高职高专教材

高等数学

岑　春　　陈晓兵　主编

GAODENG SHUXUE

人民交通出版社
China Communications Press

高职高专教材

高等数学

● 岑　春　　陈晓兵　主编

人民交通出版社

内 容 提 要

本书是在总结近年高等职业技术院校数学教学改革的基础上编写的。本书内容包括：函数与极限、导数与微分、积分、微分方程简介、多元函数微积分、级数、线性代数初步、概率与数理统计初步。本书以讲清概念、强化应用、运算为主，适度降低理论要求，加强学生实际应用能力的培养。

本书适合高等职业院校各专业、成人教育、电视大学相关专业使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/岑春，陈晓兵主编．—北京：人民交通出版社，2007.8

ISBN 978-7-114-06781-5

Ⅰ.高... Ⅱ.①岑...②陈... Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 133195 号

书　　名： 高等数学
著 作 者： 岑　春　陈晓兵
责任编辑： 赵瑞琴
出版发行： 人民交通出版社
地　　址： (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址： http://www.ccpress.com.cn
销售电话： (010)85285656，85285838，85285995
总 经 销： 北京中交盛世书刊有限公司
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 北京鑫正大印刷有限公司
开　　本： 787×1092　1/16
印　　张： 13
字　　数： 323 千
版　　次： 2007 年 8 月第 1 版
印　　次： 2007 年 8 月第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978-7-114-06781-5
印　　数： 0001－5000 册
定　　价： 19.00 元

前言 QIANYAN

确保高等职业教育的教学质量，办出高职特色、编写出适应时代的教材，是当前高等职业教育教学工作的重点之一。为了适应高等职业教育教学改革的客观要求，贯彻落实教育部关于高职高专院校《高等数学课堂教学基本要求》，我们在认真总结近年高等职业技术院校数学教学改革的基础上，于2005年7月编写了高职高专《高等数学基础》教材。经过一年多的使用，在充分听取各有关高职高专院校意见的基础上，进行了较大幅度的修改，把微积分、微分方程、线性代数、概率和数理统计整合在一起，在内容结构、难易程度、体系顺序等方面进行了相应的调整和安排。

本教材具有以下几个特点：

努力体现高等职业技术教育的特点，贯彻"以应用为目的，以必须、够用为度"的教学原则，力求兼顾不同专业的需求，以讲清概念、强化应用为重点，适当降低理论要求，加强学生实际应用能力的培养。

根据高等职业教育的规律，结合高等职业技术院校各专业对数学的需要以及高职学生的实际，选取合适的内容，以通俗的、容易理解的语言，由浅入深、由简入繁、由具体到抽象地展开知识点。

按照模块形式编排，不刻意追求理论体系的完整性，而是突出知识的交汇性和应用性，每章独立成篇，其内容、知识点相对独立，而且都有应用举例。例题、习题紧扣所学知识，突出运用性。

本教材在原有内容：函数与极限、导数与微分、积分、微分方程简介、空间解析几何简介、多元函数微积分、数理统计基础及应用的基础上，增加了级数、线性代数初步、概率等知识。在每章、每节后都配有一定数量的习题、测试题供教师和学生选用，书末附有部分习题参考答案。

在编写过程中，始终得到人民交通出版社的热情关怀和大力支持，在此谨表衷心的感谢！本教材由岑春、陈晓兵主编，李静、王文耀、熊文、李小华、颜筱红、苏坚等老师参与了该教材的编写与修改，主编、参编所在院校给予了大力协助，在此特致谢意！

本教材按110学时进行编写，学时不足的院校可在内容上作适当删减。

虽然我们力争做到既能为读者进一步学习专业知识打下良好的数学基础,又能使读者学会运用所学的数学知识解决实际问题。但由于各专业对数学知识的需求差异较大,加上我们对各专业的了解不够全面。因此,教材难免存在不能满足各院校所有专业需求等不足之处。恳请相关院校同仁和读者朋友在使用本教材时多提宝贵意见。

编　者

2007 年 6 月

目录 MULU

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．函数是高等数学中最重要的基本概念．极限是研究自变量在某一变化过程中函数的变化趋势，是高等数学的重要概念之一，掌握函数和极限的概念、性质和计算是学好高等数学的基础．

第一节　函　　数

1．函数的概念

先看下面的例子：

例 1　某商店从 8 月 1 日起开张营业，表 1-1 是该商店从 8 月 1 日至 8 月 10 日的营业额的统计．

某商店营业额　　表 1-1

日期(8月)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
营业额(元)	632	720	816	755	908	1130	685	698	734	913

例 2　图 1-1 是某气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线．

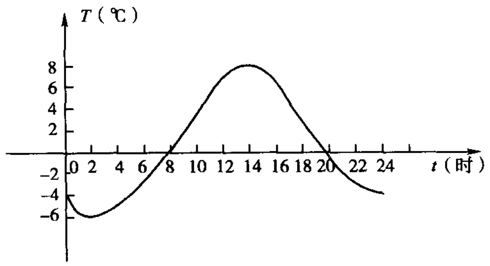

图　1-1

例 3　一台价值 6500 元的电脑，每年贬值 20%．x 年后它的价值为 y（元），则

$$y = 6500(1 - 20\%)^x.$$

例 4　某市电话局规定市话收费标准为：3 分钟以内，收费 0.18 元；超过 3 分钟，每分钟收费 0.11 元．则每次打电话的费用 y（元）与打电话的时间 t（分钟）的关系为：

$$y = \begin{cases} 0.18, & 0 < t \leqslant 3, \\ 0.18 + (t-3) \times 0.11, & t > 3. \end{cases}$$

以上四例的实际意义虽不相同,但却具有共同之处:每个例子所描述的变化过程都有两个变量,当其中的一个变量在一定的变化范围内取定一数值时,按照某个确定的法则,另一个变量都有唯一确定的数值与之对应.变量之间的这种对应关系就是函数概念的本质.

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的数集.如果对于 D 中的每一个数 x,按照某种对应法则 f,变量 y 都有唯一确定的数值和它对应,那么变量 y 叫做变量 x 的**函数**,记作

$$y = f(x).$$

集合 D 叫做这个函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.函数值的集合叫做函数的**值域**,记作 M(图 1-2).

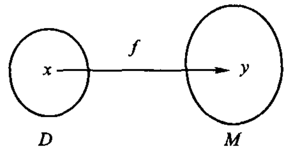

图 1-2

2. 函数的表示法

表示函数的常用方法有**表格法**、**图像法**和**公式法**.

例 1 是把一系列自变量的值和与之相对应的函数值列成表格来表示函数关系的,称为**表格法**;例 2 是用直角坐标中的点或曲线来表示函数关系的,称为**图像法**;例 3 和例 4 是用公式表示两个变量间的函数关系的,称为**公式法**.其中例 4 中的函数在自变量不同的取值范围内采用了不同的式子来表示,这样的函数称为**分段函数**.

分段函数在整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.求分段函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

例 5 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leqslant 1, \\ x^2+1, & x > 1. \end{cases}$ 求 $f(-1)$ 和 $f(2)$.

解 $f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$,

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

3. 函数的定义域

确定函数定义域的原则是使数学式的运算有意义.在实际问题中,函数的定义域应根据问题的实际意义来确定.如例 2 中自变量 t 的取值范围是 $0 \leqslant t \leqslant 24$.

例 6 求函数 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ 和 $g(x) = \lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)$ 有意义,必须使 $x^2 - 1 > 0$,即 $x > 1$ 或 $x < -1$,所以函数 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域为 $x > 1$ 或 $x < -1$.即 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

要使 $g(x)$ 有意义,必须使 $\dfrac{x}{x-2} > 0$,即 $x > 2$ 或 $x < 0$,所以函数 $g(x) = \lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

4. 反函数

我们知道,正方体的体积 V 与其棱长 x 的关系是 $V = x^3$,这里 x 是自变量,V 是 x 的函数;

反过来,如果已知正方体的体积 V,则可求得其棱长 $x=\sqrt[3]{V}$,此时,V 是自变量,x 是 V 的函数.以上两个函数关系 $V=x^3$,$x=\sqrt[3]{V}$ 的对应法则是互逆的,我们称它们互为反函数.

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数,值域为 M,如果对于每一个 $y\in M$,都可以由关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 与之对应,其对应法则记作 f^{-1},那么定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示函数,故常把函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

例如,函数 $y=x^3$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$.

由反函数的定义可知,函数 $y=f(x)$ 的定义域就是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域;函数 $y=f(x)$ 的值域就是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

例 7 求函数 $y=3x-1$ 的反函数.

解 由 $y=3x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{3}$,将 x、y 互换,得 $y=\dfrac{x+1}{3}$,所以函数 $y=3x-1$ 的反函数为 $y=\dfrac{x+1}{3}$.

可以证明,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 7 中的一对反函数的图像如图 1-3 所示.

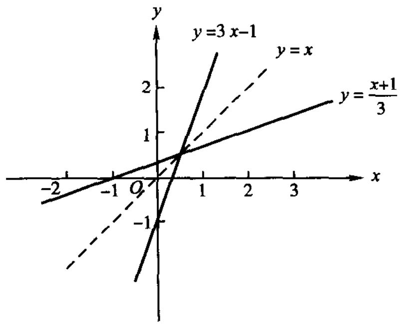

图 1-3

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{16-x^2}$; (2) $y=\dfrac{5}{x-3}$; (3) $y=\log_5(2x+1)$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\ln x$; (5) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

(6) $y=\log_3\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$,求 $f(0)$,$f(\dfrac{1}{2})$,$f(-2)$,$f(a)$,$f(x+1)$,$f(\dfrac{1}{x})$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\geqslant 0\\ x^2-2, & x<0\end{cases}$,求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(3)$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{1}{2}(x+5)$; (2) $y=3-2x$; (3) $y=\sqrt[3]{x+1}$; (4) $y=1-e^{2x}$.

第二节 函数的几种特性

1. 有界性

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在一个正数 M,使得对于任意的 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

恒有 $|\sin x| \leqslant 1$(图 1-4).

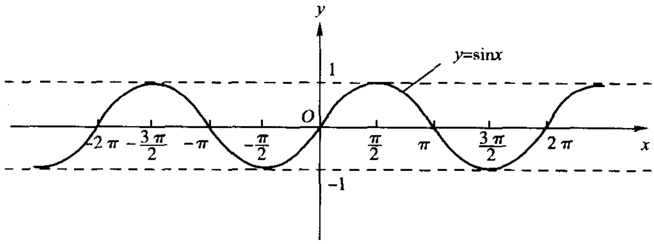

图 1-4

而函数 $f(x) = 2x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界的(图 1-5).

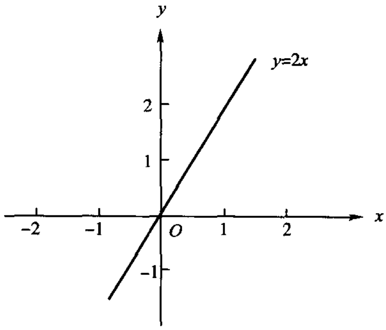

图 1-5

2. 单调性

定义 1.2.2 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的;如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少**的.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的(图 1-6);单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的(图 1-7).

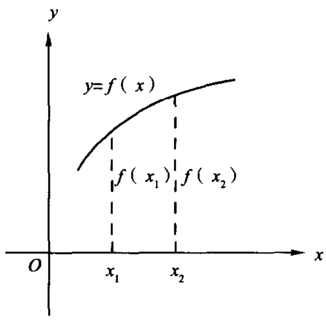

图 1-6

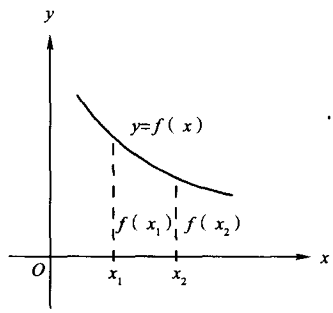

图 1-7

例 1 证明函数 $y = 3x - 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

证 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任取两点 x_1 和 x_2,且 $x_1 < x_2$.

因为 $f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 1) - (3x_2 - 1) = 3(x_1 - x_2) < 0$,

即 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以 $y = 3x - 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对于任意 $x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**;如果对于任意 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则

称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

显然,奇函数的图像关于原点对称(图 1-8);偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-9).

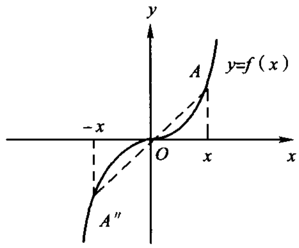

图 1-8

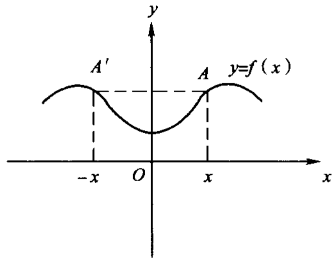

图 1-9

例 2 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{x}$; (2) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 3$; (3) $f(x) = -4x^3 + 1$.

解 (1)函数的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

由于 $f(-x) = 2 \times (-x)^3 + \dfrac{1}{(-x)} = -2x^3 - \dfrac{1}{x} = -(2x^3 + \dfrac{1}{x}) = -f(x)$.

所以函数 $f(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{x}$ 是奇函数.

(2)函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

由于 $f(-x) = (-x)^4 + 5 \times (-x)^2 - 3 = x^4 + 5x^2 - 3 = f(x)$.

所以函数 $f(x) = x^4 + 5x^2 - 3$ 是偶函数.

(3)函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

由于 $f(-x) = -4 \times (-x)^3 + 1 = 4x^3 + 1$.

而 $f(-x) \neq -f(x)$, 且 $f(-x) \neq f(x)$.

所以 $f(x) = -4x^3 + 1$ 既不是奇函数,也不是偶函数.这样的函数被称为**非奇非偶函数**.

4. 周期性

定义 1.2.4 如果存在不为零的数 T,使得对于函数定义域内的任意 x,都有 $f(x + T) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,并称 T 为函数 $f(x)$ 的**周期**.满足这个等式的最小正数,称为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $f(x) = \cos x$ 的周期为 2π(图 1-10).因为对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,都有 $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

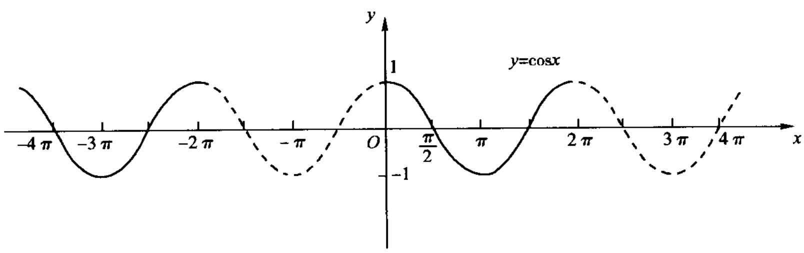

图 1-10

习题 1.2

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^3 + 2x$; (2) $f(x) = 3x^4 - x^2 + 1$; (3) $f(x) = 5 + \sin x$;

(4) $f(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$; (5) $f(x) = 3x^2 + \cos x$; (6) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(7) $f(x) = xe^x$; (8) $f(x) = a^x + a^{-x}\ (a > 0)$.

2. 判断下列函数的单调性:

(1) $y = 6x^2 + 1, x \in [0, +\infty)$;

(2) $y = 2 - 3x, x \in (-\infty, +\infty)$.

第三节 初等函数

1. 基本初等函数

幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数);

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数);

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数);

三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$,

$y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

这五种函数统称为**基本初等函数**(基本初等函数的定义、图像、性质见附录 III).

2. 复合函数

实际生活中常常遇到这样的例子:某学生一年的生活费 y 完全取决于其家庭的收入 u (即 y 是 u 的函数),而其家庭的收入 u 又完全取决于家里一年粮食的产量 x (即 u 是 x 的函数).因此该学生一年的生活费 y 最终取决于家里一年的粮食的产量 x (即 y 是 x 的函数).这里 y 与 x 的这种函数关系称作是一种复合的函数关系.

定义 1.3.1 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$,则 $y = f[\varphi(x)]$ 就叫做 x 的**复合函数**.其中 u 叫做**中间变量**.

这里要注意,函数 $u = \varphi(x)$ 的值域应该取在函数 $y = f(u)$ 的定义域内,否则复合函数将失去意义.

复合函数可以由两个函数,也可以由多个函数复合而成.

例 1 已知 $y = \sqrt{u}$, $u = 2v^3 - 1$, $v = \sin x$,将 y 表示成 x 的函数.

解 将 $v = \sin x$ 代入 $u = 2v^3 - 1$,得 $u = 2\sin^3 x - 1$;

再将 $u = 2\sin^3 x - 1$ 代入 $y = \sqrt{u}$ 得

$$y = \sqrt{2\sin^3 x - 1} .$$

例 2 写出下列复合函数的复合过程:

(1) $y = 3^{\cos x}$; (2) $y = \lg(2 - x)$; (3) $y = \tan^2(2x^3 + 3)$; (4) $y = \sqrt{\lg(3^x + 2)}$.

解 (1) $y = 3^u$, $u = \cos x$;

(2) $y = \lg u$, $u = 2 - x$;

(3) $y = u^2$, $u = \tan v$, $v = 2x^3 + 3$;

(4) $y = \sqrt{u}$, $u = \lg v$, $v = 3^x + 2$.

3. 初等函数

定义 1.3.2 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的函数叫做**初等函数**.

例 3 写出初等函数 $y = \arctan\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 的复合过程.

解 初等函数 $y = \arctan\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是由 $y = \arctan u$, $u = \sqrt{v}$, $v = x^2 - 2x + 5$ 复合而成的.

4. 函数的应用举例

例 4 (1)年利率为 1 % ,问 1000 元在 x 年后按单利计算(每年只以本金计算利息)变成多少元?

(2)年利率为 1 % ,问 1000 元在 x 年后按复利计算(每年以本利和计算利息)变成多少元?

解 (1)设 x 年后变成 y 元,按单利计算 $y = 1000(1 + x \cdot 1\%)$.

(2)设 x 年后变成 y 元,按复利计算 $y = 1000(1 + 1\%)^x$.

例 5 旅客乘坐火车时,随身可免费携带不超过 20 公斤物品,超过 20 公斤部分,每公斤收费 0.5 元.试列出收费与物品重量的函数关系.

解 设物品重量为 x 公斤,收费为 y 元,依题意,得

$$y = \begin{cases} 0, & 0 < x \leqslant 20, \\ 0.5(x - 20), & x > 20. \end{cases}$$

例 6 某商品单价 23 元,月固定成本 300 元,每件商品成本为 18 元.试确定利润 L 与销量 x 的函数关系,并问月销售多少件商品能否获利 500 元?

解 月销售收入 $R = 23x$,成本 $C = 300 + 18x$,故利润 L 与销量 x 的函数关系为

$$L = R - C = 23x - (300 + 18x) = 5x - 300 , \ x \geqslant 0 .$$

当 $L = 500$ 时,得 $x = 160$ (件).

即每月销售 160 件商品能获利 500 元.

习题 1.3

1. 写出下列函数组构成的复合函数:

(1) $y = \arcsin u$, $u = \sqrt{1 - x}$;

(2) $y = u^3$, $u = \ln v$, $v = 1 - 3x^2$;

(3) $y = u^2$, $u = \log_5 x$;

(4) $y = \sqrt{u}$, $u = 3 - v^2$, $v = \cos x$.

2. 写出下列复合函数的复合过程:

(1) $y = e^{1-x^2}$;

(2) $y = \sin^3(8x + 5)$;

(3) $y = \arctan(1 + 2x)$;

(4) $y = \sqrt{\ln(3 - x^2)}$.

3. 某人有现金 2000 元,存入银行的一年期定期储蓄,到期自动转存(即把本期利息纳入下期本金继续计息,相当于复利计息).假设一年定期的利率为 2.25%,问 x 年后的本利和是

多少？3 年后的本利和是多少？

4. 乘坐某种出租车，行驶路程不超过 3 公里时，付费 7 元；行驶路程超过 3 公里时，超过部分每公里付费 1.4 元. 假定汽车行驶中没有等候时间，求付费金额与行驶路程之间的关系.

5. 某种产品的单价为 15 元，固定成本为 200 元，设每生产一件产品成本增加 8 元。若产销平衡，试确定利润 L 与产量 x 的函数关系，并问月生产多少件产品能获利 500 元？

第四节　极　　限

1. 数列的极限

按自然数顺序排成的一列数：$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 叫做数列，简记作 $\{x_n\}$. 其中 x_1叫做第一项；x_2叫做第二项；x_n叫做第 n 项，又叫做数列 $\{x_n\}$ 的一般项或通项.

考察下面无穷数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势：

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots \frac{n}{n+1}, \cdots$

当 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的一般项 $\frac{1}{n}$ 越来越趋近于一个确定的常数 0；数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的一般项 $\frac{n}{n+1}$ 越来越趋近于一个确定的常数 1. 对于无穷数列的这一变化趋势，我们有如下定义：

定义 1.4.1　对于数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，一般项 x_n的值无限趋近于一个确定的常数 a，则 a 叫做数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的**极限**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a$，当 $n \to \infty$ 时.

对于常数数列 $x_n = C$，其极限就是常数 C. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

由数列的定义，上面考察的两个数列的极限可分别记作：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

2. 函数的极限

(1) $x \to \infty$ 时函数的极限

考察函数 $y = \frac{1}{x}$. 从图 1-11 中可以看出，当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 y 无限趋近于常数 0，此时我们把 0 叫做函数 $y = \frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

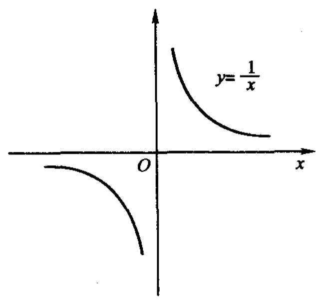

图 1-11

定义 1.4.2　如果当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty).$$

上述定义中，$x \to \infty$ 指的是 x 既取正值无限增大(记为 $x \to +\infty$)，同时也取负值而绝对值

无限增大(记为 $x\to-\infty$).但有时 x 的变化趋势只能或只需这两种变化趋势中的一种情形.类似地可以给出 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的极限定义,这里不做讨论.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})$.

解 当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x^2}$ 无限趋近于 0.此时,函数 $(1+\dfrac{1}{x^2})$ 的值趋近于 1,所以

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1.$$

(2) $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1.4.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁有定义,如果当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

例 2 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}(2x^2+1)$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解 (1)当 x 无限趋近于 1 时,$2x^2+1$ 无限趋近于 3,所以

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)=3.$$

(2)由于 $\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$,当 x 无限趋近于 -1 时,$x-1$ 无限趋近于 -2,所以

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$$

注:虽然函数 $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 在 $x=-1$ 点处无定义,但函数在 $x=-1$ 点的左右近旁有定义,且函数的极限值与函数在该点处是否有定义无关.

有时 x 只能或只需从 x_0 的某一侧趋近于 x_0,因此,类似地可以定义 x 从 x_0 的左侧(即 $x\to x_0^-$)趋于 x_0 和 x 从 x_0 的右侧(即 $x\to x_0^+$)趋于 x_0 的极限,这里不做讨论.

3. 极限的运算法则

对于极限的运算,有下面法则:

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$($C$ 为常数);
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

例 3 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x+2)$; (2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3+3}{3-x}$; (3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{3-x}$.