奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

不等式

【郑日锋 编著】

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

一试系列

1.解析几何　　虞金龙 编著
2.数列与数学归纳法　　蔡小雄 编著
3.集合与函数　　李惟峰 编著
4.三角函数　　张金良 编著
5.立体几何　　吴国建 编著
6.复数与向量　　吕峰波 编著
7.不等式　　郑日锋 编著
8.排列组合与概率统计　　许康华 编著

二试系列

1.平面几何　　过伯祥 编著
2.不等式与最值　　石世昌 编著
3.组合数学　　徐士英 编著
4.初等数论　　冯祖铭 编著
5.解题研究　　单 墫 编著
6.我怎样解题　　单 墫 编著
7.中学数学竞赛导引　　常庚哲 严镇军 编著
8.数学奥林匹克大集　　黄宣国 编著
9.奥林匹克数学方法选讲　　黄国勋 编著
10.解数学竞赛题的常用策略　　王连笑 编著
11.奥林匹克数学教育的理论和实践　　冯跃峰 编著
12.数学奥林匹克试题背景研究　　刘培杰 编著
13.数学奥林匹克概论　　朱华伟 编著
14.国际数学奥林匹克研究　　熊 斌 田廷彦 编著

奥博
教育

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

不等式

【郑日锋 ◉ 编著】

1234567890123456 7
012478+78665
234556-4534574.45678786 7
4534234/434545
2137467854678945678
1237864534 53.1448678
-4536789645 2345(12564564)
21231564861156
654651564864847

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛一试.不等式/郑日锋主编.—杭州:西泠印社出版社,2006.6
(奥博丛书)
ISBN 7-80735-077-6

Ⅰ.高… Ⅱ.郑… Ⅲ.代数课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064125 号

郑日锋：浙江省杭州学军中学数学教研组长、中学高级教师.自1995年以来，每年参加浙江省高中证书会考命题或审题，参与《高中数学奥林匹克竞赛教程》、《浙江省高考复习用书》、《高中会考导引》等书籍的编写，主编《学军高考全案》等书籍3部，撰写的论文《两个函数的图象关于两条互相垂直的直线均对称的充要条件》等60余篇文章在《数学通报》、《数学教学》、《中等数学》等刊物上发表，其中竞赛类文章10余篇.多次应邀到浙江省各地作奥数辅导、高考辅导讲座.辅导学生参加全国高中数学联赛，20余人获全国一等奖，其中3人获浙江赛区第一名，被评为全国高中数学联赛优秀教练员.

奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

本册主编　郑日锋

丛书总策划　徐　莹

丛书审稿　王祖樾　李名德　徐士英　王航平

业务联系　地址：浙江省杭州市学院路 83 号 221 室

电话：0571－85028528　85021510

传真：0571－85028578

丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说："欲速则不达。"不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。"尽信书，则不如无书。"作者也有可能出错。"乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的。"其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味(taste)，也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 墫

2006 年 3 月 16 日

目 录

第1章 基础篇

第2章 综合篇

第1章 基础篇

1.1 不等式的性质

知识概要

1. 实数运算性质与实数大小的关系

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式的性质

(1) 对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$；

(2) 传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

(3) 可加性：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$；

(4) 可乘性：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；

(5) 加法法则：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

(6) 乘法法则：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

(7) 乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$；

(8) 开方法则：$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$.

典例剖析

例1 (2004年安徽省高中数学竞赛预赛试题)设 $a<b<0$，则下列不等关系中，不成立的是 ( )

A. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B. $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

分析 要说明一个命题是假命题，只需举一个反例.

解 取 $a=-2, a=-1, a<b<0$ 成立，而 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 不成立. 故选 B.

评注 解决本题也可以用如下的方法：利用不等式的性质，找出哪三个选项中不等式成立.

例 2 $\begin{cases}1<x+y<3,\\ 0<xy<2\end{cases}$ 是 $\begin{cases}0<x<1,\\ 1<y<2\end{cases}$ 的____________条件.

解 由 $\begin{cases}0<x<1, & (1)\\ 1<y<2, & (2)\end{cases}$

(1) + (2) 得 $1<x+y<3$，(1) × (2) 得 $0<xy<2$，

因此 $\begin{cases}0<x<1,\\ 1<y<2,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1<x+y<3,\\ 0<xy<2.\end{cases}$

而由 $\begin{cases}1<x+y<3,\\ 0<xy<2\end{cases}$ 推不出 $\begin{cases}0<x<1,\\ 1<y<2.\end{cases}$ 很容易举出反例，

如 $x=2, y=\frac{1}{2}$.

综上，应填必要而不充分.

例 3 已知二次函数 $f(x)$ 的图象过原点，且 $1\leqslant f(-2)\leqslant 2, 3\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(2)$ 的范围.

解 由已知设 $f(x)=ax^2+bx$，由 $1\leqslant f(-2)\leqslant 2, 3\leqslant f(1)\leqslant 4$，

得
$$\begin{cases}1\leqslant 4a-2b\leqslant 2,\\ 3\leqslant a+b\leqslant 4.\end{cases}$$

设 $f(2)=4a+2b=m(4a-2b)+n(a+b)$，

则
$$\begin{cases}4m+n=4,\\ -2m+n=2.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}m=\frac{1}{3},\\ n=\frac{8}{3}.\end{cases}$$

从而 $$f(2)=\frac{1}{3}(4a-2b)+\frac{8}{3}(a+b).$$

因为 $$1\leqslant 4a-2b\leqslant 2, 3\leqslant a+b\leqslant 4,$$

所以 $$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{3}(4a-2b)\leqslant\frac{2}{3}, 8\leqslant\frac{8}{3}(a+b)\leqslant\frac{32}{3}.$$

故$\frac{25}{3} \leqslant f(2) \leqslant \frac{34}{3}$.

评注 若直接由$\begin{cases}1 \leqslant 4a-2b \leqslant 2, \\ 3 \leqslant a+b \leqslant 4\end{cases}$得$\frac{7}{6} \leqslant a \leqslant \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \leqslant b \leqslant \frac{17}{6}$.

因此$\frac{22}{3} \leqslant f(2) \leqslant \frac{37}{3}$. 由于$a=\frac{7}{6}, b=\frac{4}{3}$,不能同时成立,所以所得的范围$\frac{22}{3} \leqslant f(2) \leqslant \frac{37}{3}$是不正确的.

例 4 比较x^2+y^2与$xy+x+y-1$的大小.

解 **思路 1** 用作差比较法

$\because x^2+y^2-(xy+x+y-1)$

$=x^2-(y+1) \cdot x+y^2-y+1$

$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(y+1)^2+y^2-y+1$

$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2 \geqslant 0$

$\therefore x^2+y^2 \geqslant xy+x+y+1$

思路 2 $\because x^2+y^2-(xy+x+y-1)$

$=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)-x-y+1$

$=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2 \geqslant 0$

$\therefore x^2+y^2 \geqslant xy+x+y+1$

思路 3 因关于x的二次三项式

$x^2-(y+1) \cdot x+y^2-y+1$的判别式

$$\Delta=-3(y-1)^2 \leqslant 0,$$

$\therefore x^2+y^2 \geqslant xy+x+y+1$.

例 5 已知$a,b,c,d>0, A=a+d, B=b+c$,且$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,a是a,b,c,d中最大的一个,试比较A与B的大小.

解 由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$得$d=\frac{bc}{a}$,

$$A-B=a+\frac{bc}{a}-(b+c)$$

$$=(a-b)+\frac{c}{a}(b-a)$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{a}.$$

$\because$ a 是 a,b,c,d 中最大的一个，

$\therefore$ $a>b$, $a>c$,

$\therefore$ $a-b>0$, $a-c>0$,又 $a>0$,

$\therefore$ $A-B>0$,即 $A>B$.

评注 用作差比较法比较两个实数的大小的一般步骤是 (1) 作差；(2) 变形(常用手段有因式分解,通分,配方等)；(3) 判断差的符号.

例 6 设 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,$m=a^ab^b$,$n=a^bb^a$,试比较 m,n 的大小.

解 由 $a>0,b>0$,得 $m>0$,且 $n>0$.

因为 $$\frac{m}{n}=\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

当 $a>b>0$ 时,

$$\frac{a}{b}>1,a-b>0,$$

则有 $$\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$

所以 $$m>n;$$

当 $b>a>0$ 时,

$$0<\frac{a}{b}<1,a-b<0,$$

则有 $$\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$

所以 $$m>n.$$

综上得 $m>n$.

拓展 设 $a,b,c>0$,且不全相等,试比较 $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}$,$a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}$ 的大小.

评注 作商比较法也是比较两个实数大小的常用方法. 用来比较同号的两个实数的大小,一般步骤是 (1) 作商；(2) 变形；(3) 判断商与 1 的大小.

但$\frac{a}{b}>1$不一定得出$a>b$，要视b的正负而定.

例7 已知$xy\neq 0$，求证：$\sqrt[3]{x^3+y^3}<\sqrt{x^2+y^2}$.

分析 只需证：$(\sqrt[3]{x^3+y^3})^6<(\sqrt{x^2+y^2})^6$.

证明

$$\begin{aligned}&(\sqrt[3]{x^3+y^3})^6-(\sqrt{x^2+y^2})^6\\=&(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3\\=&2x^3y^3-(3x^4y^2+3x^2y^4)\\=&-x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)\\=&-x^2y^2[(x-y)^2+2x^2+2y^2].\end{aligned}$$

$\because$ $xy\neq 0$，

$\therefore$ $-x^2y^2[(x-y)^2+2x^2+2y^2]<0$，

$\therefore$ $\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^6<(\sqrt{x^2+y^2})^6$.

$\therefore$ $\sqrt[3]{x^3+y^3}\leqslant|\sqrt[3]{x^3+y^3}|<\sqrt{x^2+y^2}$.

$\therefore$ $\sqrt[3]{x^3+y^3}<\sqrt{x^2+y^2}$.

例8 设$a,b,c,d>0$，求证：下列三个不等式①$a+b<c+d$；②$(a+b)(c+d)<ab+cd$；③$(a+b)cd<ab(c+d)$至少有一个不正确.

分析 证明三个不等式中至少有一个不正确，从正面证明，因为情况较多，三个不等式均不正确，三个不等式中恰有两个不正确，三个不等式中恰有一个不正确.所以较难.故考虑用反证法证明.

证明 假设①，②，③都正确.由①·②，得$(a+b)^2<ab+cd$. ④

由③得 $(a+b)cd<ab(c+d)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(c+d)$.

$\because$ $a+b>0$，

$\therefore$ $4cd<(a+b)(c+d)$.

结合②得 $$4cd<ab+cd,$$

即 $$cd<\frac{1}{3}ab.$$

再由④得 $$(a+b)^2<\frac{4}{3}ab,$$

即 $$a^2+b^2<-\frac{2}{3}ab.$$ ⑤

而⑤的左边是正数，右边是负数，矛盾．因此①，②，③中至少有一个不正确．

例 9 （第 9 届希望杯高二试题）使不等式$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{a}$成立的正整数 a 的最大值是 （ ）

A. 13 B. 12 C. 11 D. 10

解 将不等式两边平方，整理得 $10+4\sqrt{6}>a+2\sqrt{a}$．

以 $a=13$ 代入验算：$19<10+4\sqrt{6}<20$，$20<13+2\sqrt{13}<21$．不适合．

以 $a=12$ 代入验算：$18<12+4\sqrt{3}<19$．适合．故选 B．

例 10 （1997 年全国高中数学联赛试题）设

$a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$，记 a,b,c 中的最大数为 M，则 M 的最小值为________．

解 由已知条件，

得 $a=\lg(xy^{-1}+z)$，$b=\lg(yz+x^{-1})$，$c=\lg[(xz)^{-1}+y]$．

设 $xy^{-1}+z$，$yz+x^{-1}$，$(xz)^{-1}+y$ 中的最大数为 u，则 $M=\lg u$．

由已知条件，知 x,y,z 均为正数，于是

$$\begin{aligned}u^2&\geqslant(xy^{-1}+z)[(xz)^{-1}+y]\\&=[(yz)^{-1}+yz]+(x+x^{-1})\\&\geqslant 2+2=4.\end{aligned}$$

所以 $u\geqslant 2$，且当 $x=y=z=1$ 时，$u=2$．故 u 的最小值为 2，从而 M 的最小值为 $\lg 2$．

评注 本题利用对数函数的单调性，真数中的最大数 u 的对数就是 M．

方法提炼

直接运用不等式的性质可以解决一些简单的选择、填空题．运用时要注意前提条件，如运用同向不等式的乘法法则：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$ 时要注意前提条件：两边都是正数（可以放宽到两边都是非负数）．

比较两个实数的大小通常有两种常用方法：作差比较法与作商比较法，一般来说，当差式易分解、配方时，用作差比较法；当两实数同号，且商式易约分化简时，可用作商比较法．

利用不等式的性质证明不等式，要充分利用已知条件，观察所证不等式的结构特点．

基础训练

1 设 $1<x<3,5<y<7$，则 $\dfrac{x}{y}$ 的取值范围是 ( )

A. $\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{3}{5}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{7}\right)$　　C. $\left(-\dfrac{1}{7},\dfrac{3}{5}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{7}\right)$

2 已知 $a>b>c>0,x=\sqrt{a^2+(b+c)^2},y=\sqrt{b^2+(c+a)^2}$，$z=\sqrt{c^2+(a+b)^2}$，则 xy,yz,zx,x^2,y^2,z^2 中最小的是 ( )

A. xy　　B. yz　　C. x^2　　D. z^2

3 设 $0<a<\dfrac{1}{2}$，则下列不等式成立的是 ( )

A. $\dfrac{1}{1+a}<1-a^2<1+a^2<\dfrac{1}{1-a}$

B. $1-a^2<\dfrac{1}{1+a}<1+a^2<\dfrac{1}{1-a}$

C. $\dfrac{1}{1+a}<1-a^2<\dfrac{1}{1-a}<1+a^2$

D. $1-a^2<\dfrac{1}{1+a}<\dfrac{1}{1-a}<1+a^2$

4 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$M=\log_{\cos C}\dfrac{1}{\cos^3 B}$ 与 $N=\log_{\cos C}\dfrac{1}{\sin^3 A}$ 的大小关系是 ( )

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

5 已知 $a>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 且 $a\neq 1,x=|\log_a 2|,y=\log_{(a+1)}2,z=\log_{(a+2)}2$，则 x,y,z 的大小顺序是______________.

6 已知 a,b 为不相等的正数，且 $a<\sqrt{3},b=\dfrac{a+3}{a+1}$，将 $\sqrt{3},a,b,\dfrac{a+b}{2}$ 这四个数从小到大的顺序排列应是________________.

7 已知 $0<x<1,a>0$，且 $a\neq 1$，求证：$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-kx(k\geqslant 1)$，$a>b$，比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小.

能力提升

1 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则“$a>0,b>0,c>0$”是“$a+b+c>0,ab+bc+ca>0,abc>0$”成立的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2 当 a,b 是两个不相等的正数时，三个代数式甲：$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$；乙：$\left(\sqrt{ab}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$；丙：$\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2}{a+b}\right)^2$ 中，值最大的一个是（　　）

A. 必定是甲　　B. 必定是乙

C. 必定是丙　　D. 一般并不确定，而与 a,b 的取值有关

3 设 $A=a\sin^2x+b\cos^2x$，$B=a\cos^2x+b\sin^2x(a,b,x\in\mathbf{R})$，则 $m=AB$，$n=ab$，$p=A^2+B^2$，$q=a^2+b^2$ 满足（　　）

A. $m\geqslant n,p\geqslant q$　　B. $m\leqslant n,p\leqslant q$

C. $m+p\geqslant n+q$　　D. $m+q\geqslant n+p$

4 若 $a^{1995}<a^{1994}<a^{1996}$，则一定有（　　）

A. $a>1$　　B. $a<-1$　　C. $-1<a<0$　　D. $0<a<1$

5 若 $0<b<a<\dfrac{1}{4}$，则 $a-b$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$\sqrt{a-b}$，$\sqrt{a^2-b^2}$ 中最大的是________.

6 $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 满足 $b+c\leqslant 2a$，$a+c\leqslant 2b$，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是________.

7 证明：对任意正数 x,y,z，都有 $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}}\geqslant\sqrt[32]{xyz}$.

8 设对于 $k=1,2,\cdots,n$，存在实数 x 满足如下不等式：$2^k < x^k + x^{k+1} < 2^{k+1}$，试求 n 的最大值.

1.2 均值不等式

知识概要

1. 对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）

2. 平均值不等式

若 $a_i>0, i=1,2,\cdots,n$，记

$$H_n=\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}},$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

分别称为这 n 个数的调和平均、几何平均、算术平均和平方平均，

则
$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n.$$

注 平均值不等式还有带参数的形式，如：

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,$$

其中 $a_i>0,\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n),\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=1$.

3. 幂平均不等式

若
$$a_i>0,i=1,2,\cdots,n,s<r,$$

则
$$\left(\frac{a_1^s+a_2^s+\cdots+a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

4. 加权幂平均不等式