高等数学
工科数学分析
学习同步辅导

张宗达　白红　王洪滨　编

哈爾濱工業大學出版社

高 等 数 学
工 科 数 学 分 析

学习同步辅导

张宗达　白红　王洪滨　编

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是为融合高等数学(工科数学分析)课程教学编写的同步辅导。其内容与高等数学(工科数学分析)相对应。它是按:(1)教学基本要求;(2)内容总结;(3)思考与讨论;(4)典型错误纠正;(5)释疑解惑;(6)例题分析等六个版块编写.

本书适合作高等理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导书。同时,可作考研学生的高等数学复习资料,并可作工科院校高等数学教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学、工科数学分析学习同步辅导./张宗达,白红,王洪滨编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.9
ISBN 978-7-5603-2402-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②白…③王… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料②数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 136868 号

策划编辑 尹继荣
责任编辑 翟新烨 张瑞
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 23.75 字数 428 千字
版　　次 2007 年 10 月第 1 版 2007 年 10 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2402-9
定　　价 36.00 元

前　言

本书是哈尔滨工业大学国家工科数学课程教学基地为配合高等数学(工科数学分析)课程教学编写的学习同步辅导材料。各章按如下六个主题展开讨论:

1.教学基本要求　　2.内容总结　　3.思考与讨论

4.典型错误纠正　　5.释疑解惑　　6.例题分析

“教学基本要求”让学生在学习时就了解学习的具体目标。“内容总结”帮助读者理顺每章的基本概念、基本理论、基本方法,完整地了解每章的内容,使相关知识形成一个网络,构成一个整体。“思考与讨论”通过例题从正反两方面加深对基本知识(特别是基本概念)的理解。“典型错误纠正”是针对初学者学习时常常发生的错误,讨论产生错误的根源,指出正确的方法。“释疑解惑”解答读者学习时容易产生的疑难和困惑的问题。“例题分析”编选了一些典型的例题,特别重视综合性和应用性的题目,在辅导解题方法的同时,指出了解题思路,强调对题目中条件和结论的分析。部分题目列举了多种解法,非常有利于提高思维能力、分析问题和解决问题的能力。

本书的特点:(1)结合教学,按章同步辅导,是学习本门课程的好帮手。同时本书也可作为习题课教材。(2)本书在严格遵循教学大纲要求的同时,对问题的讨论深入透彻,知识综合性强,是考研复习的必备材料。(3)本书力求内容完整、思想深入、题型广泛,突出一个“辅”字,使其篇幅适度,以减少不必要的学习负担。

限于编者水平,疏漏和不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

目　　录

第1章　函　　数

1.1　教学基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法.

2. 了解函数的奇偶性、周期性、单调性和有界性.

3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单应用问题中的函数关系.

在中学的数学课里，对函数已经有了初步的认识，由于函数是大学数学分析课的研究对象，所以有必要对它进行简要的复习和适当的补充。比起后面各章，它的内容不多，但很基本.

1.2　内容总结

1.2.1　基本概念

1. 邻域　数轴上，到点 x_0 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的所有点构成的集合，即开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 **δ - 邻域**，记为 $\bigcup_\delta(x_0)$.

称 $\bigcup_\delta(x_0)\setminus x_0$ 为点 x_0 的**去心 δ - 邻域**，记为 $\mathring{\bigcup}_\delta(x_0)$.

2. 函数　如果两个变量 x 和 y 之间有一个数值对应规律，使得变量 x 在其取值的数集 X 内每取得一个值时，变量 y 就依照这个规律确定对应值，则说 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中 x 叫做**自变量**，y 也叫做**因变量**.

自变量 x 取值的数集 X 称为函数的**定义域**. 所有函数值 y 构成的集合 Y 称为函数的**值域**.

函数概念中有两个要素：其一是对应规律，即函数关系，其二是定义域.

函数的表示方法主要有:公式法、图形法和表格法.

分段函数 在定义域的不同部分上,用不同的公式表达的一个函数,叫做**分段函数**.例如:当 G 是实数域 R 的子集时,函数

$$T_G(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in G,\\ 0, & 当\ x\notin G\end{cases}$$

就是一个分段函数,此函数称为集合 G 的特征函数.

3. 函数的图形 对函数 $y=f(x), x\in X$,将每个 $x\in X$ 和它对应的函数值 y,作为 xOy 平面上点的坐标 (x,y),则 xOy 平面上,点集 $G=\{(x,y)\mid x\in X,且\ y=f(x)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

【例】 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形,见图 1.1.曲线在 $x=0$ 附近疯狂地摆动.

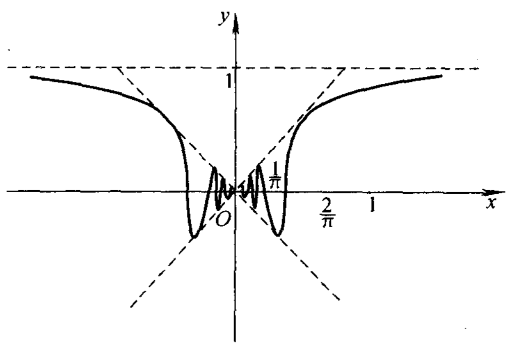

图 1.1

4. 复合函数 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u), u\in U$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x), x\in X$,且 $D=\{x\mid x\in X,且\ \varphi(x)\in U\}\neq\Phi$,则函数

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in D$$

称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合成的**复合函数**.

隐函数 通过变量 x、y 的方程 $F(x,y)=0$ 所表达的函数,叫做**隐函数**.

参数式函数 通过参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in T$$

给出的函数,叫做**参数式函数**,t 叫做**参数**或**参变量**.

反函数 对函数 $y=f(x), x\in X$,若视 y 为自变量,x 为因变量,由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,常记为 $x=f^{-1}(y)$.纯数学地,常说 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ **互为反函数**.

5. 基本初等函数 幂函数 $y=x^{\mu}$,指数函数 $y=a^x$,对数函数 $y=\log_a x$,三

角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, \cdots$,反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x, y=\arctan x, \cdots$,以及常函数 $y=c$ 统称**基本初等函数**.

初等函数 由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合所得到的,并能用一个式子表示的函数叫做**初等函数**.

1.2.2 函数的几种特性

1. 奇偶性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称,且

$$f(-x)=-f(x) \quad (f(-x)=f(x)),$$

则称此函数为**奇函数(偶函数)**.

2. 周期性 对函数 $y=f(x), x\in X$,如果有常数 $T\neq 0$,使得当 $x\in X$ 时,必有 $x\pm T\in X$,且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称此函数为**周期函数**.

3. 单调性 设 $x_1<x_2$ 是区间 I 内任意两点,如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则说函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加(单调减少)**,如果上式中出现等号,说 $f(x)$ 在 I 上**单调不减(单调不增)**.

4. 有界性 设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果存在常数 $A(B)$,使得

$$f(x)\leqslant A \quad (f(x)\geqslant B), \quad \forall x\in X,$$

则说函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**(有**下界**).既有上界,又有下界的函数,称为**有界函数**.此时,必有常数 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M, \quad \forall x\in X.$$

否则说 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

1.2.3 极坐标

1. 在平面上,取定一点 O,称为**极点**,过极点作射线 Ox,称为**极轴**,取定长度单位,就构成了平面的**极坐标系**.

平面上任何一点 M,到极点的距离 $r=|OM|$,称为点 M 的**极半径**,$0\leqslant r<+\infty$,由极轴 Ox 绕点 O 反时针转到 OM 的转角 θ,称为点 M 的**极角**,$0\leqslant\theta<2\pi$,称数组 (r,θ) 为点 M 的**极坐标**.

2. 当直角坐标系的原点与极坐标系的极点重合,Ox 轴一致时,平面上点的直角坐标与极坐标的关系是(参见图 1.2)

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

或

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

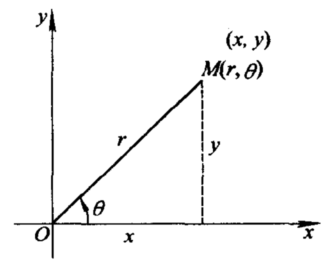

图 1.2

3. 极坐标系下，几条常用的曲线的方程.

极点为圆心，半径为 r_0 的圆的方程：$r = r_0$，见图 1.3.

极角为 θ_0 的射线(半直线)：$\theta = \theta_0$，见图 1.3.

圆心在 x 轴上，圆周过极点，半径为 R 的圆：$r = 2R\cos\theta$，见图 1.4.

圆心在 y 轴上，圆周过极点，半径为 R 的圆：$r = 2R\sin\theta$，见图 1.5.

等距螺线，$r = a\theta(a > 0)$，见图 1.6.

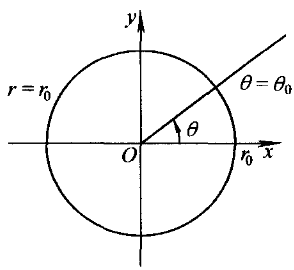

图 1.3

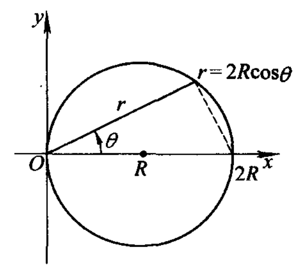

图 1.4

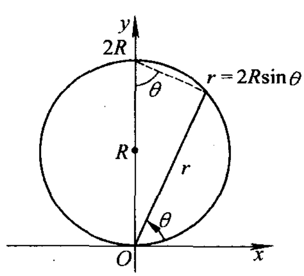

图 1.5

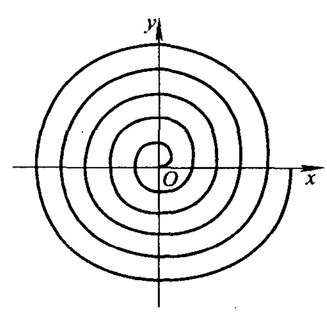

图 1.6

在极坐标系下，曲线方程中的两个变量 r 和 θ，突破 $0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta < 2\pi$ 的限制，有时会很方便，如等距螺线 $r = a\theta$ 中极角 $\theta \geqslant 0$.

1.3 思考与讨论

1. 函数 $y = f(x), x \in X$ 无界的定义是对任意给定的常数 $M > 0$，总有 $x \in$

X,使得(　　).

(A) $|x|>M$　(B) $f(x)>M$　(C) $f(x)<-M$　(D) $|f(x)|>M$

分析　函数无界是指其值域无界.(A) 是说 $f(x)$ 的定义域 X 无界;(B) 是说 $f(x)$ 无上界;(C) 说明 $f(x)$ 无下界;(D) 是 $f(x),x\in X$ 无界的定义.

应选 D.

【注】　回答四选一的选择题,只要直接找到正确答案,或者否定三个答案即可.本书出于教与学的目的,对每个选项都要分析讨论,以便加深对概念和方法的理解,提高思维能力.

2. 用肯定的语气,给出"函数 $f(x)$ 在区间 I 上不单调"的定义.

答　如果在 I 内,存在三点 $x_1<x_2<x_3$,使得 $[f(x_1)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_3)]<0$,则说 $f(x)$ 在 I 上不单调.

3. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是单增的,则下列函数中一定单增的是(　　).

(A) $f(x)-g(x)$　(B) $f(x)g(x)$　(C) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　(D) $f(g(x))$

应选 D.

4. 设函数 $f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 有界,而 $g(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 无界,则下列函数:①$f[g(x)]$;②$g[f(x)]$;③$f(x)\pm g(x)$;④$f(x)g(x)$ 中,关于有界性有确定结论的是(　　).

(A)①②　(B)③④　(C)①③　(D)②④

分析　①$f[g(x)]$ 有界,②$g[f(x)]$ 有界性不能确定,③$f(x)\pm g(x)$ 肯定无界,④$f(x)g(x)$ 有界性不能确定.

应选 C.

1.4　典型错误纠正

1. 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1,\end{cases}$$

求其反函数 $f^{-1}(x)$ 及其定义域.

(解法 1)　因为 $y=f(x)$ 不是单调函数,所以没有反函数.

(解法 2)　当 $x\leqslant 1$ 时,$0\leqslant y<+\infty$,由 $y=(x-1)^2$ 解得 $x=1+\sqrt{y}$;当 $x>1$ 时,$-\infty<y<0$,由 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 解得 $x=1-\dfrac{1}{y}$.故

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0,\\ 1+\sqrt{x}, & 0\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

问题分析 解法 1 是错的，因为“单调函数有反函数”中的条件是充分条件. 一个函数 $y=f(x)$ 有单值的反函数的充要条件是它确定的映射为一对一的. 而单调函数是最容易检验映射为一对一的一个条件，它不是必要条件. 例如函数

$$y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

不是单调函数，但它有反函数，就是它自己，见图 1.7. 又如函数

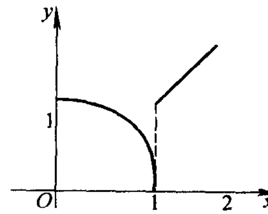

图 1.7

$$y=\begin{cases}x, & 当\ x\ 为有理数时,\\ 2x, & 当\ x\ 为无理数时.\end{cases}$$

不单调，而且任何区间上都不单调，但由于映射是一对一的，所以有反函数为

$$y=\begin{cases}x, & 当\ x\ 为有理数时,\\ \dfrac{1}{2}x, & 当\ x\ 为无理数时.\end{cases}$$

解法 2 中也有错误，求反函数时，一定要将反函数的定义域和值域，以及函数关系分析清楚. 在本题中，当 $x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant y<+\infty$，由 $y=(x-1)^2$ 导出 x 来，一定要符合这两个不等式的要求，故从导出的结果 $x=1\pm\sqrt{y}$ 中，应舍去 $x=1+\sqrt{y}$. 解法 2 在此处出了问题，正确的结果应为 $x=1-\sqrt{y}$. 当 $x>1$ 时，计算是正确的，故所求的反函数应为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, & 当\ x<0\ 时,\\ 1-\sqrt{x}, & 当\ x\geqslant 0\ 时.\end{cases}$$

【注】 (1) 学习一个定理或命题时，一定要严格区分开充分条件和必要条件. 否则将会出现错误，最终导致思维混乱.

(2) 一个分段单调的函数，如果各单调区间上对应的值域部分的交集为空集，则此函数必有反函数. 求其反函数时，应分单调区间分段求出反函数.

1.5 释疑解惑

1. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形(曲线)关于直线 $y=x$ 对称，那么这两条曲线如果有交点，交点必在直线 $y=x$ 上吗?

答　这个说法是错误的，例如函数

$$y=\begin{cases}1-x, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\text{ 时},\\ \dfrac{1}{2}x, & \text{当}\dfrac{1}{2}<x<1\text{ 时}\end{cases}$$

的反函数为

$$y=\begin{cases}2x, & \text{当}\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}\text{ 时},\\ 1-x, & \text{当}\dfrac{1}{2}\leqslant x<1\text{ 时}.\end{cases}$$

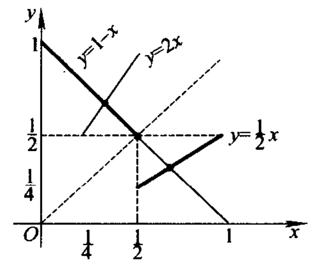

图 1.8

由图 1.8 不难看出它们的图形有三个交点，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$、$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ 和 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 后两个交点不在直线 $y=x$ 上.

函数 $y=f(x)$ 及反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形交点问题，下列说法是正确的：

(1) 如果有交点，必关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 如果曲线 $y=f(x)$ 上有关于直线 $y=x$ 的对称点，则这两个点必是 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 的交点.

(3) 如果曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 有交点，它必是 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的交点.

(4) 如果 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形有唯一的交点，它必在 $y=x$ 直线上.

当然上面结论并不重要，只是强调根据某一事实能得到什么结论. 我们思维要深入全面，不能片面；要有根有据，符合逻辑，不要想当然.

2. 两个函数都在同一点附近无界，它们的乘积在该点附近也无界吗？

答　不一定，例如

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \text{ 为有理数，且 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ x, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

在点 $x=0$ 附近都无界，但

$$f(x)g(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

在点 $x=0$ 附近有界. 而

$$f^2(x) = f(x)f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}, \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 附近无界.

【注】 这里说的“函数在一点附近无界”，是指在该点的任意小的邻域上，函数都无界.

3. 下面两个说法正确吗？

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上处处有定义，则 $f(x)$ 必有界；

(2) 在开区间 (a,b) 的每个点处都有一个小邻域，使 $f(x)$ 在该邻域上有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上必有界.

答 都不正确. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上处处有定义，但无界；在开区间 $(0,1)$ 内任何一点 x_0 处，取正数 $\delta = \min\left\{\dfrac{x_0}{2}, \dfrac{1-x_0}{2}\right\}$，则 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 上有界 $(0 < f(x) \leqslant f(x_0 - \delta))$，但 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界.

出现上述错误想法的原因就是把有限个量的性质用到无限个量上了.

4. 如何建立函数关系？

答 对一个具有实际意义的问题要建立函数关系，首先要深入理解问题所服从的客观规律，了解它所涉及的变量与常量，并用适当的英文字母表示，然后用这些字母的算式表达出问题所服从的客观规律（几何的、物理的或相关专业的），建立起函数关系，在此过程中要注意函数的定义域的确定.

例如，图 1.9 是点 A 绕点 O 的转动到活塞 B 的往复直线运动相互转换的机构，试确定 AO 的转角与活塞 B 的位移间的函数关系.

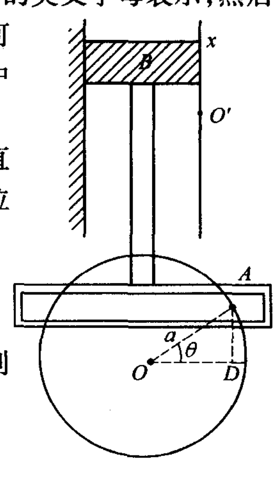

图 1.9

解 记 AO 长为 a，转角为 θ，B 的位移为 x.

设 AO 水平放置时，转角为 0，此时 B 的位移为 0.

不难从图上看出位移 x 等于 AD. 由三角形关系，得到所求的函数关系为

$$x = a\sin\theta,$$

θ 的取值范围，即此函数的定义域为 $-\infty < \theta < +\infty$.

1.6 例题分析

【例 1】 求函数 $y = \arccos \ln \frac{x+5}{3} + \sqrt{x\sin^2 x}$ 的定义域.

解 这是一个初等函数,因为 $\arccos \ln \frac{x+5}{3}$ 是由 $\arccos u, u = \ln v, v = \frac{x+5}{3}$ 复合成,而 $\arccos u$ 的定义域为 $|u| \leqslant 1$,故要限定 $|\ln v| \leqslant 1$.因此,$\frac{1}{e} \leqslant v \leqslant e$,即要求 $\frac{1}{e} \leqslant \frac{x+5}{3} \leqslant e$,亦即

$$\frac{3}{e} - 5 \leqslant x \leqslant 3e - 5.$$

又因 $\sqrt{x\sin^2 x}$ 是由 $\sqrt{w}, w = x\sin^2 x$ 复合成的,$\sqrt{w}$ 的定义域为 $w \geqslant 0$,故要求 $x\sin^2 x \geqslant 0$,即

$$x \geqslant 0 \quad 或 \quad x = -k\pi \quad (k = 1,2,\cdots).$$

上述两个集合的交集

$$X = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 3e - 5 \text{ 或 } x = -\pi\}$$

就是函数 $y = \arccos \ln \frac{x+5}{3} + \sqrt{x\sin^2 x}$ 的定义域.

【注】 (1) 求复合函数定义域时,应先求外层函数的定义域,再以此定义域作为对内层函数值域的一个限制,求出内层函数自变量的取值范围,最终得到复合函数的定义域.

(2) 由此例可看到,初等函数的定义域不一定是一个区间.这里是一个闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 3e - 5$,外加一个点 $x = -\pi$.也有的初等函数定义域是一些离散的点,总之定义域是五花八门的.

【例 2】 设复合函数 $f(\varphi(x)) = 1 - x$,且 $\varphi(x) \geqslant 0$,(1) 已知 $f(x) = e^{x^2}$,求 $\varphi(x)$;(2) 已知 $\varphi(x) = \arctan x$,求 $f(x)$.

解 (1) 令 $u = \varphi(x)$,由 $f(u) = e^{u^2}$,知 $f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$.由此解得

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)}, \quad x \leqslant 0.$$

(2) 令 $u = \arctan x \geqslant 0$,则 $x = \tan u (0 \leqslant u < \frac{\pi}{2})$.于是 $f(u) = 1 - x = 1 - \tan u$,故

$$f(x) = 1 - \tan x, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}.$$

【注】 已知复合函数,以及复合前的外层函数或内层函数,求另一个函数