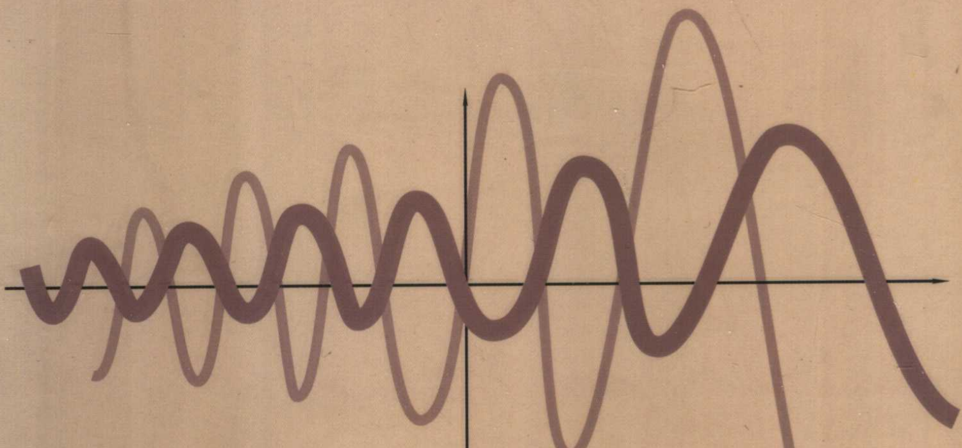
中学数学课外读物

周期函数论

李世杰 编著



浙江大學出版社

周期函数论

李世杰　编著

浙江大學出版社

周期函数论

李世杰　编著

责任编辑　傅百荣

封面设计　姚燕鸣

出版发行　浙江大学出版社

（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）

（E-mail：zupress@mail. hz. zj. cn）

（网址：http://www. zjupress. com）

排　　版　杭州好友排版工作室

印　　刷　浙江大学印刷厂

开　　本　850mm×1168mm　1/32

印　　张　8

字　　数　200 千

版 印 次　2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 7-89490-119-9/G・376

定　　价　15. 00 元

序

李世杰老师送来《周期函数论》书稿，嘱我写序，拜读之下，获益匪浅，我很乐意为之序.

《周期函数论》一书，是当前全国为数很少的有关周期函数的专门性著作之一，是作者在自己若干专题论文的基础上，参阅各种书刊的观点，吸收当前研究周期函数的一些最新成果，分析、综合、加工、整理而成；是作者二十多年来研究周期函数问题的结晶. 不过，作者写得浅入深出，可读性较强.

我个人认为，这是一本颇具特色、新意和创造性的力作，简洁深刻，系统又实用.

书中对各种教材、文献中出现的多种定义进行了分析、讨论；对一些似是而非，容易出错的题目进行了详尽的剖析、对比；对周期函数的一些热点问题进行了专题论述；对各类周期函数及非周期函数的判别、证明，尽可能提供详细的思路和可操作的方案；对最小正周期给出了尽可能具体的求解方法. 书中有不少理论性内容，如：等距“挖点”函数的周期性、周期集合、周期函数的严格定义等，是他首先提出并建立的，是作者独到的见解，且是第一次公开发表，反映了编著者最新的科研成果，具有较高的学术水平.

周期函数是具有某种特性的一类重要函数，在现实生活中具有广泛的应用. 而周期函数的理论，是目前仍在探讨并正在逐步完善的数学的一块重要内容，故继续深入研究周期函数是十分必要的，且具有现实意义.

周期函数既是高中数学的必学内容，也是全国高中数学联赛的必考内容. 尽管高中数学课本对周期函数仅作低要求介绍，不过

到了高考，如 1980 年、1989 年、2000 年、2004 年全国高考，都出过周期函数的大题，其难度远远超过课本要求，与数学竞赛题不相上下. 本书特别对中、高考及高中、初中数学竞赛中出现的周期性问题进行了专题研讨，相信对准备参加中、高考和数学竞赛的学生也会有所帮助.

李老师与我初相识于 1985 年的绍兴师专，我们合作发表的关于函数周期性的一些作品，受到了名家、名师和广大读者的重视与好评. 顺便提一下，李老师十分谦让，我们合作的一些作品从署名上看，他是第二作者（编著者），但从他实际所完成的工作质量和数量方面看，他进行了卓有成效的巨大劳动，作为并列第一作者（编著者）更为确切.

掩卷四顾，似身临周期王国. 李老师在艰苦的科研条件下，取得如此大的成果实属不易，其刻苦钻研的敬业精神尤其值得钦佩. 相信本书的问世，将会促进我国在周期函数领域中相关的研究和应用.

上海师范大学数理信息学院

张方盛

2004 年 6 月 20 日

于美国纽约

编 者 的 话

经过数年努力，本书终于与大家见面了，这是值得高兴的事.

大自然中的很多现象都可以用周期函数来描述. 从广袤浩瀚的星空，到神奇莫测的海底；从复杂难卜的气象，到倏忽万变的浮云；从千姿百态的物种，到面孔、肤色各异的人类……天文地理、数理生化，大至宇宙，小至粒子皆似无序、混乱，同时又存在秩序、蕴含周期性的自然规律，其力量是无穷的.

1985 年暑期，笔者有幸参加了上海师范大学教授张方盛先生在绍兴师专数学系举办的“周期函数”讲习班，第一次领略到函数周期性的美妙与新奇，同时也对其产生了兴趣. 周期函数的魅力牵着我走进这个美丽的数学大花园，其研究成了我生活的一部分，迄今达 20 多年之久. 期间与张方盛教授、吴卫国先生等同仁进行过多次合作研究，周期王国的美丽使我着迷，对周期函数的研究成为我业余生活中的一种乐趣. 一个似是而非的周期函数问题，用一个反例予以解决，给人的刺激犹如一出好的戏剧，函数周期之美穿过心灵，体现了数学的优雅和艺术性. 多年的思索结出了丰硕的果实，在《上海师范大学学报》(自然科学版)、《数学通讯》、《上海中学数学》等杂志上发表了二十多篇涉及周期函数的论文. 本书正是在此基础上，不断充实、修改，数易其稿，历时数年而成.

在长期的数学教学研究与实践中，我们深深地感到：周期函数尽管在中学数学课程中所占篇幅不多，但它在整个中学数学和高等数学中占有极其重要的地位. 高考考试说明要求“了解周期函数与最小正周期的意义”，它也是高中数学联赛则是必考知识之一.

周期函数还是一门正在发展中的学科，不少理论问题是近几

十年甚至最近几年才提出来的,它们似是而非,似非而是,难于判别,还需要逐步加以完善.

如问题:两个周期函数的和,是否周期函数?看似很简单,但也不易判断,需要分两个函数的周期是否相同,是否可公度分别对待,没有统一的答案.读者在本书中能看到我们最新的研究成果.

本书读者对象主要是周期函数理论的研究人员、大学数学系师生、中学数学教师,同时收集了大量的历年竞赛题和高考题可供高中及中专数学爱好者练习与思考.

尽管周期函数的课本定义存在缺陷,但由于它的简洁,笔者赞同课本定义的采用方式.考虑到现行周期函数教学的实际情况,除周期函数定义的比较外,本书的研究也以课本定义为基础,避开有争议的问题.

本书中有关材料的预备知识我们假定读者已掌握,本书各章节具有相对的独立性,书中提出的许多未曾解决的问题,仅供数学基础好且对函数周期性问题感兴趣的读者参考.

本书中采用的专用符号:1. $\mathbf{N}$(自然数集)、$\mathbf{N}^*$(正整数集)、$\mathbf{Z}$(整数集)、$\mathbf{Q}$(有理数集)、$\mathbf{R}$(实数集). 2. T^* 表示 $f(x)$的最小正周期,T 表示周期. 3. 补集:$M-D\in\{x\mid x\in M$ 但 $x\notin D\}$.

文后列出了主要的参考文献,给出了引用的出处和来源,以利于读者寻找更进一步的资料.如有错漏,笔者表示歉意.限于水平,书中难免会有不妥之处,欢迎读者批评指正!

王水(浙江省江山中学)、金雪东(浙江省衢州一中)、吴光耀(浙江省巨化中学)参与了本书部分内容编写,上海师范大学教授、原《上海中学数学》常务副主编张方盛先生写的序,为本书增添了光彩,这里一并表示感谢!

李世杰

2005 年 8 月

目　录

第一章　函数的周期性

第一节　周期现象与周期函数

在日常生活、科学研究和自然界中常会遇到周期现象，也就是经历了一定的时间后恢复原来状态的现象. 蒸汽机所作的稳定运动是这种周期现象的一个实例，它在经历了一定的转数后又重新回到原来的位置上，地球每年绕太阳运行一周，地球每天自转一周，人体内部的生物钟的运行也有精确的时间周期，长度为 24 小时 11 分钟. 另外，如交流电电流和电压的变化，声波的振动，钟摆的运动，十二生肖、星期乃至人的心脏的跳动等等，具有这种周期现象的实例不胜枚举.

具有周期现象的物质的运动，其共同特点是运动的“周而复始”，在物理中把物质在等时间内作往复的运动称为周期运动.

为研究周期现象，刻画这许许多多的周期运动，有必要在数学上研究相应的一种函数，叫做周期函数. 同时，为了研究周期运动的周期，自然也要研究周期函数的周期.

先让我们做一个实验，用它把周期运动和周期函数这两个概念联系起来.

细线的一端栓上一个小球，使小球做等速圆周运动（见图 1），于是时间(t)与小球的位置之间就构成函数关系 —— 对于一定的时间(t 的一个定值)，小球就有一个特定位置与之对应. 为了寻找这个函数关系，把小球运动的平面图画出来，并建立平面直角坐标

系(见图 2).

如果小球的初始位置($t=0$)在点 A 处,而且小球的角速度为 ω(常数),经过时间 t 以后,小球的位置在 B 处,于是 $\angle AOB=\omega t$. 因此,B 点的坐标,即小球的位置可以用

$$\begin{cases} x=R\cos(\omega t+\varphi) & ① \\ y=R\sin(\omega t+\varphi) & ② \end{cases}$$

来表出.

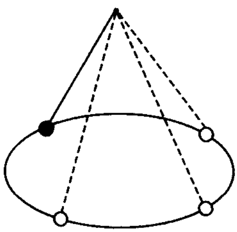


图 1

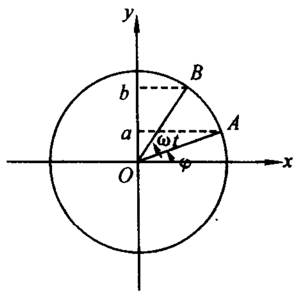


图 2

①、② 式是由两个函数 $x=g(t)$ 与 $y=h(t)$ 组成的,我们通常称这样的组为函数组,用数学方法可计算出这个函数组的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$,这是因为

$$R\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=R\cos(\omega t+\varphi)$$

$$R\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=R\sin(\omega t+\varphi)$$

同样,如果我们从物理运动的意义来分析,也会发现小球运动的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$,这是因为:

当小球完成一圈(即 2π 弧度)的运动时,就周而复始. 设小球完成一圈所需要的时间为 T(即周期),那么就有 $\omega T=2\pi$,于是 T

$= \frac{2\pi}{\omega}$.

在计算小球运动的周期时，我们分别用了数学方法和物理方法，其结果是一致的. 从中可以看到，周期函数这个数学概念，只不过是小球运动(周期运动)这个物理模型的抽象，它反映了客观事物的周期性运动规律.

再让我们看看鸟飞行时翅膀的轨迹. 鸟在空中飞翔，千姿百态. 有的成群结队，还排成一定的队形，像部队行军一样，在空中常速前进，大雁就是这样；有的只是在地面附近活动，从一个屋檐飞向另一个屋檐，从一个树梢飞到另一个树梢，小麻雀就是这样.

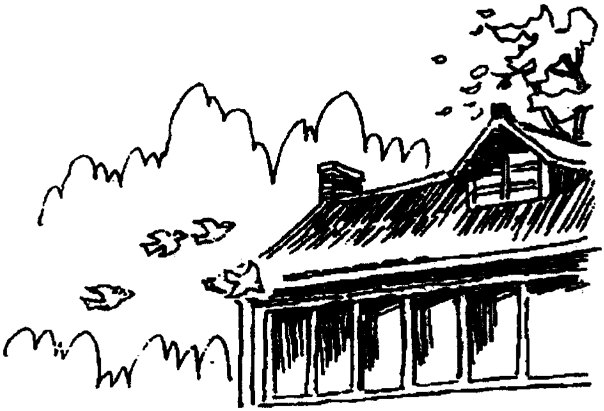


图 3

鸟类在飞行的时候，它的翅膀划出的轨迹是怎样的图形呢？

鸟类在飞行时，它的翅膀上的某个动点不仅作上下等距离、等速度的振动，而且又在横向做匀速的直线运动，因此这个动点所做的是一种复合的运动，它的轨迹形成一条正弦曲线.

正弦曲线的函数式为 $y = \sin x$，它的图象如图 4 所示. 正弦函数是一个周期函数，因此，它的图象也是按照同一个周期不断地反

复出现的.

鸟类飞行时,它的翅膀上下运动一次,翅尖划出的曲线正好是正弦曲线的一个周期,如图 5 中曲线 $OABCD$ 的形状. 在这个周期中,鸟类翅尖划过的垂直距离是 AC',我们把 $\frac{1}{2}AC'$ 叫做正弦函数的振幅. 大雁和麻雀飞行时翅膀的轨迹虽都是正弦曲线,但大雁的翅膀上下运动的周期比较长,振幅也比较大;麻雀的翅膀上下运动的周期比较短,振幅也比较小.

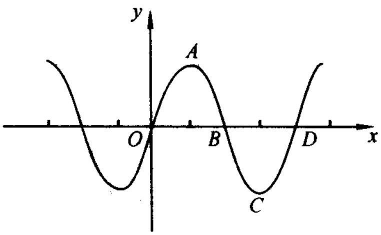


图 4

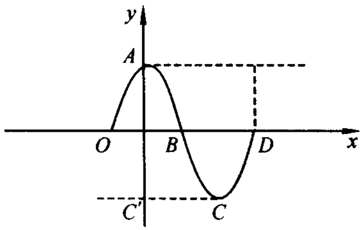


图 5

作为周期函数的特征性质,不难知道:在其定义域内,图象能重复出现,性态呈周期性变化. 因此对它的研究,不必分析其在整个定义域内的情况,而只需讨论它在一个周期内的局部性质就可以了,这给我们搞清周期函数的基本性质带来了很大的便利.

第二节　周期函数的定义

在数学知识中,类似于自然现象中的"周期现象"是大量存在的,如正弦函数 $y=\sin x$ 的值与角 x 的终边所在位置有关,终边每转一周,它便重新回到原来的值.

换句话说,随着角 x 的一周又一周运动,正弦函数 $f(x)=\sin x$ 产生的值出现了周期规律,那么用数学式子如何描述呢?

$\sin(2\pi + x) = \sin x$ 即 $f(2\pi + x) = f(x)$，更一般地有 $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, k \in \mathbf{Z}$，即 $f(x + 2k\pi) = f(x), k \in \mathbf{Z}$. 将 2π 抽象为 T，就可得到周期函数的定义.

我国现行高中数学教科书中正是这样定义周期函数的（后面简称"课本定义"）：对于函数 $y = f(x)$，如果存在一个常数 $T(\neq 0)$，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有

$$f(x + T) = f(x)$$

成立，那么函数 $y = f(x)$ 叫做周期函数，常数 $T \neq 0$ 叫做这个函数的周期. 如果在所有周期中存在一个最小正数，就把这个最小的正数叫做最小正周期.

在直角坐标系上可以分别画出正弦函数、余弦函数和正切函数的图象（见图 6 与图 7）.

图中实线是根据设值描点法列出三角函数表绘制的，由于

$\sin(2\pi + x) = \sin x$，

$\cos(2\pi + x) = \cos x$，

$\tan(\pi + x) = \tan x$.

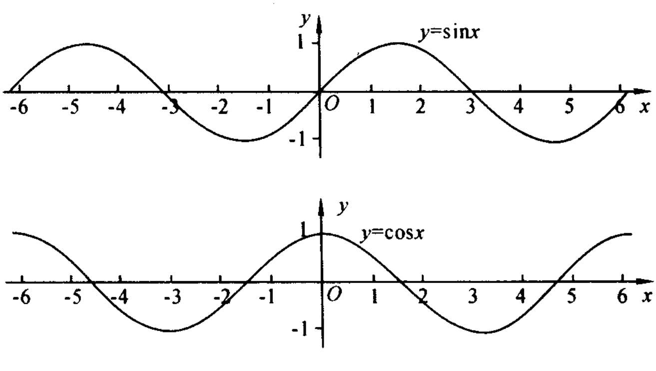


图 6

所以我们可以预料余下部分应由虚线来完成. 就是说，正弦函数值、余弦函数值和正切函数值都是依照一定的规律不断重复出

现的(周而复始)，这正是三角函数的一个极其重要的性质——周期性.这里值得注意的是，正弦函数和余弦函数，当 x 的值每增加(或减少)2π 时，函数值便周而复始，而正切函数，当 x 的值每增加(或减少)π 时，函数值便周而复始.因此，正弦函数 $y=\sin x, x\in \mathbf{R}$ 都是周期函数，$2k\pi(k\in \mathbf{Z}$ 但 $k\neq 0)$ 是它们的周期，最小正周期均为 2π.

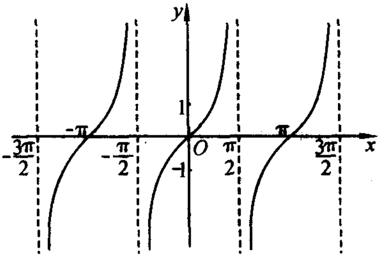


图 7

正切函数 $y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ 和余切函数 $y=\cot x$，$x\neq k\pi, k\in \mathbf{Z}$ 也都是周期函数，最小正周期为 π.

以上是我们在课本中熟知的内容，在理解周期函数和周期的定义时，要注意以下几点：

(1) 要特别注意定义中“每一个值”四个字，它表明：等式 $f(x+T)=f(x)$ 必须在 $f(x)$ 的定义域上恒成立时，$f(x)$ 才是周期函数，T 是它的一个周期.

例如，$\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{4}$，但 $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})\neq\sin\frac{\pi}{6}$，说明 $\frac{\pi}{2}$ 不能使 $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x$ 对定义域内每一个值都成立，因此 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $\sin x$ 的周期.

(2) 周期 T 为非零常数，与 x 的取值无关.

(3) 如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T$ 也是它的周期，因为 $f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x)$，类似地可证 $3T, 4T, \cdots$，也都是这个函数的周期，即 $nT(n\in \mathbf{N}^*)$ 都是 $f(x)$

的周期(严格证明可用数学归纳法给出).

注 上述结论说明,当 $T>0$ 时,$f(x)$ 有无数个正周期;当 $T<0$ 时,$f(x)$ 有无数个负周期.

可见一个函数是周期函数,它必有无数个周期,如果在所有周期中存在着一个最小(大)的正(负)数,那就是最小正周期(最大负周期)(最小正周期和最大负周期如存在必唯一).

周期函数的周期有三种情况:

(Ⅰ)同时具有正、负周期,如 $y=\sin x$,2π 和 -2π 都是它的周期.

(Ⅱ)只有正周期没有负周期,如 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}^{+}$.

(Ⅲ)只有负周期没有正周期,如 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}^{-}$.

(4) 在一个周期函数所有的周期中,并不一定存在着一个最小的正数,即并不是任何周期函数都有最小正周期.

例 1 常数函数 $f(x)=c$(c 为常数),$x\in\mathbf{R}$,任何正实数 T 都是它的周期,因为

$$f(x+T)=c=f(x)$$

但正数集中没有最小值,故 $f(x)$ 无最小正周期.

例 2 狄里赫莱函数 $D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数})\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$,它是周期函数,但没有最小正周期.

证 ① 设 r 是任意给定的非零有理数,则

当 x 为有理数时,$x+r$ 仍为有理数,当 x 为无理数时,$x+r$ 还是无理数,即有

$$D(x+r)=D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 是有理数})\\ 0 & (x\text{ 是无理数})\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 是周期函数,任意非零有理数都是它的周期.

② 任何无理数都不是它的周期,因为对给定的无理数 p,当 x 是有理数时,$x+p$ 是无理数,因而 $D(x+p)=0\neq 1=D(x)$,

不符合周期函数的定义.

综合①、②,函数 $f(x)$ 的周期只能是有理数,但正有理数集中没有最小值,所以周期函数 $f(x)$ 没有最小正周期.

(5) 并不是只有三角函数才是周期函数.

例 3 常数函数 $f(x)=1, x \in D, D=\{0\} \cup(2,+\infty)$,容易验证对任意的不小于 2 的正常数 l,都有

$$f(x+l)=f(x), x \in D$$

即 $f(x)(x \in D)$ 是周期函数,不小于 2 的任何正数都是它的周期,其最小正周期为 2.

(6) 函数 $f(x)$ 的最小正周期 T^{*},它首先是一个周期,另外还要满足:若 T 是 $f(x)$ 的任一正周期,则 $0<T^{*} \leqslant T$.

因而证明某一正数是函数 $f(x)$ 的最小正周期时,需先证明它是函数的一个正周期.

例 4 $y=\sin x$ 的最小正周期是 2π.

证 (用反证法) 设 T 是 $y=\sin x\ (x \in \mathbf{R})$ 的最小正周期,且 $0<T<2\pi$,根据周期函数的定义,当 x 为任何值时,都有 $\sin(x+T)=\sin x$,令 $x=\frac{\pi}{2}$ 代入上式得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin \frac{\pi}{2}$,即 $\cos T=1$,但这与 $T \in(0,2\pi)$ 时,$\cos T<1$ 矛盾,这就说明了当 $T \in(0,2\pi)$ 时,T 不是 $y=\sin x$ 的周期,而 $T=2\pi$ 时,$\sin(x+2\pi)=\sin x$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,故 $y=\sin x(x \in \mathbf{R})$ 的最小正周期为 2π.

例 5 $y=2\cos\left(kx+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期为 T,且 $T \in(1,3)$,则正整数 k 是__________.

解 由 $T=\frac{2\pi}{|k|}$,又 $1<T<3$,即 $1<\frac{2\pi}{|k|}<3$,对正整数 k,取 $\pi \approx \frac{22}{7}$,则 $\frac{44}{21}<k<\frac{44}{7}$.

所以 $k=3,4,5,6$.

例 6 (2003 年春季高考北京理科试题) 若存在常数 $p>0$,使