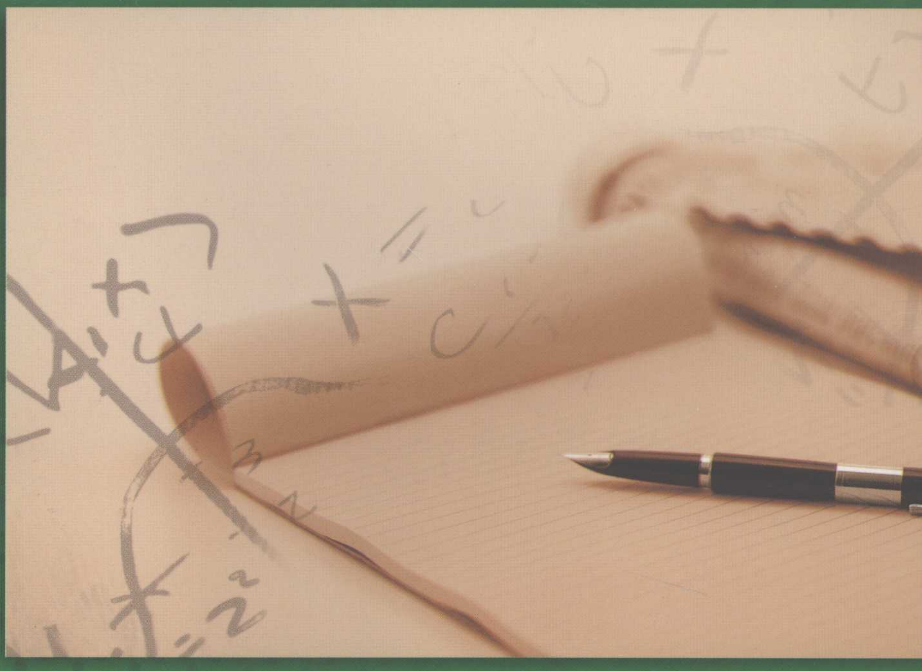
高等教育工科数学系列教材

概率论与数理统计



魏贵民

周仲礼

许必才

编著

GAILULUN YU SHULITONGJI

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计

魏贵民　周仲礼　许必才　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

《概率论与数理统计》是高等教育工科数学系列教材之一，本教材使学生在学好概率论与数理统计经典内容的同时能够领会现代数学的思想方法. 教材内容有一定深度却又简明易懂，颇具改革新意.

本书按照概率与统计并重的思路编写，内容包括：概率论（随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理）和数理统计（抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析）.

本书可作为普通高等教育理工科"概率论与数理统计"课程的教材，也可供工程技术人员和报考研究生的读者自学和参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 魏贵民等编著. – 北京：高等教育出版社，2007.4
(高等教育工科数学系列教材)
ISBN 978-7-04-014828-2

Ⅰ.概…　Ⅱ.魏…　Ⅲ.①概率论 – 高等学校 – 教材②数理统计 – 高等学校 – 教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 047747 号

责任编辑	徐　东	封面设计	吴　昊	责任印制	潘文瑞

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021–56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800–810–0598
总　　机	010–58581000	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021–56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排　　版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	上海三印时报印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com

开　　本	787 × 960　　1/16	版　　次	2007 年 4 月第 1 版
印　　张	15.5	印　　次	2007 年 4 月第 1 次
字　　数	320 000	定　　价	18.50 元

物料号　14828–00

前　言

《概率论与数理统计》是高等教育工科数学系列教材之一，主要介绍概率论与数理统计的基础知识. 本册内容分为两个部分，第一部分为概率论的基本理论与方法，第二部分为数理统计的基本原理方法及其应用，主要内容包括概率论基本概念、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析，共十章. 每节配有习题，书末附有习题参考解答. 本书的主要特色有以下几个方面：

一、内容合理，体系结构清晰

本书在编写过程中吸收了国内外众多优秀教材的长处，结合了编者多年来参与工科数学教学改革与教学实践的经验，在保证教学内容的完整性与科学性的基础上，对传统的概率论与数理统计的教学内容与体系结构作了一定的合理调整，注重教材的系统性与逻辑性，深入浅出，循序渐进，力求概念的准确性与简明性，更加有利于工科学生的教学与学习.

二、注重实际应用，尊重易教易学的原则

工科及理科非数学专业学生学习本课程的目的主要在于实际应用. 针对这一特点，我们着重讲清基本概念、原理与方法，尽量避免了繁琐的理论推导与论证. 如估计理论、假设检验、回归分析与方差分析等，本书通过精炼的符号描述，将思想方法介绍给读者，更多的是通过对很多实际问题的处理，归纳总结出这些方法的原理与步骤. 各章节内容的安排符合教学规律，注意消化教学难点，加强教学重点，增加了很多实际应用事例，将科学性、趣味性和实用性紧密结合起来.

三、定位准确，选题恰当

本书中的例子与习题涉及很多领域的实际问题，巧妙地将本课程的繁琐计算与实际问题结合起来，重视思想方法，淡化计算技巧，激发学生的学习动力，力求提高学生的综合素质. 针对理工科学生的学习特点，书中涉及的一些理论性较强的推证过程，我们以阅读材料的形式提供给不同层次的读者参考.

本系列教材由成都理工大学魏贵民教授任主编，胡灿、魏友华任副主编.《概率论与数理统计》由魏贵民、周仲礼、许必才执笔编写，郭科教授主审，胡灿副教授、范安东副教授也参加了审稿工作，他们为本书提出了重要的修改意见.

由于编者水平有限，书中肯定有很多不足与疏漏之处，错误在所难免，我们希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来.

编　者

2006 年 12 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

教学基本要求

1. 理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算.
2. 理解事件频率的概念，了解概率的统计定义.
3. 理解概率的古典定义，会计算简单的古典概率.
4. 了解概率的基本性质及概率的加法定理.
5. 了解条件概率的概念、概率的乘法定理.
6. 理解事件的独立性概念，掌握伯努利概型和二项概率的计算.

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类现象如水稻的生长从播种到收割要经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段；在标准大气压下，将纯净水加热到 100 ℃时必然沸腾；三角形的三个内角之和必然等于 180 度；同性电荷必不相互吸引，等等. 这类现象在一定条件下必然发生，叫做确定性现象. 另一类现象则不然，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且每次抛掷之前无法肯定其结果；同一台机器用相同的材料生产的产品可能是合格品，也可能是不合格品；射击运动员射击时，每次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置，等等. 这类现象，在完全相同的条件下，进行若干次观察或试验，却未必出现相同的结果，且在观察或试验之前不能预知确切的结果，叫做随机现象.

随机现象在个别试验中其结果呈现出不确定性，但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复观察或试验下，其结果却呈现出某种规律性，这种规律性叫做统计规律性. 例如，多次重复抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上大致有一半，射击运动员正常发挥时弹着点也按照一定规律分布. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

第一节　随机试验与随机事件

一、随机试验

为了对随机现象的统计规律性进行深入研究，往往要对随机现象进行观察或试验，我们把对随机现象的观察或试验叫做随机试验，简称为试验，通常用字

母 E 来表示. 这里,试验含义是广泛的,包括各种的科学试验,对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 随机试验具有如下三个特征:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果有多个,且事前可以预知试验的所有可能结果;

(3) 每次试验只能出现一个可能结果,但试验之前无法确定具体出现哪一个结果.

对于试验 E,每一个可能出现的结果,叫做样本点,习惯上用 e 表示,所有的样本点组成的集合叫做样本空间,用 S 表示.

例 1 试验 E_1:抛掷一枚质地均匀的硬币,观察正、反面出现的情况. 我们用样本点 e_1 表示"正面朝上",e_2 表示"反面朝上",则样本空间 $S_1 = \{e_1, e_2\}$.

例 2 试验 E_2:抛掷两枚质地均匀的硬币,观察正面、反面出现的情况. 样本点 e_1 表示"两枚均是正面朝上",e_2 表示"一枚正面朝上,一枚反面朝上",e_3 表示"两枚均是反面朝上",则样本空间 $S_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

例 3 试验 E_3:抛掷两枚质地均匀的硬币,观察正面出现的次数. 样本点 e_i 表示"正面朝上出现 i 次"($i = 0, 1, 2$),则样本空间 $S_3 = \{e_0, e_1, e_2\}$.

由例 2 和例 3 可以看出,样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 在 E_2 和 E_3 中同是抛掷两枚质地均匀的硬币,由于试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

例 4 试验 E_4:在相同的条件下进行投篮训练,直到第二次投中为止,观察训练中所需的投篮次数. 设 e_i 表示"第二次投中时的投篮次数为 i 次"($i = 2, 3, \cdots$),则样本空间 $S_4 = \{e_2, e_3, \cdots\}$.

例 5 试验 E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,观察它的寿命 t(以小时计).

我们知道灯泡的寿命 $t \geqslant 0$,但在测试之前不能确定它的寿命有多长,则有 $S_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$.

例 6 试验 E_6:观察某城市一天中的最高温度和最低温度,根据历史数据已知该城市的温度下限为 T_0,上限为 T_1.

这里用 x 表示最低温度,y 表示最高温度,(x, y)表示一次观察结果,显然有 $T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1$,则有 $S_6 = \{(x, y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$.

由上述例子可以看出,样本空间中的样本点有下面几种情况:

(1) 样本空间包含有限个样本点;

(2) 样本空间包含无穷可列个样本点;

(3) 样本空间包含无穷不可列个样本点.

二、随机事件

在实际中我们常常关心满足某种特定条件的那些样本点所组成的集合. 如

若规定灯泡的寿命(小时)小于500为不合格产品,则在试验 E_5 中我们通常关心灯泡产品是否合格,对于合格产品有 $t \geqslant 500$. 满足这一条件的样本点组成 S_5 的一个子集: $A = \{t \mid t \geqslant 500\}$. 我们称 A 为试验 E_5 的一个随机事件. 一般地,我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

特别地,由一个样本点组成的单点集 $\{e_i\}$ 叫做基本事件. 例如,试验 E_1 有两个基本事件 $\{e_1\}$ 和 $\{e_2\}$;试验 E_3 有三个基本事件 $\{e_0\}$, $\{e_1\}$, $\{e_2\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,叫做必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也是样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,叫做不可能事件.

下面举几个事件的例子.

例 1 设试验 E 为"抛一枚硬币三次",事件 A_1:"第一次出现的是 H",即 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$. 这里,$H$ 表示"正面",T 表示"反面".

事件 A_2:"三次出现同一面",即 $A_2 = \{HHH, TTT\}$.

例 2 在 E_5 中,事件 A_3:"寿命小于 1 000 小时",即

$$A_3 = \{t \mid 0 \leqslant t < 1\,000\}.$$

例 3 在 E_6 中,事件 A_4:"最高温度与最低温度相差 10 摄氏度",即

$$A_4 = \{(x, y) \mid y - x = 10, \ T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}.$$

三、事件间的关系与运算

一个样本空间 S 中,事件可能有很多,我们可以通过研究这些事件之间的关系和运算,从简单事件的统计规律去探求复杂事件的统计规律. 事件是由样本点组成的一个集合,因而事件间的关系与事件间的运算我们可以按集合论中集合之间的关系和运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 S,而 $A, B, C, A_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是 S 的子集.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生,则事件 B 必然发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含在事件 B 中,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

由事件间的包含关系定义容易得到:

(1) 任一事件都包含自身,即 $A \subseteq A$;

(2) 包含关系具有传递性,即如 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$,便有 $A \subseteq C$;

(3) 任意事件都包含在必然事件 S 中,即 $A \subseteq S$;

(4) 任意事件都包含不可能事件 $\varnothing$,即 $\varnothing \subseteq A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

2. 积事件

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 叫做事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的积事件.

3. 和事件

事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 叫做事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A，B 至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件.

4. 互不相容事件

如果事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的，即 $AB = \varnothing$.

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件是互不相容的，即

$$A_iA_j = \varnothing \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

则称这 n 个事件是两两不相容的或两两互斥的.

显然，基本事件是互不相容的. 同样，不可能事件 $\varnothing$ 与任意事件都是互不相容的.

5. 对立事件

如果两个事件 A，B 满足 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件或对立事件. 这指的是对每次试验而言，事件 A，B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

显然 $\overline{S} = \varnothing$，$\overline{\varnothing} = S$，$\overline{\overline{A}} = A$.

注意：对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件未必是对立事件.

6. 差事件

事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 叫做事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生，B 不发生时事件 $A - B$ 发生. 由此可得，$\overline{A} = S - A$.

由差事件、积事件与对立事件的定义不难看出：

$$A - B = A - AB = A\overline{B}.$$

用图 1-1～1-6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算. 例如，在图 1-1

中长方形表示样本空间 S,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,事件 B 包含事件 A. 又如在图 1-2 中长方形表示样本空间 S,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与

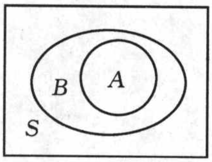


图 1-1　$A \subset B$

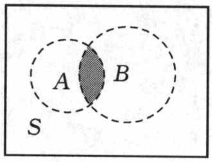


图 1-2　$A \cap B$

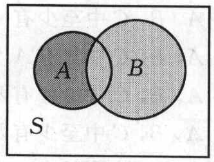


图 1-3　$A \cup B$

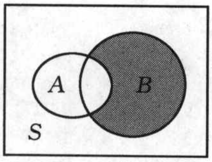


图 1-4　$B - A$

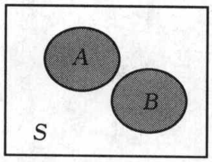


图 1-5　A 与 B 互斥

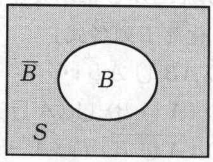


图 1-6　B 与$\overline{B}$

事件 B,而阴影部分表示积事件 AB.

事件间的关系与运算符合集合论中的有关定律. 设 A, B, C 为事件,则有:

交换律:$A \cup B = B \cup A$; $AB = BA$.

结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$$A(BC) = (AB)C.$$

分配律:$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

德・摩根律:$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$;$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

习　题　1-1

1. 判断下列试验是否为随机试验:

(1) 观察在一个标准大气压下水的沸点;

(2) 观察炮弹的落地位置;

(3) 观察肺癌患者从患病到死亡的时间;

(4) 观察一交通道口中午 1 小时内汽车流量.

2. 写出下列试验的样本空间:

(1) 抛掷三颗质地均匀的骰子,观察三颗骰子出现的点数之和的情况;

(2) 对一个目标进行射击,一旦击中便停止射击,观察射击的次数;

(3) 在单位圆内任取一点,记录它的坐标;

(4) 记录一个班一次概率考试的平均分数.

3. 在区间$[0, 5]$内任取一数，设事件 A 表示取到区间$[1,3)$内的数，B 表示取到区间$(\sqrt{2}, 4]$内的数，写出下列事件中的样本点：$A \cup B$, AB, $B-A$, $\overline{B \cup A}$.

4. 将下列事件用事件 A, B, C 表示出来：

(1) A, B, C 中至少有一个发生；

(2) A, B, C 中只有 A 发生；

(3) A, B, C 中恰好有两个发生；

(4) A, B, C 中至少有两个发生；

(5) A, B, C 中只有一个发生；

(6) A, B, C 中不多于一个发生；

(7) A, B, C 都不发生.

5. 化简下列各式：

(1) $AB \cup A\overline{B}$；

(2) $(A \cup B) \cup (A \cup \overline{B})$；

(3) $(\overline{A \cup B}) \cap (A-\overline{B})$.

第二节　频率与概率

在一次随机试验中，随机事件可能发生，也可能不发生. 对于不同的事件，它们发生的可能性大小常常不一样. 我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小，即事件的概率. 为此，先引入一个和概率密切相关又容易理解的概念——频率，以便得出概率的定义来.

一、频率

定义 1　在相同条件下，进行了 n 次试验，在 n 次试验中事件 A 发生的次数为 n_A（n_A 叫做频数），则 $\frac{n_A}{n}$ 叫做事件 A 发生的频率，并记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

由定义，易知频率有下述基本性质：

(1) **任意事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；**

(2) $f_n(S) = 1$；

(3) **若 A_1, A_2, $\cdots$, A_k 是两两互不相容的事件，则**

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

事件 A 的频率 $f_n(A)$表示 A 发生的频繁程度. 一般地，$f_n(A)$越大，则在一次试验中 A 发生的可能性就越大，反之亦然. 但是，能否用在 n 次试验中 A 发生的频率来作为 A 发生的概率呢？事实上，$f_n(A)$会随着试验次数 n 的不同而不

同，即使是相同的试验次数，不同的人做试验也会得出不同的频率，即频率是随机波动的. 历史上不少人做过抛硬币试验，下面列出一组数据：

试验者	试验次数 n	出现正面的频数 n_A	出现正面的频率 $f_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从这组数据可以看出，当试验次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 在 0.5 附近波动，且波动辐度较小，并且随着试验次数 n 的增大，$f_n(A)$ 逐渐稳定在 0.5 这个数值上.

人们在长期的实践中发现，虽然一个事件 A 在一次试验中可能发生也可能不发生，但是，在大量重复试验中事件 A 发生的频率却具有稳定性，它会稳定于一个数值. 我们把这个数值叫做事件 A 的概率，概率的这个定义又叫做概率的统计定义.

二、概率

根据上面频率的性质，我们给出关于事件 A 发生的可能性大小的度量——概率 $P(A)$ 的定义.

定义 2　设随机试验 E 的样本空间为 S，A 是其中任意一个事件，与 A 对应的实数 $P(A)$ 若满足下列条件：

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：对必然事件 S，有 $P(S) = 1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两不相容的事件，即对于 $i \neq j$，$A_iA_j = \varnothing$，$i, j = 1, 2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则 $P(A)$ 叫做事件 A 的概率.

在第五章中将证明，当 $n \to \infty$ 时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一定意义下收敛于概率 $P(A)$. 因此，概率 $P(A)$ 可用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

根据概率的定义，可以得到概率的一些重要性质.

性质 1　$P(\varnothing) = 0$.

证　取 $A_n = \varnothing (n = 1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$，且 $A_iA_j = \varnothing$，$i, j = 1, 2, \cdots$. 由概率的可列可加性得：

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

即有

$$P(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

由概率的非负性知 $P(\varnothing) \geqslant 0$,故由上式得 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2　有限可加性

设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相容,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　取 $A_i = \varnothing$, $i = n+1, n+2, \cdots$. 于是,$A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1} \cdots$ 是可列个两两不相容的事件. 由可列可加性得:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

即

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3　对任意一个事件 A,有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证　由于 A 与 $\bar{A}$ 不相容,且 $A \cup \bar{A} = S$, 由有限可加性得:

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

即有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

性质 4　若事件 A 与 B 满足 $A \subseteq B$,则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad \text{且 } P(A) \leqslant P(B).$$

证　事件 A 与 $B - A$ 不相容,且由 $A \subseteq B$,有 $B = A \cup (B - A)$.
由有限可加性得:

$$P(B) = P[A \cup (B - A)] = P(A) + P(B - A),$$

即有

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由概率的非负性知 $P(B - A) \geqslant 0$,所以,$P(A) \leqslant P(B)$.

性质 5　对任意事件 A,有 $P(A) \leqslant 1$.

证　对任意事件 A,均有 $A \subseteq S$, 由性质 4 即有

$$P(A) \leqslant P(S) = 1.$$

性质 6　加法公式

对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证　由于　$A \cup B = A \cup (B-A) = A \cup (B-AB)$，
且 $A \cap (B-AB) = \varnothing$，$AB \subseteq B$，由有限可加性及性质 4 得：

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[A \cup (B-AB)] \\ &= P(A) + P(B-AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

加法公式还可以推广到多个事件的情况. 例如，对于三个事件 A, B, C，

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC \cup BC) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ &\quad - [P(AC) + P(BC) - P(ABC)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ &\quad - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned}$$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，用数学归纳法不难证明

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例　设 A, B, C 为三个事件，且已知 $P(A) = \frac{1}{3}$，$P(B) = \frac{1}{6}$，$P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = 0$，$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$，求事件“$A, B, C$ 均不发生”的概率.

解　所求概率为 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$，由德・摩根律知：

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C),$$

而

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC),$$

由于 $ABC \subseteq AB$，而 $P(AB) = 0$，故

$$0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0,$$

则

$$P(ABC) = 0,$$

于是，$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + 0 = \frac{7}{12}$，

因此，$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

习　题　1-2

1. 设 A, B, C 是三个事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = P(BC) = 0$，$P(AC) = \frac{1}{8}$. 求 A, B, C 中至少有一个发生的概率以及 A, B, C 全不发生的概率.

2. 设 A, B 是两个事件，已知 $P(A) = 0.5$，$P(B) = 0.7$，$P(A \cup B) = 0.8$. 试求 $P(A-B)$ 与 $P(B-A)$.

3. 设 $P(A) = a$，$P(B) = b$，$P(A \cap B) = c$. 用 a, b, c 表示 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$，$P(\bar{A} \cup B)$ 及 $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

4. 设 A, B 是两个事件且 $P(A) = 0.6$，$P(B) = 0.7$. 问

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

第三节　古 典 概 型

抛一枚硬币，由于硬币是均匀的，出现正面和反面的可能性是相同的；掷一枚骰子，由于骰子是均匀的，每个点数出现的可能性是相同的. 在实际问题中，有很多这类随机试验.

定义　若随机试验 E 满足：

(1) 样本空间 S 只包含有限个元素；

(2) 每个样本点(基本事件)出现的概率相同.

则称 E 是古典型随机试验，简称古典概型.

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象，它具有直观、容易理解的特点，在实际中有着广泛的应用.

下面我们来讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设古典概型 E 的样本空间 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，由于基本事件发生的概率相同，故
$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\}).$$
又由于基本事件是互不相容的，所以，
$$1 = P(S) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\}\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(\{e_i\}) = nP(\{e_i\}).$$
所以，
$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

若事件 A 含有 k 个样本点，即 $A=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$，这 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 中 k 个不同的数，则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cdots \cup \{e_{i_k}\}) \\ &= P(\{e_{i_1}\}) + P(\{e_{i_2}\}) + \cdots + P(\{e_{i_k}\}) \\ &= \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

即，
$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的样本点数}}{S\text{ 中包含的样本点数}}.$$

例 1 一个盒子中装有 10 只晶体管，其中 3 只是不合格品. 从这个盒子中依次随机取两只晶体管. 在下列两种情形下，分别求出两只晶体管中恰有一只是不合格品的概率. (1) 放回抽样，即第一次取出一只晶体管，作测试后放回盒子中，第二次再从盒子中取一只晶体管；(2) 不放回抽样，即第一次取出一只晶体管，作测试后不放回盒子中，第二次再从盒子中取一只晶体管.

解 从盒子中连续取两只晶体管，每一种取法是一个基本事件，这是一个古典概型问题.

设 A 表示随机事件“两只晶体管中恰有一只是不合格品”.

(1) 对放回抽样，此时第一次有 10 只晶体管可供抽取，第二次仍有 10 只晶体管可供抽取，所以，总的取法数(样本空间 S 的元素个数)为：$10 \times 10 = 100$ 种. 对于事件 A，第一次取到合格品且第二次取到不合格品的取法共为：$7 \times 3 = 21$ 种；第一次取到不合格品且第二次取到合格品的取法共为：$3 \times 7 = 21$ 种. 所以，A 中元素个数为：
$$21 + 21 = 42.$$

所以，
$$P(A)=\frac{42}{100}=0.42.$$

(2) 对不放回抽样，此时第一次有 10 只晶体管可供抽取，第二次有 9 只晶体管可供抽取，所以，总的取法数为：$10 \times 9 = 90$ 种. 对于事件 A，第一次取到合格品且第二次取到不合格品的取法数为：$7 \times 3 = 21$ 种；第一次取到不合格品且第二次取到合格品的取法数为：$3 \times 7 = 21$ 种. 所以，A 中元素个数为 $21 + 21 = 42$.

所以，
$$P(A)=\frac{42}{90}=0.47.$$

例 2 设 n 个人中每个人的生日在一年 365 天中任一天是等可能的. 求这 n 个人中至少有两人生日相同的概率(此处 $n \leqslant 365$).

解 设 A 表示“n 个人中至少有两人生日相同”，则 $\bar{A}$ 表示“n 个人中生日各不相同”.

此问题中，n 个人的每一种生日情况为一基本事件. 第一个人的生日可能情