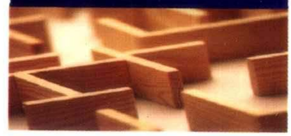
打造精英
QUANXI JINGJIE



数值分析

【清华·第四版】

杨 刚 武 燕 王宇翔 编著

●重点、难点全析 ●习题全解

全析精解

西北工业大学出版社

数值分析

（清华·李庆扬·第四版）

全析精解

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值分析全析精解/杨刚,武燕,王宇翔编著.—西安:西北工业大学出版社,2007.6

(全析精解丛书)

ISBN 978-7-5612-2226-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.①杨…②武…③王…　Ⅲ.数值计算—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第078892号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号　**邮编**:710072

电　　话:(029)88493844　88491757

网　　址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西丰源印务有限公司

开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张:4.625

字　　数:145千字

版　　次:2007年6月第1版　2007年6月第1次印刷

定　　价:8.00元

前 言

“数值分析”是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业博士研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好地学习和掌握数值分析课程的理论精髓和解题方法，我们根据清华大学出版社出版的由李庆扬、王能超、易大义编写的《数值分析》教材的章节顺序，以其内容为基础编写了这本辅导教材。本书共分 9 章，每章均有重点、难点全析和习题全解两个板块。书末附了三套自测试题及答案，帮助学生自我检测学习效果。

(1)重点、难点全析：精练地列出了各章的主要知识点，理清了各知识点之间的脉络联系，列出了主要定理及其相关推论、重要公式等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

(2)习题全解：对数值分析各章的习题作了详细解答，在解答过程中，对重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳了解题技巧。

我们本着服务于读者学习、考试的角度，通过对习题的解答，揭示了数值分析的解题方法、规律和技巧，以帮助读者更好地理解该课程的基本概念和理论，开拓解题思路，提高数学素质。本书由杨刚、武燕，王宇翔编写，在编写过程中，得到了李强、黄蕊等同志的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！对《数值分析》的作者李庆扬、王能超、易大义教授表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免存在缺漏和不妥之处，请各位专家和广大读者批评指正。

编 者

2007 年 3 月

目 录

第1章 绪 论

1.1 重点、难点全析

1.1.1 误差来源及分类

数值分析主要研究两类误差.

1. 舍入误差

由于计算机字长有限,原始数据在计算机上的表示以及进行算术运算(+,-,×,÷)时可能产生的误差,称为舍入误差.

2. 截断误差(方法误差)

为了在有限步内得到运算结果,用有限的过程取代无穷的过程时产生的误差,称之为截断误差或方法误差.

用数值方法求解数学模型所得到的近似解包含舍入误差和截断误差两部分.

1.1.2 误差度量①

1. 绝对误差(误差)

(1) **定义**:近似值 x^* 与准确值 x 之差称为绝对误差,简称误差.用公式表示为 $e(x^*) \overset{\text{def}}{=\!=\!=} x^* - x$. 在不引起混淆时可简记 $e(x^*)$ 为 e^*.

(2) 绝对误差限(误差限):绝对误差绝对值的一个上界,用符号表示为 $\varepsilon(x^*)$ 或 ε^*.

2. 相对误差

(1) **定义**:绝对误差 e^* 与准确值 x(非零)的比值 $\dfrac{e^*}{x} = \dfrac{x^* - x}{x}$ 称为近似值

① 实际应用中,误差指绝对误差限,相对误差指相对误差限.

x^* 的相对误差,用符号表示为 $e_r(x^*)$ 或 e_r^*. 由于真值 x 总是未知的,故

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

当 x^* 较好地近似 x 时,两种方法仅相差高阶无穷小.

(2) 相对误差限:相对误差可正可负,它的绝对值的较小上界叫做相对误差限,记作 $\varepsilon_r(x^*)$ 或 ε_r^*,即用

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$$

计算.

3. 有效数字

(1) **定义**:设准确值 x 的近似值 x^*(非零)可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \tag{1.1}$$

式(1.1)中 $a_i(i = 1,\cdots,n)$ 是 $0 \sim 9$ 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,m 为整数,且使

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n^*+1}$$

成立的整数 n^* 的最大值为 n,则称 x^* 近似 x 具有 n 位有效数字;a_1, a_2, $\cdots$, a_n 分别是 x^* 近似 x 的第 1 位、第 2 位、……、第 n 位有效数字.

(2) 有效数:称近似值末位也是有效数字的近似数为有效数. 此时,绝对误差限不超过末位单位的一半. 进而可以知道,对准确值进行四舍五入或对近似数的准确位进行四舍五入所得近似值均为有效数. 有效数的有效数字位数等于左起第一位非零数字到末位数字的位数.

4. 三种度量间的联系

(1) 绝对误差与相对误差的关系参阅相对误差的定义.

(2) 绝对误差与有效数字的关系参阅有效数字的定义.

(3) 相对误差与有效数字的关系参阅教材.

定理 1.1 设非零近似数 x^* 有形如式(1.1)的表示,若 x^* 具有 n 位有效数字,则相对误差限为

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

定理 1.2 设非零近似数 x^* 有形如式(1.1)的表示,若 x^* 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{1-n}$$

则 x^* 至少有 n 位有效数字.

1.1.3 初值误差传播

1. 一元函数误差传播

$$e(f(x^*)) = f(x^*) - f(x) \approx f'(x^*)e(x^*)$$

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

$$\varepsilon_r(f(x^*)) \approx C_p(f, x^*)\varepsilon_r(x^*)$$

其中条件数
$$C_p(f, x^*) \xlongequal{\text{def}} \left|\frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)}\right|$$

2. n 元函数误差传播

$$e(f(x_1^*, \cdots, x_n^*)) = f(x_1^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, \cdots, x_n) \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1^*, \cdots, x_n^*)}\right)e(x_k^*)$$

$$\varepsilon(f(x_1^*, \cdots, x_n^*)) \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1^*, \cdots, x_n^*)}\right|\varepsilon(x_k^*)$$

$$\varepsilon_r(f(x_1^*, \cdots, x_n^*)) \approx \sum_{k=1}^{n} C_p(f, x_k^*)\varepsilon_r(x_k^*)$$

$$C_p(f, x_k^*) \xlongequal{\text{def}} \left|\frac{x_k^* \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1^*, \cdots, x_n^*)}}{f(x_1^*, \cdots, x_n^*)}\right|$$

3. 二元算术运算的误差传播

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_2^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^*|\varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_2^*|^2}, \quad x_2^* \neq 0$$

$$\varepsilon_r(x_1^* + x_2^*) \approx \max\{\varepsilon_r(x_1^*), \varepsilon_r(x_2^*)\}, \quad x_1^* x_2^* > 0$$

$$\varepsilon_r(x_1^* \overset{\times}{\div} x_2^*) \approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*), \quad x_1^* x_2^* \neq 0$$

1.1.4 算法的数值稳定性

一个算法如果输入数据有误差,而在计算过程中舍入误差不增长,则称此算法是数值稳定的,否则称此算法为数值不稳定的.

1.1.5 算法设计中避免误差危害的若干原则

(1) 要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法.

(2) 要避免两相近数相减.

(3) 要防止大数“吃掉”小数.

(4) 注意简化计算步骤,减少运算次数.

1.2 习题全解

1. 设 $x>0$, x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的误差.

解 $\ln x^* - \ln x \approx \dfrac{1}{x^*}(x^* - x)$,相对误差

$$|e(\ln x^*)| \approx |e_r(x^*)| \leqslant \delta$$

进而有
$$\varepsilon(\ln(x^*)) \approx \delta$$

2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

解 函数值的条件数为

$$C_p(x^n, x^*) = \left|\frac{x^* n(x^*)^{n-1}}{(x^*)^n}\right| = n$$

根据函数值误差传播公式

$$\varepsilon_r((x^*)^n) \approx C_p(x^n, x^*)\varepsilon_r(x^*) = n \times 2\% = 0.02n$$

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们有几位有效数字.

$x_1^* = 1.102\,1$, $x_2^* = 0.031$, $x_3^* = 385.6$, $x_4^* = 56.430$, $x_5^* = 7 \times 1.0$

解 因为近似数的误差限不超过最后一位的半个单位,所以这些数均为有效数.而有效数的有效数字位数为第一位非零数到最后一位数字的位数,所以

x_1^* 有 5 位有效数字, x_2^* 有 2 位有效数字, x_3^* 有 4 位有效数字, x_4^* 有 5 位有效数字, x_5^* 有 2 位有效数字

4. 利用公式(2.3)(误差传播公式)计算下列各近似值的误差限:

(i) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$ (ii) $x_1^* x_2^* x_3^*$ (iii) $\dfrac{x_2^*}{x_4^*}$

其中 x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^* 均为第 3 题所给的数.

解 $\varepsilon(x_1^*) = 0.5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon(x_2^*) = 0.5 \times 10^{-3}$, $\varepsilon(x_3^*) = 0.5 \times 10^{-1}$,

$\varepsilon(x_4^*) = 0.5\times10^{-3}, \varepsilon(x_5^*) = 0.5\times10^{-1}$

(ⅰ) $\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*) = \varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*) =$

$0.5\times10^{-4}+0.5\times10^{-3}+0.5\times10^{-3} =$

1.05×10^{-3}

(ⅱ) $\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*) \approx |x_2^*x_3^*|\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*x_3^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_1^*x_2^*|\varepsilon(x_3^*) =$

$0.031\times385.6\times0.5\times10^{-4}+$

$1.1021\times385.6\times0.5\times10^{-3}+$

$1.1021\times0.031\times0.5\times10^{-1} = 0.21479$

(ⅲ) $\varepsilon\left(\dfrac{x_2^*}{x_4^*}\right) = \dfrac{|x_4^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_4^*)}{(x_4^*)^2} =$

$\dfrac{56.430\times0.5\times10^{-3}+0.031\times0.5\times10^{-3}}{56.430^2} \approx$

0.88654×10^{-5}

5. 计算球体积要使相对误差限为1%，问度量半径R时允许的相对误差限是多少？

解 计算球体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$近似值的条件数为

$$C_p(V^*) = \left|\frac{R^*V'(R^*)}{V(R^*)}\right| = \frac{R^*4\pi(R^*)^2}{\frac{4}{3}\pi(R^*)^3} = 3$$

应用误差传播公式有

$$\varepsilon_r(V^*) \approx C_p(V^*)\varepsilon_r(R^*) = 3\varepsilon_r(R^*)$$

令$3\varepsilon_r(R^*)=1\%$，可得度量半径R时允许的相对误差限为

$$\varepsilon_r(R^*) = \frac{1}{3}\times1\% \approx 0.0033$$

6. 设$Y_0=28$，按递推公式

$$Y_n = Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783},\quad n=1,2,\cdots$$

计算到Y_{100}。若取$\sqrt{783}\approx27.982$（5位有效数字），试问计算Y_{100}将有多大误差？

解 $Y_n = Y_{n-1}-\dfrac{1}{100}\sqrt{783} = \left(Y_{n-2}-\dfrac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\dfrac{1}{100}\sqrt{783} =$

$Y_{n-2}-\dfrac{2}{100}\sqrt{783} = \left(Y_{n-3}-\dfrac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\dfrac{2}{100}\sqrt{783} =$

$Y_{n-3}-\dfrac{3}{100}\sqrt{783} = \cdots = Y_0-\dfrac{n}{100}\sqrt{783}$

故有 $Y_{100}=Y_0-\dfrac{100}{100}\sqrt{783}$，即 $Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$， $Y_{100}^*=Y_0-27.982$

$$|e(Y_{100}^*)|=|Y_{100}^*-Y_{100}|=|\sqrt{783}-27.982|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}=\varepsilon(Y_{100}^*)$$

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}\approx27.982$）.

解 根据求根公式可知方程的根为

$$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$$

故

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx28+27.982=55.982$$

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{55.982}\approx0.017\,863$$

故根据误差传播公式可知两根近似值均满足题设要求.

8. 当 N 充分大时，怎样求 $\displaystyle\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$？

解 $\displaystyle\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan(N+1)-\arctan(N)\xlongequal{\text{def}}\alpha-\beta=$

$$\arctan(\tan(\alpha-\beta))=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=$$

$$\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}=\arctan\frac{1}{1+N+N^2}$$

9. 正方形的边长大约为 100 cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 1 cm²？

解 设正方形边长为 a，面积为 M，于是有

$$M=a^2,\quad M^*=(a^*)^2,\quad \varepsilon(M^*)=1,\quad a^*=100$$

应用误差传播公式有

$$\varepsilon(M^*)\approx2a^*\varepsilon(a^*)=200\varepsilon(a^*)$$

令 $$200\varepsilon(a^*)\leqslant1$$

得 $$\varepsilon(a^*)\leqslant0.5\times10^{-2}$$

故正方形边长误差限应不超过 0.005 cm，才能使其面积误差不超过 1 cm².

10. 设 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ±0.1 s 的误差，证明当 t 增加时，S 的绝对误差增加，而相对误差却减少.

证明 由题意知 $\varepsilon(t^*)=0.1,\quad S^*=\frac{1}{2}g(t^*)^2$

绝对误差限

$$\varepsilon(S^*)\dot{\approx}|gt^*|\varepsilon(t^*)=0.1gt^*$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(S^*)=\frac{\varepsilon(S^*)}{S^*}\approx\frac{0.1gt^*}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}=\frac{0.2}{t^*}$$

由于 t 增加时，其近似值 t^* 也增加，故可知题目结论正确.

11. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1,\quad n=1,2,\cdots$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$(三位有效数字)，计算到 y_{10} 时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

解 $y_n=10y_{n-1}-1=10(10y_{n-2}-1)-1=10^2y_{n-2}-[1+10^1]=$

$10^2(10y_{n-3}-1)-[1+10^1]=10^3y_{n-3}-[1+10^1+10^2]=$

$\cdots$

$=10^ny_0-\sum_{i=0}^{n-1}10^i=10^ny_0-\frac{1}{9}(10^n-1)=$

$10^n\left(\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9}$

故

$$y_{10}=10^{10}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},\quad y_{10}^*=10^{10}\left(1.41-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9}$$

绝对误差

$$|e(y_{10}^*)|=|y_{10}^*-y_{10}|=10^{10}(\sqrt{2}-1.41)\leqslant$$
$$10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^8$$

计算到 y_{10} 时误差为$\frac{1}{2}\times10^8$，故在绝对误差的意义下该方法不稳定.

12. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取$\sqrt{2}\approx1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\quad(3-2\sqrt{2})^3,\quad\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\quad99-70\sqrt{2}$$

解 $99-7\sqrt{2}$出现相近数相减，$(3-2\sqrt{2})^3$出现较相近的数相减，故二者不

可能得到最好的结果．$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ 与 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 均不出现相近数相减，但前者的乘法运算次数多，而除法运算次数相同，每次乘除法运算必然引入新的舍入误差，故用式 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算将得到最好的运算结果．

13. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$ 的值．若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算，求对数时误差有多大？

解 $f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$，设 $u=\sqrt{899}$，$y=f(30)$，则 $u^*=29.9833$，所以 $\varepsilon(u^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，故

$$\varepsilon(y^*)\approx\frac{1}{|30-u^*|}\varepsilon(u^*)=\frac{1}{0.016\,7}\varepsilon(u^*)\approx 0.003$$

改用等价公式 $\ln(x^2-\sqrt{x^2}-1)=-\ln(x+\sqrt{x^2}-1)$

则
$$f(30)=-\ln(30+\sqrt{899})$$

故
$$\varepsilon(y^*)=\left|-\frac{1}{30+u^*}\right|\varepsilon(u^*)=$$

$$\frac{1}{59.983\,3}\varepsilon(u^*)\approx 0.834\times 10^{-6}$$

第2章　插值法

1.1　重点、难点全析

1.1.1　插值问题

1. 定义

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，且已知在点 $a\leqslant x_0\leqslant x_1<\cdots<x_n\leqslant b$ 上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，若存在一简单函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i)=y_i, i=0, 1, \cdots, n \tag{2.1}$$

成立，则称 $P(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的一个插值函数.

点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点；$[a, b]$ 称为插值区间；$f(x)$ 为被插值函数；式(2.1)即为插值条件.

用 $P(\bar{x})$ 的值作为 $f(\bar{x})$ 的近似值，当 $\bar{x}$ 在节点形成的区间上时，称该方法为内插法；当 $\bar{x}$ 不在节点形成的区间上但在插值区间上时，则称该方法为外插法.

当插值函数 $P(x)$ 为多项式时，称 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的一个插值多项式，相应的插值法称为多项式插值.

插值余项 $R(x)\xlongequal{\text{def}}f(x)-P(x)$，插值余项又称为截断误差.

2. 插值多项式的存在唯一性定理

定理 2.1　满足插值条件(2.1)的不超过 n 次的插值多项式 $P(x)$ 是存在唯一的.

推论 2.2　若 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式，则它的关于 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的不超过 n 次的插值多项式 $P(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 恒等，即 $P(x)\equiv f(x)$.

3. 误差估计

(1) 导数型误差估计定理：

定理 2.3 设 $f(x) \in \mathbf{C}^{(n)}[a, b]$，$f^{(n+1)}(x)$ 在(a, b)内存在．插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

式中 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 关于互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的插值多项式，$w_{n+1}(x) \xlongequal{\text{def}} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，$\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x 和插值节点．

(2) 均差(也称差商)型误差估计定理：

定理 2.4 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上有定义，$P_n(x)$ 同定理 2.3 中的说明，则有插值余项

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] w_{n+1}(x)$$

(3) 等距节点的插值误差估计：当节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 等距分布时，即有 $x_k = x_0 + kh(h>0, k=0, 1, \cdots, n)$，作变换 $x = x_0 + th$，则导数型误差估计简化为

$$R_n(x_0+th) = f(x_0+th) - P_n(x_0+th) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

如果作变换 $x = x_n + th$，则误差估计简化为

$$R_n(x_n+th) = f(x_n+th) - P_n(x_n+th) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

1.1.2 插值多项式的构造方法

1. 依据插值条件建立线性方程组

设不超过 n 次的插值多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$，其系数是如下线性方程组的解：

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

2. Lagrange 插值方法

$$P_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x) \xlongequal{\text{def}} L_n(x) \qquad (2.2)$$

式中$\{l_k(x)\}_{k=0}^n$是关于节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$的Lagrange插值基函数，它仅与节点有关，与被插值函数无关，具体定义为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

插值公式(2.2)称为Lagrange插值多项式.

3. Newton插值方法

$$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\overset{\text{def}}{=\!=}N_n(x)\quad(2.3)$$

式中$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$为k阶差商，插值公式(2.3)称为Newton插值公式.

4. 等距节点插值公式

基于变换$x=x_0+th(h>0)$的插值公式(Newton向前插值公式)

$$N_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0\quad(2.4)$$

式中$\Delta^k f_0(k=1,2,\cdots,n)$为$k$阶向前差分.

基于变换$x=x_n+th(h>0)$的插值公式(Newton向后插值公式)

$$N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n\quad(2.5)$$

式中$\nabla^k f_n(k=1,2,\cdots,n)$为$k$阶向后差分.

1.1.3 基函数、差商和差分的性质

1. Lagrange插值基函数

(1) $l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}\quad(j,k=0,1,\cdots,n)$

(2) $l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)\equiv 1$

(3) $x_0^k l_0(x)+x_1^k l_1(x)+\cdots+x_n^k l_n(x)\equiv x^k\quad(k=0,1,\cdots,n)$

2. 均差

(1) 差商的函数值表示：