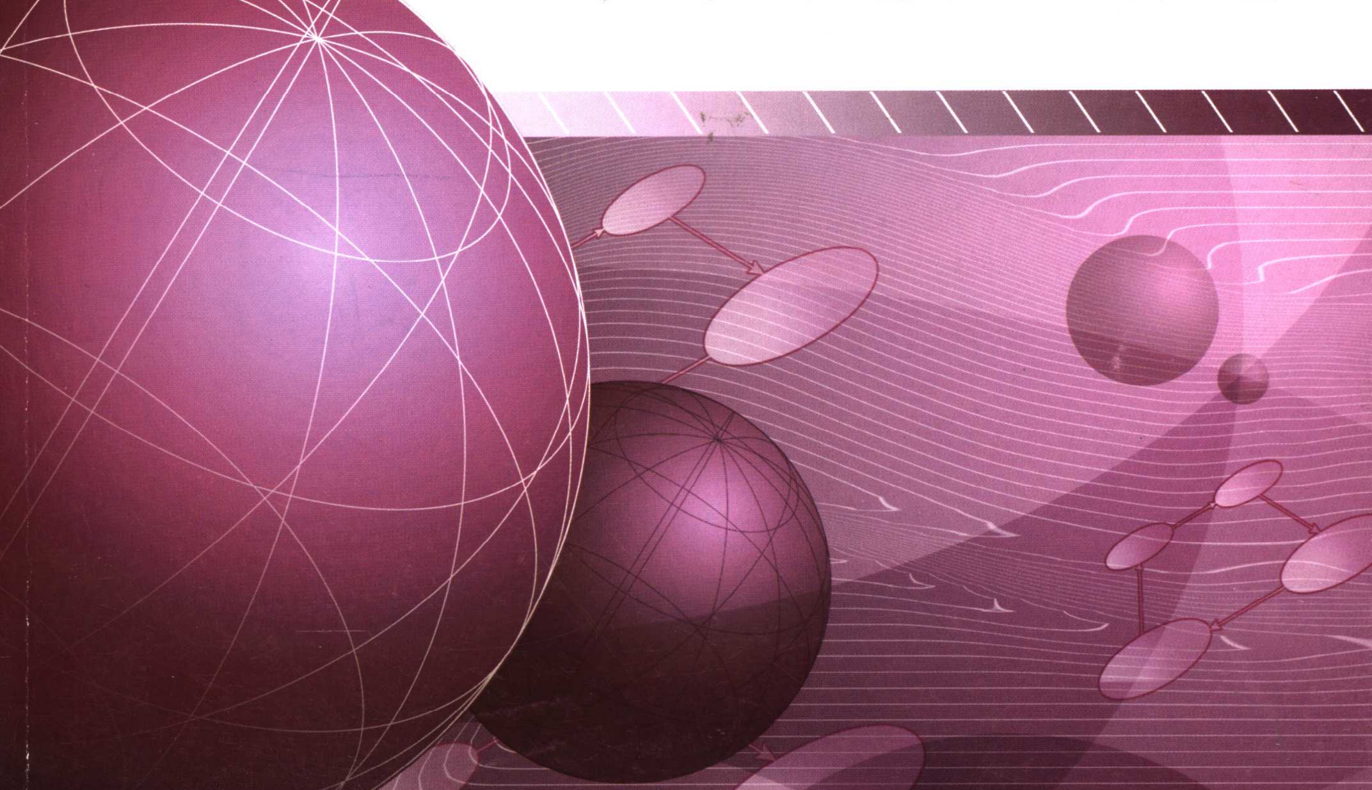
高等学校教材

概率论与数理统计

基本练习题、增补题



章栋恩　主编
曹显兵　主审

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校教材

概率论与数理统计
基本练习题、增补题

章栋恩　主编

曹显兵　主审

王雅玲　张君施　徐美萍　编写

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书内容是与大学本科概率论与数理统计教材相配套的练习题及解答，全书共分 7 章，内容包括随机事件、概率、随机变量、多维随机变量、数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验。每章由内容提要、基本练习题及答案、增补题及答案三部分组成。通过对基本练习题的掌握，读者可以轻松应对本科阶段概率论与数理统计课程的各种考试。增补题及答案部分是为进一步提高或为考研人员编写的。这部分的题量虽然不多，但已经基本覆盖研究生考试大纲。

本书可作为本科概率论与数理统计教材的配套用书，也可作为考研人员的参考书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计基本练习题、增补题 / 章栋恩主编．—北京：电子工业出版社，2007.12

(高等学校教材)

ISBN 978-7-121-05066-4

Ⅰ．概… Ⅱ．章… Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 145795 号

责任编辑：许菊芳　　文字编辑：杜国梁

印　　刷：北京市通州大中印刷厂

装　　订：三河市鹏成印业有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

开　　本：787×980　1/16　印张：11.5　字数：258 千字

印　　次：2007 年 12 月第 1 次印刷

定　　价：19.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　言

本书是按照“概率论与数理统计”教学基本要求编写的，同时参照了硕士研究生入学考试大纲。

全书包括 8 章，分别是：第 1 章，概率论的基本概念；第 2 章，随机变量及其分布；第 3 章，多维随机变量及其分布；第 4 章，随机变量的数字特征；第 5 章，大数定律与中心极限定理；第 6 章，样本及抽样分布；第 7 章，参数估计；第 8 章，假设检验。

每章都由四部分组成。第一部分为内容提要，它包括该章中的定义、定理与重要公式的系统总结，既可以作为学习的初步，也可以作为复习提纲。它与教科书中的阐述方式不尽相同。第二部分为基本练习题，其中分为填空题、选择题和解答题。它们是在作者多年教学实践基础上精心挑选的，能使学生领会各章的主要内容、解题方法与技巧。解题是整个学习过程中必不可少的重要环节，希望读者不急于去查阅后面的答案。第三部分为基本练习题答案及部分解答题详解。填空题与选择题有全部答案，它不会影响到读者过分依赖于答案而免去独立思考。解答题只提供了部分习题的详细解题过程，目的是给读者留有足够的思考空间。其实读者已经可以从部分习题的详细解题过程中获得对所有问题的基本解题方法、技巧和思路，从而能自己完成其他解答题的答案。第四部分是增补题及解答。在总体上，这部分的题要比第三部分的题难一些。虽然把增补题的答案直接写在题目的下面，也希望读者不要直接去阅读答案。如果一时不能解决，请读者不要放弃。经过反复思考，最终找到解决方法，此时的收获是最大的。

本书由北京工商大学数理系章栋恩主编，曹显兵主审。参加本书编写的教师有王雅玲、张君施、徐美萍。初稿的第 1 章、第 4 章、第 6 章由王雅玲编写；第 2 章、第 5 章、第 7 章由张君施编写；第 3 章、第 8 章由徐美萍编写。初稿写成以后又经过多次交叉核对、修改、整理。

在编写过程中，作者得到了学校教务处和其他各部门以及数理系全体同仁的大力支持，在此我们表示衷心感谢！

编者

2007 年 9 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　概率论的基本概念

1.1　内容提要

1.1.1　随机事件

1. 随机试验和随机事件

随机试验的所有可能结果的全体称为**样本空间**，用S表示。样本空间的元素，即随机试验的每一个结果称为一个**样本点**。

样本空间的任意一个子集是一个**随机事件**，简称**事件**。

由一个样本点组成的子集称为**基本事件**。有两个特殊的事件。一个是S本身，每次试验都必然发生，称为**必然事件**。另一个是空子集$\varnothing$，每次试验都不会发生，称为**不可能事件**。

2. 随机事件的运算

（1）事件A与事件B至少有一个发生，称为A与B的**和事件**，记为$A\cup B$。事件$A_1,\cdots,A_n$中至少有一个发生，称为$A_1,\cdots,A_n$的和事件，记为$\bigcup_{k=1}^{n}A_k$。类似地，可定义无穷多个事件的和事件$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$。

（2）事件A与事件B同时发生，称为A与B的**积事件**，记为$A\cap B$或AB。类似地，可定义有限多个事件的积事件$\bigcap_{k=1}^{n}A_k$与无穷多个事件的积事件$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$。

（3）事件A发生，而事件B不发生，称为A与B的**差事件**，记为$A-B$。

3. 随机事件的关系

（1）作为子集，如果有$B\supset A$，则称事件B包含事件A。$B\supset A$表示如果事件A发生，则事件B必然发生。

如果$A\supset B$，且$B\supset A$，则称事件A与事件B**相等**。记为$A=B$。相等的事件或者同时发生，或者同时不发生。

（2）作为子集，如果有$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B**互斥**或**互不相容**。A与B

互斥表示事件 A 与事件 B 不能同时发生。

如果 $A \cup B = S$， $A \cap B = \varnothing$，则称事件 B 是事件 A 的**对立事件**。记作 $B = \overline{A}$ 。在随机试验中，事件 A 与对立事件 B 中有且只有一个发生。

4. 事件的运算律

（1）和与积

交换律

$$A \cup B = B \cup A，\quad AB = BA$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)，\quad (AB)C = A(BC)$$

分配律

$$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)，\quad (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$$

（2）对立事件

$$\overline{\overline{A}} = A，\quad \overline{A} = S - A$$

（3）德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}，\quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. 事件的运算与关系

（1）对于任意的随机事件 A,B，有

$$A \cup B \supset A \supset AB，\quad A \supset A - B$$

（2）当 $B \supset A$ 时，有

$$A \cup B = B，\quad AB = A，\quad A - B = \varnothing$$

（3）当 A,B 互不相容时，有

$$AB = \varnothing，\quad A - B = A，\quad B - A = B$$

1.1.2 概率

1. 概率的定义

设 E 是随机试验，S 是样本空间。对每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果集合函数 $P(A)$ 满足以下条件：

（1）非负性

$$P(A) \geqslant 0$$

（2）规范性

$$P(S)=1$$

（3）可列可加性

如果 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容，即

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则 $P(A)$ 称为事件 A 的概率。

2. 概率的性质

（1）不可能事件的概率为 0

$$P(\varnothing)=0$$

（2）概率的有限可加性

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

（3）如果 $B \supset A$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

由此可得，如果 $B \supset A$，则

$$P(B) \geqslant P(A)$$

（4）对立事件的概率

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

（5）加法公式

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

（6）事件的差的概率

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(A \cup B)-P(A)$$

由此可得不等式

$$P(B-A) \leqslant P(B)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3. 概率性质的推广

设 A,B 和 C 是任意的三个事件，则加法公式可以推广为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

1.1.3 古典概型

1. 古典概型的特征

（1）样本空间中样本点的个数有限；

（2）每个基本事件发生的概率相等。

2. 概率公式

古典概型中概率的定义

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中样本点个数}}{\text{样本空间 }S\text{ 中样本点总数}}$$

1.1.4 条件概率

1. 条件概率

定义 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率。

由定义可得：

（1）如果 $B\supset A$，则

$$P(B\mid A)=1$$

（2）如果 A 与 B 互不相容，则

$$P(B\mid A)=0$$

在条件概率的上述定义中，如果 B 是任意事件，则 $P(B\mid A)$ 就是定义在样本空间 S 的子集上的集合函数 $P(\cdot\mid A)$。可以验证：集合函数 $P(\cdot\mid A)$ 满足概率公理化定义中的三条性质。

因此，条件概率具有无条件概率的相应性质。

设 $P(C)>0$，则

(1) $P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

(2) $P((B-A)|C)=P(B|C)-P(AB|C)$

(3) $P(\bar{A}|C)=1-P(A|C)$

2. 乘法定理

乘法定理 设 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

乘法定理的推论 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$$

乘法定理推广 设 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

3. 全概率公式

定义 设 S 是样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组事件，如果

(1) $A_i(i=1,\cdots,n)$ 两两不相容

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=S$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分。

全概率公式 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,\cdots,n)$，则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

用于已知结果，求原因。即：已知条件概率 $P(B|A_i)$，求概率 $P(B)$。

4. 逆概公式（贝叶斯公式）

贝叶斯公式 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,\cdots,n)$，则对任意事件 B，有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

用于已知原因，求结果。即：已知条件概率 $P(B|A_i)$，求条件概率 $P(A_j|B)$。

1.1.5 独立性

1. 两个事件的独立性

定义 对于事件 A 与 B，如果有 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立。

2. 简单公式

如果 A 与 B 相互独立，则有简单公式。例如：

（1）和事件

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$$

（2）差事件

$$P(A-B)=P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]$$

3. 事件独立的两个定理

必然事件及不可能事件与任何事件相互独立。

定理 1 若 A 与 B 相互独立，且 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=P(B)$，反之亦然。

由此可得事件相互独立的随机试验解释：事件 A 是否发生，不影响事件 B 发生的概率。

定理 2 事件对 $\{A,B\}$，$\{\bar{A},B\}$，$\{A,\bar{B}\}$，$\{\bar{A},\bar{B}\}$ 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立。

4. 多个事件的独立性

定义 对于事件 A,B 和 C，如果有

（1）$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$　　（2）$P(AB)=P(A)P(B)$

（3）$P(AC)=P(A)P(C)$　　（4）$P(BC)=P(B)P(C)$

则称事件 A,B 和 C 相互独立。

定义 如果只有后面三式成立，则称事件 A,B 和 C 两两独立。

注意，如果事件 A,B 和 C 相互独立，则它们两两独立。但是，反过来不成立。

1.2 基本练习题

1.2.1 填空题

1. 设 A,B,C 为三个随机事件，则用 A,B,C 的运算关系表示事件 A 发生、B 与 C 不发生为______。

2. 抛掷三枚均匀的硬币，恰好有两枚正面向上的概率为______。

3. 在 1 到 1000 中随机地取一整数，则取到的整数能被 5 整除的概率为______。

4. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，做不放回抽样，则取出次品的只数为 1 的概率为______。

5. 如果随机事件 A,B 满足______，则称 A,B 互不相容。

6. 一个袋中装有 3 个红球，2 个白球，现从中任取 2 个球，则在这 2 个球中，恰好有 1 个红球 1 个白球的概率是______。

7. 设一箱产品共有 60 件，其中次品有 6 件，现有一顾客从中随机买走 10 件，则下一顾客买 1 件产品买到次品的概率为______。

8. 如果随机事件 A,B 满足______，则称 A,B 为对立事件。

9. 设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$______。

10. 设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(\bar{A})=a$，则 $P(A\bar{B})=$______。

11. 设事件 $A\supset B$，且 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，则 $P(A-B)=$______。

12. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，现从中任取 3 只，则所取的零件中有 2 只次品的概率为______。

13. 如果随机事件 A,B 满足______，则称 A,B 相互独立。

14. 设 A，B 为随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$P(B|A)=0.5$，则 $P(A|B)=$______。

15. 设 A，B 为随机事件，且 $P(A)=1/4$，$P(B|A)=1/3$，$P(A|B)=1/2$，则 $P(B)=$______。

16. 设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.2$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(B)=$______。

17. 设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(A\bar{B})=$______。

18. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$，则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$______。

19. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄球，30 个白球，今有两人依次随机地从袋中各取 1 球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是______。

20. 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$ ______。

21. 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随机取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为______。

1.2.2 选择题

1. 设随机事件 A,B 满足 $P(A\cup B)=1$，则[　]。

   A. A,B 互为对立事件　　B. A,B 互不相容

   C. $A\cup B$ 不一定为必然事件　　D. $A\cup B$ 一定为必然事件

2. 设随机事件 A,B 满足 $P(AB)=0$，则[　]。

   A. A,B 互为对立事件　　B. A,B 互不相容

   C. AB 一定为不可能事件　　D. AB 不一定为不可能事件

3. 设 A,B 是两个事件，则下列结论中不成立的是[　]。

A. $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$　　B. $A\cup B=(A\overline{B})\cup B$

C. 若 $A\subset B$，则 $AB=A$　　D. $\overline{A}B=A\cup B$

4. 设 A,B 是两个事件，则下列结论中正确的是[　]。

A. 若 $P(AB)=0$，则 $AB=\varnothing$　　B. 若 $P(A\cup B)=1$，则 $A\cup B=S$

C. $P(A-B)=P(A)-P(B)$　　D. $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$

5. 设事件 A,B 同时发生必然导致事件 C 发生，则必有[　]。

A. $P(C)\geqslant P(AB)$　　B. $P(C)=P(AB)$

C. $P(C)=P(A\cup B)$　　D. $P(C)\leqslant P(AB)$

6. 设事件 A,B,C 分别表示三个零件是合格品，则下列不正确的是[　]。

A. ABC 表示没有一个零件是废品

B. $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表示至少有一个零件是废品

C. $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 表示恰有一个零件是废品

D. $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}$ 表示至少有两个零件是废品

7. 设 A,B 为两个事件，则下列结论中正确的是[　]。

A. $(A\cup B)-B=A$　　B. $(A-B)\cup B=A$

C. $(A\cup B)-B=A-B$　　D. $(A-B)\cup B\subset B$

8. 事件 A,B 互为对立事件等价于[　]。

A. A,B 互不相容　　B. A,B 相互独立

C. $A\cap B=S$　　D. A,B 构成样本空间的一个划分

9. 设事件 A,B 互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列中正确的是[　]。

A. $P(A\cup B)=1$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(AB)=0$　　D. $P(AB)>0$

10. 在 0, 1, 2, …, 9 这 10 个数字中任意选出三个不同的数字，则取到的三个数字不含 0 和 5 的概率为[　]。

A. $\dfrac{7}{15}$　　B. $\dfrac{7}{10}$　　C. $\dfrac{3}{15}$　　D. $\dfrac{3}{10}$

11. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，甲击中的概率为 0.8，乙击中的概率为 0.7，则甲中乙不中的概率为[　]。

A. 0.56　　B. 0.14　　C. 0.06　　D. 0.24

12. 设一次试验中事件 A 发生的概率为 p，现重复进行 n 次独立试验，则事件 A 至多发生一次的概率为[　]。

A. $1-p^n$　　B. p^n

C. $1-(1-p)^n$　　D. $(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$

13. 设随机事件 A,B 满足 $0<P(A)<1$，$P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则事件 A,B [　]。

A. 互不相容　　B. 相互独立

C. 互斥　　D. 不独立

14. 设随机事件 A、B 满足 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则下列各式正确的是[　]。

A. A 和 B 互不相容　　B. A 和 B 相互独立

C. A 和 B 互斥　　D. A 和 B 不独立

15. 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(\bar{B}|A)=1$，则[　]。

A. A 与 B 互不相容　　B. $P(AB)=0$

C. $\bar{B}\subset A$　　D. $P(B)=1$

16. 设 A,B 是两个事件，且 $0<P(A)<1$，则下列各式中不正确的是[　]。

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$　　B. $P(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}B)$

C. $P(A\cup A)=P(A)$　　D. $P(B)=P(B|A)+P(B|\bar{A})$

17. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$，则在下列给定的 4 对事件中不相互独立的是[　]。

A. $\overline{A\cup B}$ 与 C　　B. $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$

C. $\overline{A-B}$ 与 $\bar{C}$　　D. $\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$

1.2.3 解答题

1. 从数 $1,2,\cdots,2n$ 中任取两个，求它们的和是偶数的概率。

2. 设袋中有编号分别为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个球。从中任取一个，观察编号。

（1）事件 A 为编号不超过 5，求事件 A 的概率；

（2）事件 B 为编号是奇数，求事件 B 的概率；

（3）求事件 $A\cup B$ 的概率。

3. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子。求杯子中球的个数的最大值分别等于 1, 2, 3 的概率。

4. 设 A,B 为随机事件，已知 $P(A)+P(B)=0.8, P(AB)=0.3$，求 $P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)$。

5. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，求 A,B,C 都不发生的概率。

6. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(AC)=0$，$P(BC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 中至少有一个发生的概率。

7. 已知 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.2$。求 $P(\overline{AB})$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com