普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微积分

WEIJIFEN

（下册）

张学奇◎编著

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微积分

WEIJIFEN（下册）

张学奇◎编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/张学奇编著.
北京：中国人民大学出版社，2007.10
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-300-08460-2

Ⅰ.微…
Ⅱ.张…
Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 133569 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
微积分
张学奇　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 9 月第 1 版
印　　张	34.25 插页 2	**印　　次**	2007 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	628 000	**定　　价**	39.80 元(上、下册)

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，我们依据经济类、管理类各专业对微积分课程的教学要求，在总结微积分课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写了本书。

本书的编写以强化概念理解、渗透数学思想，突出数学应用、培养建模能力，体现教育理念、提高教学质量为指导，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的和谐统一，教育理念与学生发展、学习数学与运用数学的有机结合。与现行同类教材相比，本书注重突出以下特点：

优化构建教学内容与课程体系。在考虑课程的基础性、系统性与逻辑性的基础上，注意体现微积分的思想性和应用性，微积分与经济管理等学科的交叉与渗透，对教学内容与课程体系进行适当调整，整体体现加强基础、培养能力、重视应用的原则。

强化概念的理解。从问题出发，呈现概念的形成过程和背景知识，突出概念的思想性，通过几何化、数值化、解析化和描述化的方法强化概念的理解。如对极限、连续、导数、微分和定积分等重点概念的处理。

突出微积分基本思想和知识内在特征。如辩证思想、数形结合、线性代替、函数逼近等。对重要概念、定理、法则用辩证的观点进行剖析和评注，把握知识内在特征。

突出数学建模能力的培养。围绕着函数、变化率、函数最值、定积分、微分方程、差分方程等主题，强调数学概念与经济管理问题的联系。结合课程内容编写了应用研究、模型案例、模型应用等专题，通过有步骤、专题式的建模过程学习，逐步培养学生用数学的意识、获取新知识的能力和数学建模能力，适应经济、金融、管理等学科的专业需要。

体现数学素质教育、数学文化教育和科学精神培养。配合教学内容编写了一些经典实例、数学家简介、读写练习等内容，提高学生的学习兴趣、学习积极性和数学意识，使学生感到数学就在身边，受到数学素养的熏陶。

注重教材结构上的严谨、逻辑上的清晰、叙述上的通俗易懂。教材在编排上体现教学思想与教学方法，教师好使，学生好用，有利于教与学双方的使用和教

学质量的提高。

强调基础解题能力与数学建模能力的训练。注意例题与习题的设计与编选，例题典型，习题覆盖面宽、题型丰富、难易适度，按节配有适量的基本练习题，每章配有练习题 A 与 B、数学建模题、课外读写题。A 类题可以用于检测对基本教学内容的掌握情况，B 类题可供学有余力的读者选用；数学建模题、课外读写题可作为课外学习选用，书末附有答案与提示，便于检查参考。

全书内容包括函数，极限与连续，导数与微分，一元函数微分学应用，积分，多元函数微积分，无穷级数，常微分方程，差分方程，以及应用研究、模型案例、模型应用等课外学习专题。参考教学时数为 120 学时，标有※号的内容要另行安排学时。

为了使学生更好地掌握微积分内容，提高学生分析问题和解决问题的能力，拓展学生的学习空间，我们还编写了配套的辅导教材，该辅导教材包括：以题型分析、思路讲解、方法概括为主的解题指导；课程内容、数学建模与数学软件相结合的数学实验。辅导教材与主教材相辅相成，解题指导帮助学生理清解题思路，把握解题规律；数学实验使抽象概念形象化、计算简单化、知识生动化，使学生受到用数学软件求解数学模型的能力训练，辅导教材起到了对课程的同步辅导与延伸的作用。

为适应教育信息化发展的需要，我们结合现代化教育手段编制了与教材配套的多媒体课件与素材库(放在中国人民大学出版社的网站(www.crup.com.cn)的资源中心处)。该多媒体课件注重教学设计，以问题为先导，设计教学情景与活动，将教师启发性教学思想融合在课件的设计之中，使教学内容动态化与思维过程可视化。教学资源库为教师自主组织教学创造了条件。

参加本书编写的还有夏建业、陈锡祯两位教授。在本书的编写过程中我们参阅了国内外一些优秀教材，从中受到了有益的启发，吸取了先进的经验，本书的出版受到了中国人民大学出版社策划编辑潘旭燕的支持与帮助，在此表示感谢！

限于编者的水平，加之时间仓促，本书难免存在不足之处，殷切期望专家、同行和读者批评指正，使本书不断完善和提高。

张学奇

2007 年 3 月

目　录

第六章　多元函数微积分

多元函数微积分是一元函数微积分的推广. 因此，多元函数微积分的许多内容与一元函数微积分的相关内容类似或密切相关，在这部分内容的学习中应注意与一元函数微积分的对比和联系.

第一节　空间曲面

在讨论多元函数微积分之前，首先要了解空间曲面的知识. 这些知识是学习多元函数微积分的基础.

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间一个定点 O 作三条相互垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同单位长度，这三条数轴分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴) 和 z 轴(竖轴). 一般是将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，那么 z 轴就垂直于水平面. 它们的方向通常符合右手螺旋法则，即伸出右手，让四指与大拇指垂直，并使四指先指向 x 轴，然后让四指沿握拳方向旋转 $90°$ 指向 y 轴，此时大拇指的方向即为 z 轴方向. O 称为坐标原点. 这样就构成了空间直角坐标系，见图 6—1.

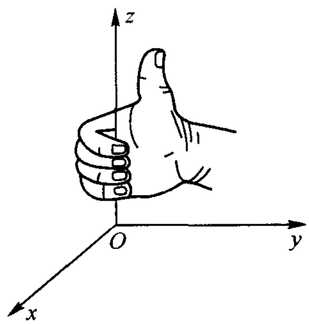


图 6—1

在空间直角坐标系中，每两轴所确定的平面称为**坐标平面**，简称**坐标面**，即 xOy 坐标面、yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 坐标面把空间分为八个部分，每一个部分称为一个**卦限**. 在 xOy 坐标面上方有四个卦限，下方有四个卦限. 含 x

轴，y 轴和 z 轴正向的卦限称为第 Ⅰ 卦限，然后逆着 z 轴正向看时，按逆时针顺序依次为 Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限，对于分别位于 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限下面的四个卦限，依次为第 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限，见图 6—2.

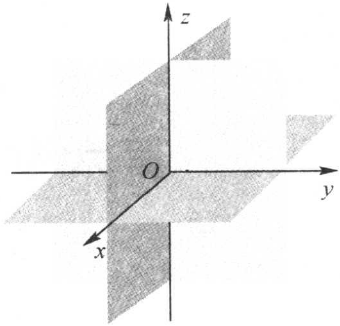


图 6—2

2. 点的坐标

设 M 为空间内的任意一点，过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 P, Q, R. 设 x, y, z 分别是 P, Q, R 点在数轴上的坐标. 这样空间内任一点 M 就确定了唯一的一组有序数组 x, y, z, 用 (x, y, z) 表示.

反之，任意给出一组有序数组 x, y 和 z，它们分别在 x 轴，y 轴和 z 轴上对应点 P, Q, R. 过 P, Q, R 分别作垂直于三个坐标轴的平面相交于点 M. 这样一组有序数组就确定了空间内唯一的一个点 M. 根据上面的法则，可以建立空间一点 M 与一组有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系. 有序数组 (x, y, z) 称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$，见图 6—3.

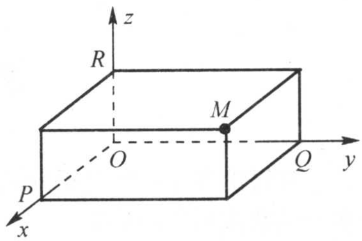


图 6—3

坐标面上点的坐标：xOy、yOz 和 zOx 坐标面上点的坐标分别为 $(x, y, 0)$、$(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$.

坐标轴上点的坐标：Ox、Oy 和 Oz 坐标轴上点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$、$(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$.

空间直角坐标系中各卦限中点的坐标符号见表 6—1.

表 6—1　空间直角坐标系中各卦限中点的坐标符号

卦限	点的坐标 (x, y, z) 符号	卦限	点的坐标 (x, y, z) 符号
Ⅰ	$(+, +, +)$	Ⅴ	$(+, +, -)$
Ⅱ	$(-, +, +)$	Ⅵ	$(-, +, -)$
Ⅲ	$(-, -, +)$	Ⅶ	$(-, -, -)$
Ⅳ	$(+, -, +)$	Ⅷ	$(+, -, -)$

3. 空间两点间的距离公式

设空间任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，两点间的距离记为

$|M_1M_2|$. 过点 M_1 和 M_2 分别作平行于坐标面的平面，这六个平面构成一个长方体，它的三条边长分别为 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，见图 6—4. 由勾股定理，可得 M_1 与 M_2 的距离 $|M_1M_2|$ 为：

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1P|^2+|M_2P|^2\\ &= |M_1Q|^2+|M_1R|^2+|M_2P|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\ &\quad +(z_2-z_1)^2.\end{aligned}$$

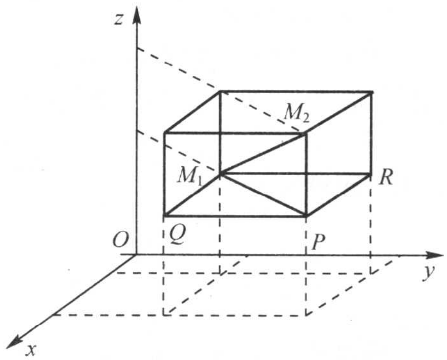


图 6—4

所以 $$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

该公式称为**空间两点间的距离公式**，它是平面上两点间距离公式的推广.

二、空间曲面与方程

1. 曲面方程的概念

定义　如果曲面 S 上每一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的点的坐标都不满足这个方程，则称方程 $F(x,y,z)=0$ **为曲面 S 的方程**，称曲面 S 为此方程的图形，见图 6—5.

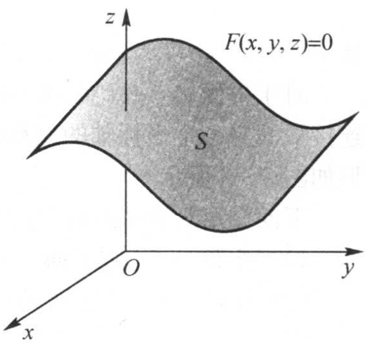


图 6—5

例 1　求球心在 (x_0,y_0,z_0)，半径为 R 的球面方程.

解　设定点 M_0 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则点 $M(x,y,z)$ 在以 M_0 为球心，以 R 为球半径的球面上的充要条件为 $|M_0M|=R$，

即：$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

两边平方，得：$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

显然，球面上的点的坐标满足方程，不在球面上的点的坐标不满足方程，所以方程就是以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，以 R 为球半径的**球面方程**.

当 $x_0=y_0=z_0=0$ 时，则得球心在坐标原点的球面（见图 6—6），其方程为：

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

2. 平面的方程

例 2 求与两定点 $M_1(1, 0, 2)$, $M_2(2, 1, -2)$ 等距离的动点 $M(x, y, z)$ 的轨迹方程.

解 由题意，有 $|MM_1| = |MM_2|$，再由两点间的距离公式，得：

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}.$$

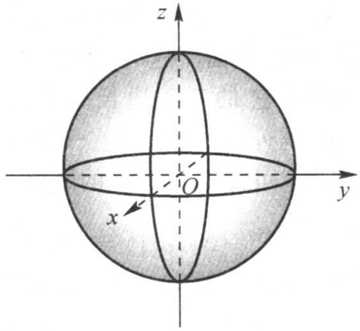


图 6—6

两边平方，化简，得三元一次方程：

$$x+y-4z-2=0.$$

由几何知识知，动点 $M(x, y, z)$ 的轨迹是线段 M_1M_2 的垂直平分面，因此，上述三元一次方程是平面方程. 此结论对空间一般平面也成立.

空间平面的一般方程为三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A, B, C, D 均为常数，且不全为零.

对于平面 $Ax+By+Cz+D=0$，当 A, B, C, D 均不为零时，平面图形用连接平面与三个坐标轴的交点构成的三角形表示. 例如，平面 $x+y+z=1$ 的图形如图 6—7 所示.

下面介绍几种特殊位置的平面方程与图形：

(1) 若 $D=0$，则平面 $Ax+By+Cz=0$ 过坐标原点；

(2) 若 $C=0$，则平面 $Ax+By+D=0$ 平行于 Oz 轴(见图 6—8)；

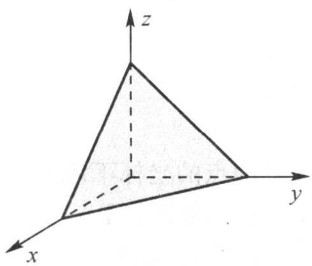


图 6—7

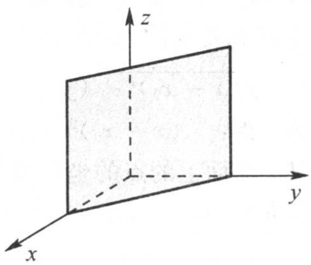


图 6—8

(3) 若 $C=D=0$，则平面 $Ax+By=0$ 过 Oz 轴；

(4) 若 $B=C=0$，则平面 $Ax+D=0$ 平行于 yOz 平面(见图 6—9).

对于特殊位置的平面图形，在空间直角坐标系中通常用平行四边形表示. 其他特殊位置的平面方程与图形与上述类似.

3. 母线平行于坐标轴的柱面

直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的曲面称为**柱面**. 定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线 L 称为柱面的**母线**，见图 6—10.

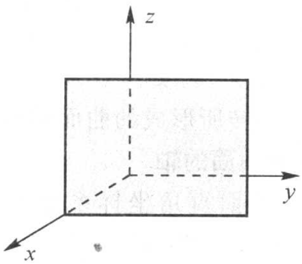


图 6—9

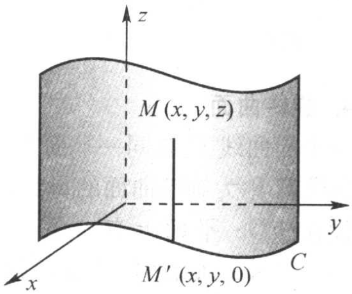


图 6—10

在此，主要讨论准线在坐标面上母线垂直于该坐标面的柱面方程.

设柱面的准线是 xOy 面上的曲线 C，它在平面直角坐标系 xOy 中的方程为 $f(x,y)=0$，求以 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

在柱面上任取一点 $M(x,y,z)$，过 M 作 xOy 面的垂线与曲线 C 相交于点 $M'(x,y,0)$ (见图6—10). 因为 M' 在曲线 C 上，所以其坐标满足方程 $f(x,y)=0$. 由于该方程不含变量 z，所以柱面上任意点 $M(x,y,z)$ 的坐标也满足 $f(x,y)=0$.

反之，不在柱面上的点都不满足方程 $f(x,y)=0$，故此方程为以 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面方程.

类似地，方程 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面，方程 $h(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，含两个变量的方程为柱面方程，并且方程中不含那个变量，该柱面的母线就平行于那一个坐标轴. 下面给出母线平行于 Oz 轴的常见柱面的方程及图形.

圆柱面 $x^2+y^2=R^2$；　　椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (见图 6—11)；

双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (见图 6—12)；抛物柱面 $x^2-2py=0$ (见图 6—13).

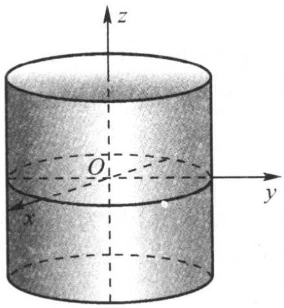


图 6—11

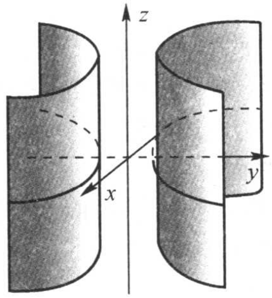


图 6—12

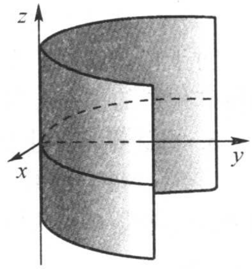


图 6—13

4. 旋转曲面

一平面曲线 C 绕同一平面上的一条定直线 L 旋转所形成的曲面称为**旋转曲面**. 曲线 C 称为旋转曲面的**母线**，直线 L 称为**旋转曲面的轴**.

设在 yOz 平面上有一条已知曲线 C，它在平面直角坐标系中的方程是 $f(y, z)=0$，求此曲线 C 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程.

在旋转曲面上任取一点 $M(x, y, z)$，设该点是由母线 C 上的点 $M_1(0, y_1, z_1)$ 绕 z 轴旋转一定角度而得到. 由图 6—14 可知，点 M 与 z 轴的距离等于点 M_1 与 z 轴的距离，且有同一竖坐标，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，$z=z_1$. 又因为点 M_1 在母线 C 上，所以 $f(y_1, z_1)=0$. 于是有 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$. 即旋转曲面上的点都满足方程

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0,$$

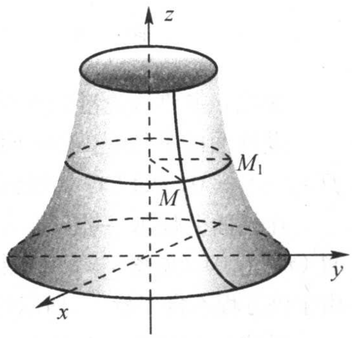


图 6—14

而不在旋转曲面上的点都不满足该方程，故此方程是母线为 C、旋转轴为 z 轴的旋转曲面的方程. 可见，只要在 yOz 坐标面上曲线 C 的方程 $f(y, z)=0$ 中，将 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到曲线 C 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面的方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转生成的旋转曲面的方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$. 对于其他坐标面上的曲线，绕该坐标系上任何一条坐标轴旋转所生成的旋转曲面，其方程可以用上述类似方法求得.

例 3 求由 yOz 平面上的直线 $z=ky(k>0)$ 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面方程.

解　在 $z=ky$ 中，把 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得所求旋转曲面方程为

$$z=\pm k\sqrt{x^2+y^2},$$

即
$$z^2=k^2(x^2+y^2).$$

此曲面为顶点在原点，对称轴为 z 轴的圆锥面，见图 6—15.

5. 二次曲面

在空间直角坐标系中，若 $F(x, y, z)=0$ 是二次方程，则称其图形为**二次曲面**.

用一系列平行于坐标面的平面去截曲面，求得一系列的交线，对这些交线进行分析，从而把握曲面的轮廓特征，这种方法称为**截痕法**.

方程　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　$(a>0, b>0, c>0)$ 所表示的曲面称为**椭球面**，a，b，c 称为椭球面的半轴，见图 6—16.

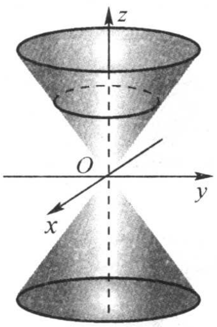


图 6—15

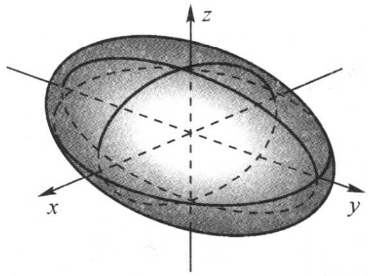


图 6—16

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 可知：

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即
$$|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c.$$

由此可见，曲面包含在 $x=\pm a$，$y=\pm b$，$z=\pm c$ 这六个平面所围成的长方体内.

现用截痕法来讨论这个曲面的形状.

用 xOy 坐标面 $z=0$ 和平行于 xOy 坐标面的平面 $z=h(|h|\leqslant c)$ 去截曲面，其截痕分别为椭圆，且 $|h|$ 由 0 逐渐增大到 c 时，椭圆由大变小，逐渐缩为一点.

同样，用 zOx 坐标面与平行于 zOx 坐标面的平面去截曲面，以及用 yOz 坐标面与平行于 yOz 坐标面的平面去截曲面，它们的交线与上述结果类似.

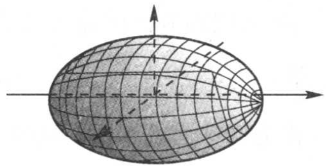
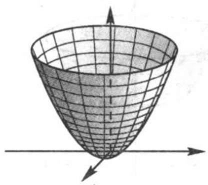
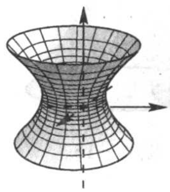
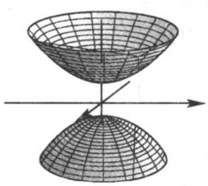
综合上述讨论可知，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面形状如图 6—16 所示.

当 $a=b$ 时，方程 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 是椭圆绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面.

当 $a=b=c$ 时，方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 是球心在原点，球半径为 a 的球面.

用截痕法可知一些常用二次曲面的图形，见表 6—2.

表 6—2　　常用的二次曲面方程与图形

曲面名称	曲面方程	曲面图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p>0,\ q>0)$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z(p>0,\ q>0)$