

高中物理

新世纪
详解版

奥林匹克竞赛

全真 试题

- 权威资料
- 方法技巧
- 金牌思路

国际国内卷

总主编 蓝 洵
本册主编 汪志中

高中物理



奥林匹克竞赛

全真 试题

国际国内卷

李永乐 主编
王鼎昌 主审

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

高中物理奥林匹克竞赛全真试题. 国际国内卷/蓝涧总主编;汪志中主编.—2 版.—武汉:湖北教育出版社.

ISBN 978-7-5351-3973-3

I. 高… II. ①蓝…②汪… III. 物理课—高中—习题
IV. G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 010974 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址: <http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 电话:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店

印 刷:仙桃市新华印务有限责任公司

(433000·仙源大道 15 号)

开 本:850mm×1168mm 1/32

13.25 印张

版 次:2007 年 2 月第 2 版

2007 年 2 月第 1 次印刷

字 数:302 千字

印数:1-8 000

ISBN 978-7-5351-3973-3

定价:18.50 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

前 言

数理化奥林匹克竞赛是覆盖面最广的一种群众性竞赛活动，几乎覆盖了全国各地每一所学校。各级各类的竞赛活动旨在拓宽学生的知识视野，激发学生的学习兴趣，培养学生的思维品质、动手能力，发展学生的个性特长。同时，竞赛活动对促进教师自身素质的提高，促进教学改革的深入开展和教学质量的提高，也起到了积极的作用。

然而竞赛试题内容广博，命题新颖，思路开阔，对学生的综合素质和创新要求较高。但当我们的父母看到孩子做不出训练题目想帮一把却又感到无助之时，总感叹自己手中没有一本好书，不是太难，就是太易，或是太偏，或是缺少系统性，而面对太多的竞赛资料又总觉得有些茫然。我们的许多教师也为竞赛书太多太滥大伤脑筋，为竞赛缺少一个既有系统性而又不超竞赛大纲的书而犯愁。为此我们广泛收集，将近几年的小学、初中、高中的全国部分省市的数理化竞赛试题进行精选，将全国数理化联赛试题进行汇总，并吸收部分国际竞赛的典型试题，汇编成这套丛书。书中通过对试卷的全面分析和研究，对每道赛题都逐一进行了详细的解析，力求通俗易懂，化难为易，既便于学生自学，也便于家长和教师参考。本套丛书力求体现以下特点：

1. **导向性。**全面反映了近几年中、小学数理化竞赛的题型，及所考查的知识点和解题方法，从而可以看出未来竞赛命题的走向和原则。

2. **新颖性。**所选内容均是经过我们筛选的近几年的国际国

内竞赛试题,不仅内容新,题型新,而且具有广泛的代表性。用后一定会感到内容新鲜,题目新颖,精彩有趣。

3. 精巧性。因为许多试题虽有一定难度,但难而不怪;灵活性强,高而可攀。当然,解答时具备较强的分析推理能力和灵活运用知识的能力。我们在解析时,注意做到语句通俗、简明,思路清晰、简捷。有的还配有图表说明,便于学生理解。对于一题多解,限于篇幅,一般采用一两种最简便巧妙的方法。这对拓展学生思路,启迪思维,发展智力,将有很大帮助。

4. 实用性。本丛书中前半部分是试题,并留有解答的空间,后半部分是解析。可供学生在赛前进行检测,检测后再对照答案掌握和理解解题方法。这样既便于学生用,也便于家长和教师参考。

5. 权威性。本丛书是由在国际奥赛中屡夺金牌的黄冈的特、高级教师和国家级奥林匹克优秀教练员编写。

参加本书编写的有:陈锐、余运建、卫桂芳、吴虹、张又元、彭钢、胡建新、黄敬伟、王前礼、库乐畅、李定章、李宏量、陈绪明、高烈、方炜、谢晓林、李东洲、王成辉、段江涛、肖春鹏、沈若书。

由于时间仓促和水平有限,编写中难免出现错误或不当之处,敬请广大读者提出宝贵意见。希望本套丛书铺就您的金牌之路。

编 者

2006 年 12 月

目录



试题 答案

2000 年第十七届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(1)	(130)
2000 年第十七届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(5)	(138)
2000 年第十七届全国中学生		
物理竞赛决赛试题	(8)	(150)
2001 年第十八届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(13)	(167)
2001 年第十八届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(16)	(175)
2001 年第十八届全国中学生		
物理竞赛决赛试题	(19)	(186)
2002 年第十九届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(24)	(202)
2002 年第十九届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(27)	(215)
2003 年第二十届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(30)	(224)
2003 年第二十届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(33)	(231)
2004 年第二十一届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(36)	(242)
2004 年第二十一届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(38)	(251)

目录

	试题	答案
2005 年第二十二届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(42)	(264)
2005 年第二十二届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(45)	(271)
2006 年第二十三届全国中学生		
物理竞赛预赛试题	(47)	(285)
2006 年第二十三届全国中学生		
物理竞赛复赛试题	(51)	(296)
		
第 25 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(56)	(312)
第 26 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(64)	(328)
第 27 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(70)	(342)
第 28 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(78)	(351)
第 29 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(84)	(360)
第 30 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(95)	(372)
第 31 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(103)	(382)
第 32 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(114)	(390)
第 33 届国际物理奥林匹克竞赛试题	(122)	(399)



2000 年第十七届全国中学生
物理竞赛预赛试题

一、(共 10 分)

1. (5 分) 1978 年在湖北省随县发掘了一座战国早期(距今大约 2400 多年前)曾国国君的墓葬——曾侯乙墓,出土的众多墓葬品中被称为中国古代文明辉煌的象征的是一组青铜铸造的编钟乐器(共 64 件),敲击每个编钟时,能发出音域宽广、频率准确的不同音调.与铸造的普通圆钟不同,圆钟的横截面呈圆形,每个编钟的横截面均呈杏仁状.图 1 为圆钟的截面,图 2 为编钟的截面,分别敲击两个钟的 A, B, C 和 D, E, F 三个部位,则圆钟可发出_____个基频的音调,编钟可发出_____个基频的音调.

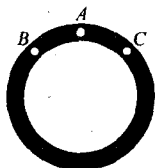


图 1

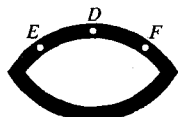


图 2

2. (5 分) 我国在 1999 年 11 月 20 日用新型运载火箭成功地发射了一艘实验航天飞行器,它被命名为_____号,它的目的是为_____做准备.

二、(15 分) 一半径为 $R=1.00\text{ m}$ 的水平光滑圆桌面,圆心为 O ,有一竖直的立柱固定在桌面上的圆心附近,立柱与桌面的交线是一条凸的平滑的封闭曲线 C ,如图 3 所示,一根不可伸长的柔软的细轻绳,一端固定在封闭曲线上的某一点,另一端系一质量为 $m=7.5\times 10^{-2}\text{ kg}$ 的小物块.将小物块放在桌面上并把绳拉直,再给小物块一个方向与绳垂直、大小为 $v_0=4.0\text{ m/s}$ 的初速度,物块在桌面上运动时,绳将缠绕在立柱上.已知当绳的张力为 $T_0=2.0\text{ N}$ 时,绳即断开,在绳断开前物块始终

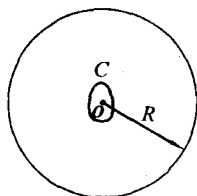


图 3

在桌面上运动.

1. 问绳刚要断开时,绳的伸直部分的长度为多少?

2. 若绳刚要断开时,桌面圆心 O 到绳的伸直部分与封闭曲线的接触点的连线正好与绳的伸直部分垂直,问物块的落地点到桌面圆心 O 的水平距离为多少? 已知桌面高度 $H=0.80\text{ m}$. 物块在桌面上运动时未与立柱相碰,取重力加速度大小为 10 m/s^2 .

三、(15 分) 有一水平旋转的平行平面玻璃板 H , 厚 3.0 cm , 折射率为 $n=1.5$. 在其下表面下 2.0 cm 处有一小物 S ; 在玻璃板上方有一薄凸透镜 L , 其焦距 $f=30\text{ cm}$, 透镜的主轴与玻璃板面垂直; S 位于透镜的主轴上, 如图 4 所示. 若透镜上方的观察者顺着主轴方向观察到 S 的像就在 S 处, 问透镜与玻璃板上表面的距离为多少.

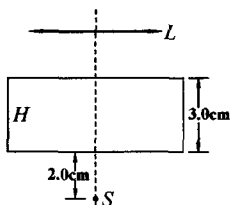


图 4

四、(20 分) 某些非电磁量的测量是可以通过一些相应的装置转化为电磁量来测量的. 一平板电容器的两个极板竖直放置在光滑的水平平台上, 极板的面积为 S , 极板间的距离为 d , 极板 1 固定不动, 与周围绝缘; 极板 2 接地, 且可在水平平台上滑动并始终与极板 1 保持平行. 极板 2 的两个侧边与劲度系数为 k 、自然长度为 L 的两个完全相同的弹簧相连, 两弹簧的另一端固定. 图 5 是这一装置的俯视图. 先将电容器充电至电压 U 后即与电源断开, 再在极板 2 的右侧的整个表面上施以均匀的向左的待测压强 p , 使两极板之间的距离发生微小的变化, 如图 6 所示. 测

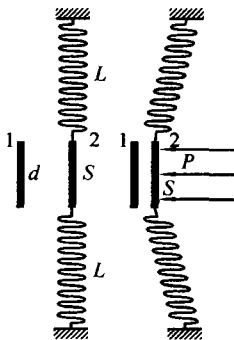


图 5

图 6

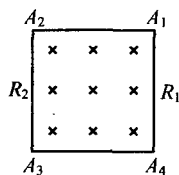


图 7

得此时电容器的电压改变量为 ΔU . 设作用在电容器极板 2 上的静电作用力不致引起弹簧的可测量到的形变, 试求待测压强 p .

五、(20 分) 如图 7 所示, 在正方形导线回路所围的区域 $A_1A_2A_3A_4$ 内分布有方向垂直于回路平面向里的匀强磁场, 磁感应强度 B 随时间以恒定的变化率增大, 回路中的感应电流于 $I=1.0\text{ mA}$. 已知 A_1A_2, A_3A_4 两边的电阻皆为零; A_4A_1 边的电阻 $R_1=3.0\text{ k}\Omega$, A_2A_3 边的电阻 $R_2=7.0\text{ k}\Omega$.

1. 试求 A_1A_2 两点间的电压 U_{12} , A_2A_3 两点间的电压 U_{23} , A_3A_4 两点间的电压 U_{34} , A_4A_1 两点间的电压 U_{41} .

2. 若一内阻可视为无限大的电压表位于正方形导线回路所在的平面内, 其正负端与连线位置分别如图 8、图 9 和图 10 所示, 求三种情况下电压表的读数 V_1, V_2, V_3 .

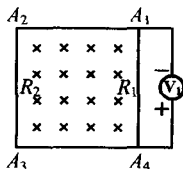


图 8

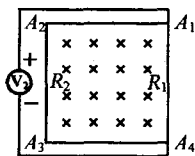


图 9

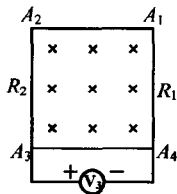


图 10

六、(20 分) 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 的容积大很多的绝热容器 B 相连, 开始时阀门关闭, 两容器中盛有同种理想气体, 温度均为 30°C , B 中气体的压强为 A 中的 2 倍. 现将阀门缓慢打开, 直至压强相等时关闭. 问此时容器 A 中气体的温度为多少. 假设在打开到关闭阀门的过程中处在 A 中的气体与处在 B 中的气体之间无热交换. 已知每摩尔该气体的内能为 $U=\frac{5}{2}RT$, 式中 R 为普适气体恒量, T 是热力学温度.

七、(20 分) 当质量为 m 的质点距一个质量为 M 、半径为 R 的质量均匀分布的致密天体中心的距离为 $r(r \geq R)$ 时, 其引力势能为 $E_p = -GMm/r$, 其中 $G=6.67 \times 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 为万有引力常量. 设致密天体是中子星, 其半径 $R=10\text{ km}$, 质量 $M=1.5M_\odot$ ($1M_\odot=2.0 \times 10^{30}\text{ kg}$ 为太阳的质量).

1. 1 kg 的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能为多少?

2. 在氢核聚变反应中,若参加核反应的原料的质量为 m ,则反应中的质量亏损为 $0.0072m$,问 1 kg 的原料通过核聚变提供的能量与第 1 问中所释放的引力势能之比是多少.

3. 天文学家认为:脉冲星是旋转的中子星,中子星的电磁辐射是连续的,沿其磁轴方向最强,磁轴与中子星的自转轴方向有一夹角(如图 11 所示),在地球上的接收器所接收到的一连串周期出现的脉冲是脉冲星的电磁辐射.试由上述看法估算地球上接收到的两个脉冲之间的时间间隔的下限.

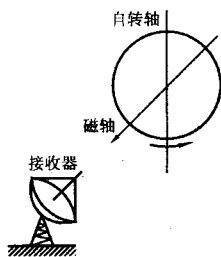


图 11

八、(20 分) 如图 12 所示,在水平桌面上放有长木板 C , C 上右端是固定挡板 P , 在 C 上左端和中点各放有小物块 A 和 B , A, B 的尺寸以及 P 的厚度皆可忽略不计, A, B 之间和 B, P 之间的距离皆为 L . 设木板 C 与桌面之间无摩擦, A, C 之间和 B, C 之间的静摩擦因数及动摩擦因数均为 μ ; A, B, C (连同挡板 P) 的质量相同. 开始时, B 和 C 静止, A 以某一初速度向右运动, 试问下列情况是否能发生. 要求定量求出能发生这些情况时物块 A 的初速度 v_0 应满足的条件, 或定量说明不能发生的理由.

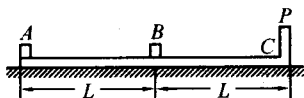


图 12

(1) 物块 A 与 B 发生碰撞;

(2) 物块 A 与 B 发生碰撞(设为弹性碰撞)后,物块 B 与挡板 P 发生碰撞;

(3) 物块 B 与挡板 P 发生碰撞(设为弹性碰撞)后,物块 B 与 A 在木板 C 上再发生碰撞;

(4) 物块 A 从木板 C 上掉下来;

(5) 物块 B 从木板 C 上掉下来.



2000 年第十七届全国中学生 物理竞赛复赛试题

一、(20 分) 在一大水银槽中竖直插入一根玻璃管, 管上端封闭, 下端开口. 已知槽中水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l=76\text{ cm}$, 管内封闭有 $n=1.0\times 10^{-3}\text{ mol}$ 的空气, 保持水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢地降低 10°C , 问在此过程中管内空气放出的热量为多少. 已知管外大气的压强为 76 cm 水银柱高, 每摩尔空气的内能 $U=C_V T$, 其中 T 为热力学温度, 常量 $C_V=20.5\text{ J}\cdot(\text{mol}\cdot\text{K})^{-1}$, 摩尔气体常量 $R=8.31\text{ J}\cdot(\text{mol}\cdot\text{K})^{-1}$.

二、(20 分) 如图 1 所示, 在真空中有一个折射率为 $n(n>n_0, n_0$ 为真空的折射率)、半径为 r 的质地均匀的小球. 频率为 ν 的细激光束在真空中沿直线 BC 传播, 直线 BC 与小球球心 O 的距离为 $l(l<r)$, 光束于小球体表面的 C 点经折射进入小球

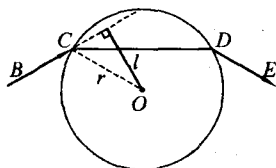


图 1

(小球成为光传播的媒质), 并于小球表面的 D 点又经折射进入真空. 设激光束的频率在上述两次折射后保持不变. 求在两次折射过程中激光束中一个光子对小球作用的平均力的大小.

三、(25 分) 1995 年, 美国费米国家实验室 CDF 实验组和 DO 实验组在质子反质子对撞机 TEVATRON 的实验中, 观察到了顶夸克, 测得它的静止质量 $m_t=1.75\times 10^{11}\text{ eV}/c^2=3.1\times 10^{-25}\text{ kg}$, 寿命 $\tau=0.4\times 10^{-24}\text{ s}$, 这是近十几年来粒子物理研究最重要的实验进展之一.

1. 正反顶夸克之间的强相互作用势能可写为 $V(r)=-k\frac{4a_s}{3r}$, 式中 r 是正反顶夸克之间的距离, $a_s=0.12$ 是强相互作用耦合常数, k 是与单位制有关的常量, 在国际单位制中 $k=0.319\times 10^{-25}\text{ J}\cdot\text{m}$. 为估算正反顶夸克能否构成一个处在束缚状态的系统, 可把束缚状态设想为正反顶夸克在彼此间的吸引力作用下绕它们连线的中点做匀速圆周运动. 如能构成束缚态, 试用玻尔理论确定系统处于基态中正反顶夸克之

间的距离 r_0 。已知处于束缚态的正反夸克粒子满足量子化条件

$$2mv\left(\frac{r_0}{2}\right) = n\frac{h}{2\pi} \quad n=1, 2, 3\cdots$$

式中 $mv\left(\frac{r_0}{2}\right)$ 为一个粒子的动量 mv 与其轨道半径 $\frac{r_0}{2}$ 的乘积, n 为量子数, $h=6.63\times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ 为普朗克常量。

2. 试求正反顶夸克在上述设想的基态中做匀速圆周运动的周期 T , 你认为正反顶夸克的这种束缚态能存在吗?

四、(25 分) 宇宙飞行器和行星都绕太阳在同一平面内做圆周运动, 飞行器的质量比行星的质量小很多, 飞行器的速率为 v_0 , 行星的轨道半径为飞行器轨道半径的 6 倍。有人企图借助飞行器与行星的碰撞使飞行器飞出太阳系, 于是他便设计了如下方案: I. 当飞行器在其圆周轨道的适当位置时, 突然点燃飞行器上的喷气发动机, 经过极短时间后立即关闭发动机, 以使飞行器获得所需的速度, 沿圆周轨道的切线方向离开圆轨道; II. 飞行器到达行星的轨道时正好位于行星的前缘, 速度的方向和行星在该处速度的方向相同, 正好可被行星碰撞; III. 行星与飞行器的碰撞是弹性正碰。不计燃烧的燃料质量。

1. 试通过计算证明按上述方案能使飞行器飞出太阳系。

2. 设在上述方案中, 飞行器从发动机取得的能量为 E_1 。如果不采取上述方案而是令飞行器在圆轨道上突然点燃喷气发动机, 经过极短时间后立即关闭发动机, 以使飞行器获得足够的速度沿圆轨道切线方向离开圆轨道后能直接飞出太阳系。采用这种办法时, 飞行器从发动机取得的能量的最小值用 E_2 表示。问 $\frac{E_1}{E_2}$ 为多少。

五、(25 分) 在真空中建立一坐标系, 以水平向右为 x 轴正方向, 竖直向下为 y 轴正方向, z 轴垂直纸面向里(图 2)。在 $0\leq y\leq L$ 的区域内有匀强磁场, $L=0.80\text{m}$, 磁场的磁感应强度的方向沿 z 轴的正方向, 其大小 $B=0.10\text{T}$, 今把一荷质比 $q/m=50\text{C}\cdot\text{kg}^{-1}$ 的带正电质点在 $x=0, y=-0.20\text{m}, z=0$ 处静止释放, 将带电质点过原点的时刻定为 $t=0$ 时刻, 求带电质点在磁场中任一时刻 t 的位置坐标。并求它刚离开磁场时的位置和速度。取重力加速度 $g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 。

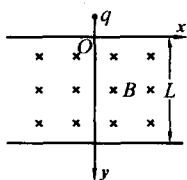


图 2

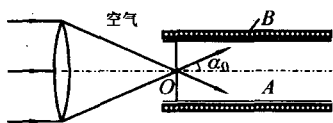


图 3

六、(25 分) 普通光纤是一种可传输光的圆柱形细丝, 由具有圆形截面的纤芯 A 和包层 B 组成, B 的折射率小于 A 的折射率, 光纤的端面与圆柱体的轴垂直, 由一端面射入的光在很长的光纤中传播时, 在纤芯 A 和包层 B 的分界面上发生多次全反射, 现在利用普通光纤测量流体 F 的折射率. 实验方法如下: 让光纤的一端(出射端)浸在流体 F 中. 令与光纤轴平行的单色平行光束经凸透镜折射后会聚在光纤入射端面的中心 O, 经端面折射进入光纤, 在光纤中传播. 由 O 点出发的光束为

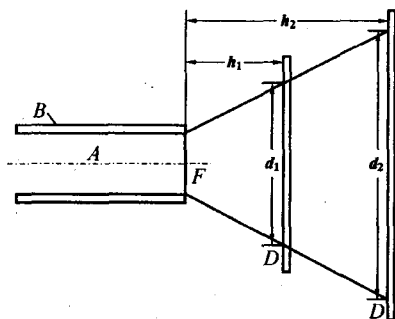


图 4

圆锥形, 已知其边缘光线和轴的夹角为 α_0 , 如图 3 所示. 最后光从另一端面出射进入流体 F. 在距出射端面 h_1 处放置一垂直于光纤轴的毛玻璃屏 D, 在 D 上出现一圆形光斑, 测出其直径为 d_1 , 然后移动光屏 D 至距光纤出射端面 h_2 处, 如图 4 所示.

1. 若已知 A 和 B 的折射率分别为 n_A 与 n_B , 求被测流体 F 的折射率 n_F 的表达式.

2. 若 n_A , n_B 和 α_0 均为未知量, 如何通过进一步的实验以测出 n_F 的值?



2000 年第十七届全国中学生 物理竞赛决赛试题

理论试题

一、(30 分) 近来一种新型的定点起重设备“平衡吊”被广泛应用于几十到几百千克工件的频繁吊运,其结构的示意图如图 1 所示. 平衡吊主要由传动、杆系、回转座和立柱组成. 杆系是由 ABD 、 DEF 、 BC 、 CE 四杆铰接组成的四连杆机构, $DECB$ 在任何情况下都是一个平行四边形, 杆系的 A 处是一水平的转轴, 通过电机可控制转轴, 使之固定在竖直槽内的不同位置, 从而调节挂在铰接于 F 处吊钩上的重物的高度, 杆 ABD 可绕转轴 A 在竖直平面内无摩擦地转动. 杆系的 C 点是能在光滑的水平槽上滑动的铰链, 杆 BC 和 EC 都可绕 C 点在竖直平面内转动, 绕铰链转动的摩擦均忽略不计, 下面用 l_1 表示 AD 的长度, l_2 表示 AB 的长度, l_3 表示 DF 的长度, l_4 表示 BC 的长度.

(1) 若将各杆都视为轻质(无自重)刚体, 且无图中配重物时, 试论证 l_1, l_2, l_3, l_4 应满足什么关系才能使平衡吊的吊钩(包括所吊的重物)位于不同位置时平衡吊都能处于平衡状态.

(2) 若考虑各杆的自重, 为使平衡吊的吊钩(包括所吊的重物)位于不同位置时平衡吊都能处于平衡状态, 必须在杆 ABD 的另一端 P 处加上配重物, P 点距 A 轴的距离为 l_p . 设配重物受到的重力大小为 G_p , 杆的 AD 段、 DF 段、 BC 段、 CE 段受到的重力的大小分别为 G_1, G_3, G_4 和 G_5 , 不计杆的 AP 段所受的重力, 问当杆长 l_1, l_2, l_3, l_4 和 l_p 已知, 且取 $l_1 = l_3, l_2 = l_4$ 时配重的大小 G_p 为多少?

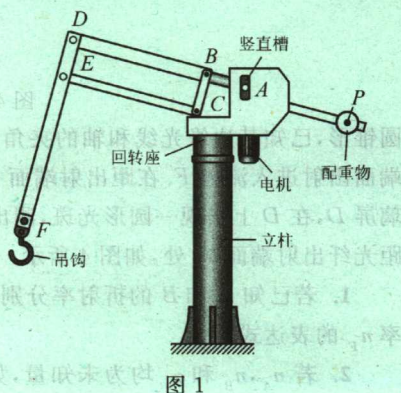


图 1

二、(30 分) 太阳风是从太阳大气外层(称为日冕)不断向星际空

间发射的稳定的、由相同数目的质子和电子构成的带电粒子流,它使太阳每年减少的质量相对于太阳质量 M_s 可忽略不计. 观测表明,太阳风的速度 v 随着与太阳中心的距离 r 的增加而增大. 现提出一简单的模型来解释太阳风的速度变化的机制: 假定日冕中的大量电子可视为理想气体; 日冕中的电子气是等温(温度为 T)的、各向同性的,以球对称的速率 $v(r)$ (太阳风的速率)向外膨胀; 太阳风中质子的定向运动速度比电子的小得多,太阳风的速度其实是电子定向运动的速度,太阳风可解释为日冕中的电子气向外的等温膨胀,记太阳风的速率 v 随着与太阳中心的距离 r 变化的变化率为 $\tau = \Delta v / \Delta r$. 若不考虑质子和电子间的相互碰撞,试求 τ 随 r 变化的关系式 $\tau(r)$.

三、(25 分) 波兰数学家谢尔宾斯基 1916 年研究了一个有趣的几何图形,他将如图 2 所示的一块黑色的等边三角形 ABC 的每一个边长平分为二,再把平分点连起来,此三角形被分成四个相等的等边三角形,然后将中间的等边三角形挖掉,得到如图 3 的图形;接着再将剩下的黑色的三个等边三角形按相同的方法处理,

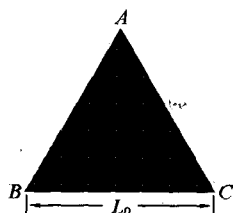


图 2

经过第二次分割就得到图 4 的图形,经三次分割后,又得到图 5 的图形. 这是带有自相似特征的图形,这样的图形又称为谢尔宾斯基镂垫. 它的自相似性就是将其中一个小单元(例如图 5 中 $\triangle BJK$)适当放大后,就得到图 3 的图形. 如果这个分割过程继续下去,直至无穷,谢尔宾斯基镂垫中的黑色部分将被不断地镂空.

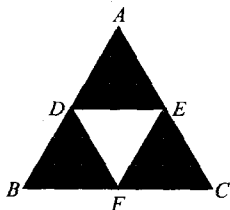


图 3

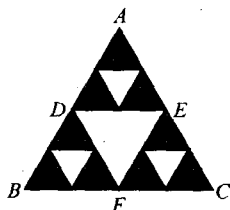


图 4

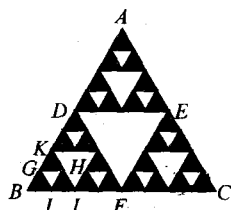


图 5

数学家对这类几何图形的自相似性进行了研究,创造和发展出了一门称为“分形几何学”的新学科. 近 30 多年来,物理学家将分形几何学的研究成果和方法用于有关的物理领域,取得了有意义的进展.

我们现在就在这个背景下研究按谢尔宾斯基镂垫图形的各边构成的电阻网络的等效电阻问题：设按如图 2 所示的三角 ABC 的边长 L_0 的电阻均为 r ；经一次分割得到如图 3 所示的图形，其中每个小三角形边长的电阻是原三角形 ABC 的边长的电阻 r 的 $\frac{1}{2}$ ；经二次分割得到如图 4 所示的图形，其中每个小三角形边长的电阻是原三角形 ABC 的边长的电阻 r 的 $\frac{1}{4}$ ；三次分割得到如图 5 所示的图形，其中每个小三角形边长的电阻是原三角形 ABC 的边长的电阻 r 的 $\frac{1}{8}$ 。

(1) 试求经三次分割后，三角形 ABC 任意两个顶点间的等效电阻。

(2) 试求按此规律作了 n 次分割后，三角形 ABC 任意两个顶点间的等效电阻。

(3) 由第 2 问可知，对边长均为 L_0 、边长电阻均为 r 的电阻三角形 ABC ，现用获得谢尔宾斯基镂垫的方法进行分割，分割的次数越多， $\triangle ABC$ 中每个小三角形的边长越短，参与计算等效电阻的小三角形的边长越多，分割后的 $\triangle ABC$ 两顶点间的等效电阻与其中的小三角形的边长有关。

为了从“分形几何学”的角度讨论这个问题，我们先介绍二端电阻网络的“指数”的概念。考虑一长、

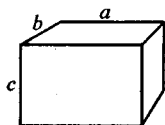


图 6

宽、高分别为 a, b, c 的均匀长方形导体，如图 6 所示。若电流沿平行于导体长度 a 的方向流进导体，则该导体的垂直于电流方向的两个端面间的电阻可表示为

$$R = \rho \frac{a}{bc}$$

式中 ρ 为导体的电阻率。若保持 b, c 不变，使另一边 a 的长度变化，并用 L 表示这一可改变的长度，这样构成的一维导体的电阻与 L 成正比，其电阻可表示为

$$R_{(1)}(L) = \rho \frac{1}{bc} \propto L^1$$

式中 1 被称为一维导体的指数。若保持 c 的长度不变，但使 a 边和 b 边的长度相等且可以改变，并用 L 表示这一可改变的长度，即 $a = b = L$ ，