平均值时，矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少？

35. 物体的重量为 $p=12.59$ 克 ± 0.01 克，体积为 $V=3.2$ 厘米^2 ± 0.2 厘米^3，若物体的重量和体积都取其平均值，求物体的比重，并估算比重的绝对误差和相对误差.

36. 圆半径 $r=7.2$ 米 ± 0.1 米. 若取 $\pi=3.14$，以什么样的最小相对误差来确定圆的面积？

37. 测得直角平行六面体 $x=24.7$ 米 ± 0.2 米；$y=6.5$ 米 ± 0.1 米；$z=1.2$ 米 ± 0.1 米；这个平行六面体的体积 V 在什么范围内？若其测量都取其平均值，以什么样的绝对误差和相对误差来求出这个平行六面体的体积？

38. 正方形的边长为 x，2 米 $<x<$ 3 米，问以什么样的绝对误差来测量边长，才能使确定这个正方形的面积精确到 0.001 米^2？

39. 若矩形每边边长均不超过 10 米，为了使它的面积能精确到 $0.01\mathrm{m}^2$ 来计算，求测量矩形的边长 x 和 y 时所能允许的绝对误差 Δ?

40. 假设 $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$ 为数 x 及 y 的相对误差，$\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差，证明：$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$.

§2. 序列的理论

1. 序列极限的概念

假设对于任何的 $\varepsilon > 0$，存在数 $N = N(\varepsilon)$，以致当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.

则一般来说，序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$ 或 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 有极限 a（简称收敛于 a），即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，特别是若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则称 x_n 为无穷小.

没有极限的序列为发散的.

2. 极限存在的准则

(1) 如果 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

(2) 单调且有界的序列具有极限.

(3) 柯西检验法　对于序列 x_n 极限的存在的必要且充分条件是：对于任何的 $\varepsilon > 0$ 都存在数 $N = N(\varepsilon)$，以致仅在 $n > N$ 和 $p > 0$ 时：$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3. 序列极限的基本定理

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，则有

(1) 如果 $x_n \leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(4) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4. 数 e.

序列$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n=1,2,\cdots)$

具有有限极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2.7182818284\cdots$.

5. 无穷极限

符号$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ 表示：对于任何的 $E>0$，都存在数 $N=N(E)$，以致当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$.

6. 极限点(聚点)

若存在子序列：

$$x_{p_1}, x_{p_2} \cdots, x_{p_n}, \cdots \qquad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots)$$

使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi$；则数 ξ(或符号 ∞) 被称为已知序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的子极限(极限点或聚点).

所有有界序列至少有一个有穷的聚点(布尔查诺－威尔斯特拉斯原理)，如这个聚点是惟一的，则它就是该序列的有穷极限.

序列 x_n 的最小聚点(有穷的或无穷的) $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ 称作下极限；而其最大聚点$\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ 被称为此序列的上极限. 等式$\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ 是序列 x_n 的(有穷的或无穷的) 极限存在的必要且充分的条件.

41. 假设 $x_n = \dfrac{n}{n+1} (n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

对于每一个 $\varepsilon>0$，确定数 $N=N(\varepsilon)$，以致若 $n>N$ 时，$|x_n-1|<\varepsilon$.

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N					

42. 若

(1) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$；　　(2) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$；

(3) $x_n = \frac{1}{n!}$;　　(4) $x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$.

证明 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 是无穷小(即极限等于 0).

对于任何的 $\varepsilon > 0$,确定 $N = N(\varepsilon)$ 使得当 $n > N$ 时,$|x_n| < \varepsilon$.

对应上述四种情况,填下表:

ε	0.1	0.001	0.0001	…
N				

43. 求证序列

(1) $x_n = (-1)^n n$;　　(2) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;

(3) $x_n = \lg(\lg n)$　　$(n \geqslant 2)$.

当 $n \to \infty$ 时,有无穷极限(亦即是无穷大),确定对于任何的 $E > 0$,数 $N = N(E)$,以致当 $n > N$ 时,$|x_n| > E$.

对应上述各种情况,填下表:

E	10	100	1000	10000	…
N					

44. 证明:$x_n = n^{(-1)^n} (n = 1,2,\cdots)$ 无界,但是当 $n \to \infty$ 时,它并不是无穷大.

45. 用不等式表示下列各式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

假设 n 为自然数列,确定下列各式的值:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1}$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $\quad(|a|<1, |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

证明下列等式：

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0 \quad (a>1)$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$，若 $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

67. 当 n 充分大时，下列各式哪个大？

(1) $100n+200$ 或 $0.01n^2$？；

(2) 2^n 或 n^{1000}？；

(3) 1000^n 或 $n!$？

68. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

提示：参照第 10 题.

69. 证明序列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

是单调递增且上方有界，而序列

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

是单调递减且下方有界. 由此推导出这些序列有共同的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$.

70. 证明

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

当指数 n 是什么数值时，式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001？

71. 假设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列，而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty(p_n,q_n\in[-1,0])$ 的任意数列，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}$.

72. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$.

由此推导出公式 $\mathrm{e}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}$,

式中 $0<\theta_n<1$，并计算数 e（精确到 10^{-5}）.

73. 证明数 e 为无理数.

74. 证明不等式$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

75. 证明不等式

(1) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

式中 n 为任意自然数.

(2) $1+\alpha < e^\alpha$

式中 α 为不为于零的实数.

76. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1) = \ln a (a>0)$，式中 $\ln a$ 为取 $e = 2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

利用关于单调且有界的序列的极限存在的定理，证明下列各序列的收敛性：

77. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \qquad (n = 1,2,\cdots)$，

式中 $p_i(i = 0,1,2,\cdots)$ 是非负整数，从 p_1 起不大于 9.

78. $x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad \cdots,$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}},\cdots$$

利用柯西检验法，证明下列各序列的收敛性：

82. $x_n = a_0 + a_1q + \cdots + a_nq^n$.

式中 $|a_k| < M(k = 0,1,2,\cdots)$ 且 $|q| < 1$.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

提示：利用不等式

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2,3,\cdots).$$

86. 如果存在数 C，使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C \qquad (n = 2,3,\cdots)$$

则称序列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 具有**有界变差**.

证明带有有界变差的序列是收敛的. 举出一个收敛序列而无有界变差的实例.

87. 试说明某序列不满足柯西准则的意义.

88. 利用柯西检验法证明以下序列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 的发散性.

89. 证明如果序列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 收敛，则其任何子序列也收敛，并具有同一极限：$\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

90. 求证，如果单调序列的某一子序列收敛，则该单调序列也是收敛的.

91. 求证，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

92. 若 $x_n \to a$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可作出哪些解释？

93. 证明收敛的数列是有界的.

94. 证明收敛的数列或达到其上确界，或达到其下确界，或两者都达到. 举出所有三类序列的例子.

95. 证明趋向于 $+\infty$ 的数列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 一定达到其下确界.

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.