

各版本教材通用

zhongdiannandianjietishouce

重点难点

解题手册

难题详解 现查现用
各类变式 触类旁通

总主编 王后雄

高三数学



北京出版集团



北京教育出版社

各版本教材通用

zhongdiannandianjietishouce

重点难点

解题手册

难题详解 现查现用
各类变式 触类旁通

总主编 王后雄

高三数学



北京出版社出版集团



北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

重点难点解题手册. 高三数学 / 高丽娟编. —北京: 北京教育出版社, 2006

ISBN 7 - 5303 - 5037 - 4

I. 重… II. 高… III. 数学课—高中—解题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 033634 号

本册主编 高丽娟 董 武

本册编者 董 武 高丽娟 廖宏智

杨占红 潘月春 陈雪莲

重点难点解题手册

高三数学

ZHONGDIAN NANDIAN JIETI SHOUCHE

GAOSAN SHUXUE

总主编 王后雄

*

北京出版社出版集团 出版
北京教育出版社

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码: 100011

网 址: www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

北京市顺义张镇康华福利印刷厂印刷

*

890 × 1240 32 开本 12 印张

2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—12 000

ISBN 7 - 5303 - 5037 - 4

G · 4953 定价: 16.00 元

质量投诉电话: 010 - 58572245 58572393



重点难点解题手册

这是一部解决难题的工具书，当你在写作业时碰到不会的难题，就会在书中找到答案；当你做完书中难题时，就会在考场上胸有成竹、马到成功。

考试夺高分关键是会解题

每天在茫茫题海中漫游的你，一定会遇到不少难题，这本书是一部解决难题的工具书。它会告诉你：常考的题有哪些类型，每个类型的题有什么样的经典题，它们又可以衍生出哪些同类“变式”题，同一类型的题目有哪些解题诀窍。《重点难点解题手册》紧密围绕重点难点，帮你快速提高解题能力。

本丛书在栏目设置上很好地体现了实用性和独创性

重点难点提示

全面体现课程的目标，对重点知识概括总结，对难点知识精辟分析，帮你构建学科知识体系。

习题分类解析

针对重点难点，对题目科学分类，对每一类题目集中剖析、讲解。利用“变式”形式，以经典题为母题，演化出各异的子题，力求反映当前的课改理念。题目“全、新、活”。

小锦囊

用旁栏的形式点拨解题技巧，在遇到类似问题时能更加快速、有效地解决问题。

全——囊括了所有的题型。你可以迅速地在本书找到所有难题或与之类似的题目。

新——题目的情境新颖，与当前热点问题联系，体现了课程改革的目標，没有“繁、偏、旧”的题目。

活——题目形式多样、材料鲜活，考查角度多变、灵活。

解题方法归纳与提升

归纳总结了每节中常见题型的解题方法，揭示解题的基本规律，预测中考高考命题趋势和方向。

丛书由数十位全国重点中学富有教学经验的一线骨干教师精心编写而成，从题型的横向、纵向两个方面完美地诠释了重点难点题的类型与变式，并将他们多年教学心得总结成“解题方法归纳与提升”，丛书凝聚了众多教学专家的心血与智慧。

《重点难点解题手册》系列



一个重要的学习方法——归类分析法

本书不仅可以让你迅速地查到各种难题的解法，更重要的是教你一个重要的学习方法——归类分析法。这是多位学科教育专家和高考状元在实践中总结出来的一个非常有效的学习方法。

你可以将你要解的题目按所考查的知识点和方法加以归类，以后再遇到类似的问题时，你就会在第一时间反应出所考查的知识点和方法，很快找出解决该题的公式、定理，问题就迎刃而解了。

此外，对于每一类型的题可以先从简单的题目入手，再由浅入深地训练自己。

目 录



第一编 高三同步部分

第一章 概率与统计/1

重点难点提示/1

习题分类解析/2

类型一 分布列的性质/2

类型二 随机变量的分布列/3

类型三 几何分布和二项分布/4

类型四 期望和方差/6

类型五 两个随机变量/7

类型六 抽样方法/8

类型七 频率分布条形图/9

类型八 正态分布/10

类型九 实际应用/11

类型十 回归直线方程的确定/11

解题方法归纳与提升/12

第二章 极限/14

一、数学归纳法/14

重点难点提示/14

习题分类解析/14

类型一 等式问题/14

类型二 不等式问题/15

类型三 整除问题/18

类型四 存在性问题/19

类型五 方程思想的运用/21

类型六 几何问题/21

类型七 归纳、猜想、证明/22

解题方法归纳与提升/27

二、极限/27

重点难点提示/27

习题分类解析/30

类型一 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限/30

类型二 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限/31

类型三 已知极限, 求参数/34

类型四 数列极限/34

类型五 综合应用/35

类型六 函数在某区间上的连续性/38

解题方法归纳与提升/38

第三章 导数/40

一、导数的概念及几何意义/40

重点难点提示/40

习题分类解析/41

类型一 导数定义的理解/41

类型二 导数的几何意义/42

类型三 导数的运算法则/44

类型四 导数的几何意义与解析几何综合/45

解题方法归纳与提升/49

二、函数单调性的判定/49

重点难点提示/49

习题分类解析/49

类型一 单调性的判定/49

类型二 运用导数证明不等式/52

类型三 导数与不等式综合/53

解题方法归纳与提升/56

三、函数的极值和最值/56

重点难点提示/56

习题分类解析/57

类型一 极值和最值的判定/57

类型二 极值和最值的应用/60

类型三 利用导数求最值与函数图象综合/62

解题方法归纳与提升/64

四、导数的综合应用/64

重点难点提示/64

习题分类解析/65

类型一 导函数图象与原函数图象的关系/65

类型二 导数与三角函数相结合/66

类型三 导数与数列相结合/68

类型四 最值问题与不等式问题相结合/70

解题方法归纳与提升/72

第四章 复数/73

重点难点提示/73

习题分类解析/74

类型一 复数的概念/74

类型二 复数相等/75

类型三 复数与三角综合/76

类型四 复数的加减运算/77

类型五 i 的整数幂/78

类型六 复数的乘除运算/78

类型七 复数与方程/79

解题方法归纳与提升/81

第二编 专题复习

第一章 代数基础篇/82

专题一 函数的图象/82

重点难点提示/82

习题分类解析/83

类型一 描点法作图/83

类型二 图象变换法作图/85

类型三 函数性质/87

类型四 识图/88

类型五 综合创新/90

解题方法归纳与提升/91

专题二 函数的性质(奇偶性、周期性)/92

重点难点提示/92

习题分类解析/93

类型一 函数奇偶性判定/93

类型二 抽象函数奇偶性判定/95

类型三 利用奇偶性求解析式/96

类型四 奇偶性与单调性的综合应用/98

类型五 函数周期性判定/100

类型六 奇偶性与周期性综合应用/101

解题方法归纳与提升/102

专题三 三角函数的图象与性质/103

重点难点提示/103

习题分类解析/104

类型一 由图象或部分图象确定解析式/104

类型二 三角函数值域问题/106

类型三 三角函数周期性问题/108

类型四 三角函数单调性问题/109

类型五 三角函数图象变换问题/110

解题方法归纳与提升/111

专题四 平面向量的综合应用/112

重点难点提示/112

习题分类解析/113

类型一 向量的概念与运算应用/113

类型二 平面向量的数量积/114

类型三 平面向量的综合应用/115

类型四 线段的定比分点和图象的平移的应用/118

类型五 利用正余弦定理解三角形的综合应用/119

解题方法归纳与提升/120

专题五 导数的应用/120

重点难点提示/120

习题分类解析/120

类型一 刻画函数/120

类型二 解决切线问题/121

类型三 解决函数单调性问题/121

类型四 利用导数求和/123

类型五 解决极值与最值问题/124

类型六 探究解析几何问题/125

解题方法归纳与提升/126

第二章 解析几何基础篇/127

专题一 直线与圆、圆与圆的位置关系/127

重点难点提示/127

习题分类解析/128

类型一 直线与圆的位置关系/128

类型二 圆的切线的求法/129

类型三 弦长、弦中点问题/131

类型四 圆与圆的位置关系/132

类型五 综合问题/134

解题方法归纳与提升/135

专题二 直线与圆锥曲线的位置关系/136

重点难点提示/136

习题分类解析/137

类型一 弦长问题/137

类型二 弦中点问题/139

类型三 直线与圆锥曲线的位置关系/141

类型四 综合问题/144

解题方法归纳与提升/149

专题三 对称问题/150

重点难点提示/150

习题分类解析/151

类型一 点关于点的对称/151

类型二 直线关于点的对称/152

类型三 椭圆关于点的对称/152

类型四 点关于直线的对称/154

类型五 线关于线的对称, 相交/156

类型六 应用/157

解题方法归纳与提升/160

专题四 解析几何中的最值问题/160

重点难点提示/160

习题分类解析/161

类型一 用二次函数值域求最值/161

类型二 用三角函数有界性求最值/162

类型三 用均值定理求最值/163

类型四 用解析法求平面几何中的最值/165

类型五 数形结合求最值/166

类型六 用圆锥曲线定义求最值/167

类型七 设法得到含参数不等式, 求参数取值范围/169

类型八 实际问题/169

解题方法归纳与提升/170

专题五 求轨迹方程的常用方法/171

重点难点提示/171

习题分类解析/171

类型一 直接法/171

类型二 相关点法/173

类型三 定义法/174

类型四 交轨法/175

类型五 参数法/176

类型六 适当运用平面几何知识/179

类型七 待定系数法/180

解题方法归纳与提升/180

专题六 向量与解析几何/181

重点难点提示/181

习题分类解析/182

类型一 向量坐标与点的坐标/182

类型二 直线的方向向量/182

类型三 共线向量/184

类型四 直接将向量关系坐标化求出轨迹方程/185

类型五 向量夹角/187

类型六 向量关系向图形位置关系或数量关系的转化/189

类型七 平移 /190

类型八 构造向量处理解析几何问题/191

解题方法归纳与提升/192

第三章 立体几何基础篇/193

专题一 空间直线/193

重点难点提示/193

习题分类解析/195

类型一 空间直线的位置关系问题/195

类型二 平行直线的有关问题/196

类型三 异面直线的判定与证明/197

类型四 异面直线所成的角的问题/198

类型五 有关异面直线的距离/200

类型六 有关异面直线的综合创新/203

解题方法归纳与提升/203

专题二 线、面的平行关系/204

重点难点提示/204

习题分类解析/205

类型一 用分类的思想判定命题的正误/205

类型二 线面平行的判定与性质的应用/207

类型三 平面平行的判定与性质的应用/209

类型四 利用空间图形向平面图形的转化思想
解题/210

类型五 有关线面平行问题的综合创新/211

解题方法归纳与提升/213

专题三 线、面的垂直关系/214

重点难点提示/214

习题分类解析/216

类型一 垂直关系的基本问题/216

类型二 线面垂直的判定与证明/218

类型三 三垂线定理及其逆定理的应用/219

类型四 两平面垂直的判定与性质/219

类型五 有关线、面垂直的探索创新/220

解题方法归纳与提升/222

专题四 空间角与距离的计算/223

重点难点提示/223

习题分类解析/224

类型一 线面角解法归纳/224

类型二 用不同的方法求二面角的大小/225

类型三 一道典型的二面角问题/226

类型四 无棱二面角的平面角的求法/227

类型五 有关空间距离的求解/228

类型六 有关空间角与距离的综合创新/230

解题方法归纳与提升/231

专题五 简单几何体/231

重点难点提示/231

习题分类解析/232

类型一 “运动思想”解选择题/232

类型二 “转化”问题的策略/233

类型三 关于“侧面积”与“体积”的
求解/234

类型四 有关“球”的考点解析/236

类型五 有关简单几何体的综合创新/237

解题方法归纳与提升/237

专题六 立体几何中的折叠与展开/238

重点难点提示/238

习题分类解析/239

类型一 抓住“折叠”前后的不变量/239

类型二 立体几何中的“展开”问题/241

类型三 有关“翻折”与“展开”问题的综合
创新/243

解题方法归纳与提升/244

第四章 思想方法篇/245

专题一 数形结合思想/245

重点难点提示/245

习题分类解析/245

类型一 借助函数图象解题/245

类型二 利用复数的几何意义解题/248

类型三 数形结合思想在解析几何中的
应用/251

类型四 数形结合思想在集合问题中的
应用/253

解题方法归纳与提升/254

专题二 分类讨论思想/255

重点难点提示/255

习题分类解析/255

类型一 对对数的底数进行分类讨论/255

类型二 对集合中所含元素分类讨论/257

类型三 数列问题的分类讨论/258

类型四 对含参不等式的参数分类讨论/261

类型五 分类讨论在解析几何问题中的应用/262

解题方法归纳与提升/266

专题三 函数与方程思想/267

重点难点提示/267

习题分类解析/267

类型一 函数思想的简单应用/267

类型二 函数思想在讨论不等关系中的应用/269

类型三 函数方程思想在数列问题中的体现/270

类型四 函数方程思想在几何问题中的应用/272

类型五 综合应用/274

解题方法归纳与提升/275

专题四 等价转化思想/276

重点难点提示/276

习题分类解析/276

类型一 利用等量关系及重要不等式进行合理转化/276

类型二 三角变换中等价思想的体现/278

类型三 等价转化思想在函数问题中的应用/280

类型四 等价转化思想在立体几何中的应用/281

解题方法归纳与提升/282

专题五 配方法/282

重点难点提示/282

习题分类解析/283

类型一 函数问题/283

类型二 数列问题/284

类型三 三角函数问题/284

类型四 方程与不等式问题/285

解题方法归纳与提升/287

专题六 换元法/287

重点难点提示/287

习题分类解析/288

类型一 三角换元/288

类型二 均值换元/290

类型三 局部换元/292

类型四 灵活应用/294

解题方法归纳与提升/295

专题七 待定系数法/295

重点难点提示/295

习题分类解析/296

类型一 以二次函数系数为参数/296

类型二 求曲线方程的问题/297

类型三 特殊值法/298

解题方法归纳与提升/299

专题八 定义法/299

重点难点提示/299

习题分类解析/300

类型一 复数的有关概念/300

类型二 函数的有关性质/300

类型三 立体几何的有关概念/301

类型四 解析几何的有关概念/302

解题方法归纳与提升/303

专题九 数学归纳法/303

重点难点提示/303

习题分类解析/304

类型一 证明等式成立/304

类型二 整除问题/305

类型三 几何问题/306

类型四 数列问题/306

解题方法归纳与提升/309

专题十 参数法/310

重点难点提示/310

习题分类解析/310

类型一 解析几何问题/310

类型二 立体几何问题/312

解题方法归纳与提升/312

专题十一 反证法/313

重点难点提示/313

习题分类解析/313

类型一 函数图象问题/313

类型二 判断方程解的情况/314

类型三 立体几何问题/314

解题方法归纳与提升/315

第五章 应用篇/316

专题一 函数、不等式应用题/316

重点难点提示/316

习题分类解析/316

类型一 二次函数型应用题/316

类型二 利用导数解应用题/318

类型三 利用均值不等式解应用题/319

类型四 利用分段函数解应用题/321

类型五 综合题/324

解题方法归纳与提升/326

专题二 数列的实际应用/327

重点难点提示/327

习题分类解析/327

类型一 等差数列模型/327

类型二 等比数列模型/330

类型三 递推数列模型/334

类型四 基本方法引申/336

解题方法归纳与提升/339

专题三 三角应用题/340

重点难点提示/340

习题分类解析/340

类型一 三角形的边角关系/340

类型二 方位角/343

类型三 最值问题/345

类型四 $y = a \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的应用/346

解题方法归纳与提升/348

专题四 线性规划应用题/348

重点难点提示/348

习题分类解析/349

类型一 物资调运问题/349

类型二 产品安排问题/350

类型三 下料问题/353

解题方法归纳与提升/355

专题五 解析几何应用题/355

重点难点提示/355

习题分类解析/356

类型一 圆模型/356

类型二 椭圆模型/358

类型三 双曲线模型/359

类型四 抛物线模型/360

类型五 解析几何与均值不等式综合/362

解题方法归纳与提升/363

专题六 概率、统计的应用题/363

重点难点提示/363

习题分类解析/364

类型一 从实际生活中概括出来的问题/364

类型二 赋予时代气息的数学问题/367

类型三 学生熟知的有生活经验的问题/368

类型四 利用期望、方差知识择优问题/370

类型五 概率知识与横向学科(物理)

综合/371

解题方法归纳与提升/372



第一编 高三同步部分



第一章 概率与统计

DiYiZhang GaiLüYuTongJi



重点难点提示

1. 离散型随机变量的分布列.

一般地, 设离散型随机变量 ξ 可能取的值为: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, \xi$ 取每一个 $x_i (i = 1, 2, \dots)$ 的概率 $P(\xi = x_i) = p_i$, 则称表:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

为随机变量 ξ 的概率分布, 简称为 ξ 的分布列. 离散型随机变量的分布列的两个性质:

① $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots$; ② $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

求离散型随机变量的分布列的应用问题应遵循如下三个步骤: 首先, 明确随机变量的所有可能取值; 其次, 求出与这些可能取值等价事件的概率; 最后, 在确定概率和为 1 以后, 按要求写出分布列.

2. 离散型随机变量的期望与方差.

(1) 离散型随机变量的期望与方差都需通过其分布列来求:

$$E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + \dots;$$

$$D\xi = (x_1 - E\xi)^2 p_1 + (x_2 - E\xi)^2 p_2 + \dots + (x_n - E\xi)^2 p_n + \dots.$$

(2) 若 $\eta = a\xi + b$, 其中 a, b 为常数, 则 $E\eta = aE\xi + b, D(a\xi + b) = a^2 D\xi$.

(3) 若 $\xi \sim B(n, p)$, 则 $E\xi = np$, 那么 $D\xi = np(1 - p)$.

求离散型随机变量 ξ 的期望和方差的步骤: 先求出 ξ 的概率分布列; 再应用上述公式.

3. 抽样方法.

三种基本的抽样方法: 简单随机抽样、系统抽样、分层抽样.

4. 总体分布的估计.

求总体的频率分布的直方图步骤: (1) 计算最大值、最小值; (2) 决定组距与组数; (3) 决定分点; (4) 列出频率分布表; (5) 画出频率分布直方图.

5. 正态分布.

(1) 正态曲线及其性质.

对于正态分布函数: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$), 由于中学知识范围的限制, 不必

去深究它的来龙去脉.

(2) 回归直线方程: $\hat{y} = bx + a$, 其中

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, a = \bar{y} - b \bar{x}.$$



习题分类解析

类型一 分布列的性质

设随机变量的分布如下:

ξ	1	2	3	...	n
P	k	$2k$	$4k$	...	$2^{n-1}k$

求常数 k 的值

【解析】 由离散型随机变量的分布列性质, 得

$$k + 2k + 4k + \cdots + 2^{n-1}k = 1, \text{ 即 } (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1})k = 1,$$

$$\therefore \frac{1-2^n}{1-2}k = 1,$$

$$\therefore k = \frac{1}{2^n - 1}.$$

► 变式 1 随机变量 ξ 的分布列 $P(\xi = k) = \frac{p}{k(k+1)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 其中 p 为常数, 则

$$P\left(\frac{1}{2} < \xi < \frac{5}{2}\right) = (\quad)$$

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{5}{6}$

【解析】 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{p}{1 \times 2}$	$\frac{p}{2 \times 3}$	$\frac{p}{3 \times 4}$	$\frac{p}{4 \times 5}$

$$\therefore \frac{p}{1 \times 2} + \frac{p}{2 \times 3} + \frac{p}{3 \times 4} + \frac{p}{4 \times 5} = p \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \right] = 1,$$

$$\therefore p = \frac{5}{4}.$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2} < \xi < \frac{5}{2}\right) = P(\xi=1) + P(\xi=2) = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} \right) = \frac{5}{6}.$$

【答案】 D

► 变式 2 某 12 人的兴趣小组中有 5 名“三好生”，现从中任意选 6 人参加竞赛，用 ξ 表示这 6 人中“三好生”的人数，则下列概率中等于 $\frac{C_5^3 C_7^3}{C_{12}^6}$ 的是 ()

- A. $P(\xi=2)$ B. $P(\xi=3)$ C. $P(\xi \leq 2)$ D. $P(\xi \leq 3)$

【解析】 $C_5^3 C_7^3$ 表示选出的 6 人中恰有 3 名“三好生”。

【答案】 B

► 变式 3 设 $\xi \sim B(2, p)$, $\eta \sim B(4, p)$, 已知有 $P(\xi \geq 1) = \frac{5}{9}$, 求 $P(\eta \geq 1)$.

【解析】 因为 $\xi \sim B(2, p)$, 所以 $P(\xi=k) = C_2^k p^k (1-p)^{2-k}$, $k=0, 1, 2$,

由 $P(\xi \geq 1) = \frac{5}{9}$, 得 $P(\xi=1) + P(\xi=2) = \frac{5}{9}$, 故 $C_2^1 p^1 (1-p)^1 + C_2^2 p^2 = \frac{5}{9}$.

解得 $p = \frac{1}{3}$ 或 $p = \frac{5}{3}$ (舍去), 所以 $\eta \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

$$\therefore P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta < 1) = 1 - P(\eta=0) = 1 - C_4^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}.$$

类型二 随机变量的分布列

盒中有 5 个红球, 3 个白球, 每次从中任取一球后放入一个红球, 直到取到红球为止. 用 ξ 表示抽取次数, 求 ξ 的分布列, 并计算 $P(1 < \xi \leq 3)$.

【解析】 $P(\xi=1) = \frac{5}{8}$;

当 $\xi=2$ 时, 表示第一次取到白球, 第二次取到红球, 则

$$P(\xi=2) = \frac{3}{8} \times \frac{6}{8} = \frac{9}{32};$$

类似地

$$P(\xi=3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{256}; P(\xi=4) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{8}{8} = \frac{3}{256}.$$

ξ 的分布列如下:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{3}{256}$

$$P(1 < \xi \leq 3) = \frac{9}{32} + \frac{21}{256} = \frac{93}{256}.$$

► 变式 1 某射手有 5 发子弹, 射击一次命中概率为 0.9, 如果命中就停止射击, 否则一直到子弹用尽, 求耗用子弹数 ξ 的分布列.

【解析】 ξ 的取值有 1, 2, 3, 4, 5 共 5 种情况.

当 $\xi=1$ 时,即第一枪就中了,故 $P(\xi=1)=0.9$;

当 $\xi=2$ 时,即第一枪未中,第二枪中了,故 $P(\xi=2)=0.1 \times 0.9=0.09$;

同理, $P(\xi=3)=0.1^2 \times 0.9=0.009$;

$P(\xi=4)=0.1^3 \times 0.9=0.0009$; $P(\xi=5)=0.1^4=0.0001$.

则耗用子弹数 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5
P	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001

► 变式 2 一名实习工人用同一台机器制造 3 个相同的零件,第 k 个零件为合格品的概率为 $P_k = \frac{1}{k+1}$ ($k=1,2,3$),设各次制造的零件合格与否是相互独立的,以 ξ 表示合格品的个数,求 ξ 的分布列.

【解析】 设第一个零件合格的事件为 A ,第二个零件合格的事件为 B ,第三个零件合格的事件为 C ,

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore P(\xi=0) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{1}{4};$$

$$P(\xi=1) = P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = \frac{11}{24};$$

$$P(\xi=2) = P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) = \frac{1}{4};$$

$$P(\xi=3) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{24}.$$

$\therefore$ 分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

类型三 几何分布和二项分布

有 6 节电池,其中有 2 节没电,4 节有电,每次随机抽取一节测试,不放回,直至分清楚有电没电为止,所要测试的次数 ξ 为随机变量,求 ξ 的分布列.

【解析】 $\xi=2,3,4,5$.

$$\therefore \xi=2 \text{ 表示前 2 节测试均为次品,} \therefore P(\xi=2) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15};$$

$\therefore \xi=3$ 表示前两次中一好一坏,第三次为坏,

$$\therefore P(\xi=3) = \frac{C_2^1 C_4^1 A_2^2}{A_6^3} = \frac{2}{15};$$

$\therefore \xi=4$ 表示前四节均为好,或前三节中一坏二好,第四节为坏,

$$\therefore P(\xi=4) = \frac{A_4^4}{A_6^4} + \frac{C_2^1 C_4^2 A_3^3}{A_6^4} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15};$$

$\therefore \xi=5$ 表示前四只三好一坏,第五只只坏或前四只三好一坏第五只为好,

$$\therefore P(\xi=5) = \frac{C_2^1 C_4^3 A_4^4}{A_6^5} + \frac{C_2^2 C_4^3 A_4^4}{A_6^5} = \frac{8}{15}.$$

$\therefore$ 分布列为:

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

► 变式 1 某人参加射击,击中目标的概率是 $\frac{1}{3}$.

(1) 设 ξ 为他射击 6 次击中目标的次数,求随机变量 ξ 的分布列;

(2) 设 η 为他第一次击中目标时所需要射击的次数,求 η 的分布列;

(3) 若他只有 6 颗子弹,若他击中目标,则不再射击,否则子弹打完,求他射击次数 ξ 的分布列.

【解析】 (1) 随机变量 ξ 服从二项分布 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$, 而 ξ 的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 则

$$P(\xi=k) = C_6^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

$\therefore \xi$ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{64}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{12}{729}$	$\frac{1}{729}$

(2) 设 $\eta=k$ 表示他前 $k-1$ 次未击中目标,而在第 k 次射击时击中目标,则 η 的取值为全体正整数 1, 2, 3, $\dots$, 则 $P(\eta=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$.

$\therefore \eta$ 的分布列为:

η	1	2	3	4	$\dots$	k	$\dots$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$	$\dots$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$	$\dots$

(3) 设 ξ 表示前 $k-1$ 次未击中,而第 k 次击中, $k=1, 2, 3, 4, 5$,

$$\therefore P(\xi=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \quad (k=1, 2, 3, 4, 5);$$

而 $\xi=6$ 表示前 5 次未击中,第 6 次可以击中,也可以未击中.

$$\therefore P(\xi=6) = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

$\therefore \xi$ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{32}{243}$

类型四 期望和方差

摇奖器内有 10 个小球,其中 8 个小球上标有数字 2,2 个小球上标有数字 5,现摇出 3 个小球,规定所得奖金(元)为这 3 个小球上记号之和,求此次摇奖获得奖金数额的数学期望.

【解析】 设此次摇奖的奖金数额为 ξ 元,

当摇出的 3 个小球均标有数字 2 时, $\xi=6$;

当摇出的 3 个小球中有 2 个标有数字 2,1 个标有数字 5 时, $\xi=9$;

当摇出的 3 个小球有 1 个标有数字 2,2 个标有数字 5 时, $\xi=12$.

$$\text{所以, } P(\xi=6) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$$

$$P(\xi=9) = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$$

$$P(\xi=12) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15},$$

$$E\xi = 6 \times \frac{7}{15} + 9 \times \frac{7}{15} + 12 \times \frac{1}{15} = \frac{39}{5} (\text{元}).$$

所以此次摇奖获得奖金数额的数学期望是 $\frac{39}{5}$ 元.

► 变式 1 一次数学期末测验由 25 道选择题构成,每道选择题有 4 个选项,其中有且仅有一个选项正确,选择正确答案的得 4 分,不作出选择或选错的不得分,满分 100 分,某学生选对任一题的概率为 0.8,求此学生在这次测验中的成绩的期望与方差.

【解析】 学生做 25 道题就是 25 次独立重复试验,每次试验选对的概率为 0.8,符合二项分布. 用 ξ 表示这个学生在这次数学测验中选择了正确答案的选择题个数, η 表示成绩,则 $\xi \sim B(25, 0.8)$, $E\xi = 25 \times 0.8 = 20$, $D\xi = 25 \times 0.8 \times 0.2 = 4$,

$$E\eta = E(4\xi) = 4E\xi = 4 \times 20 = 80, D\eta = D(4\xi) = 16D\xi = 16 \times 4 = 64.$$

► 变式 2 某电器商由多年的经验发现本店出售的电冰箱的台数 ξ 是一个随机变量,它的分布列 $P(\xi=k) = \frac{1}{12} (k=1, 2, \dots, 12)$, 设每售出一台电冰箱,该台冰箱可获利 300 元,若售不出则囤积在仓库,每台需支付保管费 100 元/月,问:该电器商月初购进多少台电冰箱才能使自己的月平均收入最大?