

好玩的数学

张景中 主编

吴鹤龄 编著

幻方及其他

——娱乐数学(第二版)
经典名题

幻方简单，人人都懂；

幻方不简单，难题重重。

本书带领你遨游神奇的幻方世界，去领略杨辉幻方、富兰克林八轮幻圆、印度魔莲花宝座……的无穷魅力。

好玩的数学
张景中主编

幻方及其他

——娱乐数学经典名题

(第二版)

吴鹤龄 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分为两部分，第一部分是百变幻方——娱乐数学第一名题，对古今中外在幻方研究中的发现和成果有极为详细的介绍；第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜、数学金字塔、素数、完美数、自守数、累进可除数，以及“数学黑洞”现象、棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、梵塔、重排九宫等问题。题材广泛、内容有趣，能够启迪思想、开阔视野，培养读者分析和解决问题的能力。

本书适于高中及高中以上文化程度的读者阅读。

图书在版编目 (CIP) 数据

幻方及其他：娱乐数学经典名题/吴鹤龄编著. —2版. —北京：科学出版社，2004 (2007.5重印)

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-014282-5

I. 幻… II. 吴… III. 数学-普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 088588 号

丛书策划：李 敏

责任编辑：李 敏 孔国平 王 建 / 责任校对：陈丽珠

责任印制：钱玉芬 / 整体设计：黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 11 月第 一 版 开本：610×1000 1/16

2004 年 10 月第 二 版 印张：27 1/4

2007 年 5 月第五次印刷 字数：300 000

印数：21 001—24 000

定价：33.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

《好玩的数学》编委会

主 编 张景中

成 员 (按汉语拼音字母排序)

陈仁政 孙荣恒 谈祥柏 王树禾

吴鹤龄 易南轩 郁祖权

总 序

2002年8月在北京举行国际数学家大会(ICM2002)期间,91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗?不同的人可能有不同的看法。

有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说,数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩。

其实,陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以,小孩子也可能觉得数学好玩。

当然,中学生或小学生能够体会到的数学好玩,和数学家所感受到的数学好玩,是有所不同的。好比象棋,刚入门的棋手觉得有趣,国手大师也觉得有趣,但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味,理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物,很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道:“但得此中味,勿为醒者传”,不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学,要接触数学,或多或少地能理解一

些数学。

早在 2000 多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i} = 1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4) / 5$$

$$b = 4(x + 4)/25$$

$$c = 16(x + 4)/125$$

$$d = 64(x + 4)/625$$

$$e = 256(x + 4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x + 4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x + 4) = 3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k = 1$ 时， $x = 3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897\cdots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

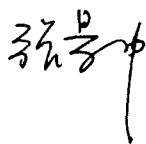
如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。



2004年9月9日

第二版修订本说明

趁着本书第四次重印的机会，我们对第二版作了较多的修订和补充。

第一部分的修订和补充主要有以下几处：

(1) 我们的祖先发明了世界上最早的幻方，历来都是依据《河图》、《洛书》的传说，加上《大戴礼记》中关于“二九四，七五三，六一八”这一九宫数字的记载，本书也不例外。我国数学史专家梁宗巨先生在其遗作《世界数学通史》中突破了这一框框。他根据1977年在安徽省阜阳县（现改为“阜阳市”）的两座西汉汝阴侯墓中出土的天文仪器“太乙九宫占盘”上的文字，认定其上有一个3阶幻方，从而不但使中国人发明了幻方成为有实物依据的确凿的史实，还使发明的年代比先前的估计提前了两个半世纪！这是幻方研究中一个十分重要而且意义深远的进展。因此我们加入了有关的内容。

(2) 对杨辉的“百子图”，过去很少有人重视。兰州交通大学的黄均迪先生向笔者指出，它其实蕴含着许多特点，富兰克林的神奇幻方很有可能是受杨辉百子图的启发而设计的。笔者赞赏黄均迪先生的发现和观点，增加的内容基本上是他的分析。

(3) 笔者在讨论杨辉的两个4阶幻方为什么一个被叫做“阳图”，另一个被叫做“阴图”时，提出了同

阶不同幻方有优劣、高低之分的观点，并通过分析认为阴图在匀称性和美观程度方面优于阳图。最近笔者发现了外国学者以美学观点讨论幻方的资料，虽然其角度和方法同笔者并不一样，但结论却十分相似，值得向读者作介绍。

(4) 在第六章中增加了一节“幻环”。对变形幻方，我们已经介绍了幻圆、幻星、幻矩形、魔蜂窝等较多品种，幻圆中有些其实也就是幻环，为什么还要增补它？原因很简单：2008年北京将举办第29届奥林匹克运动会。在作为奥运标志的五环上玩一些数学游戏，显然是大家所欢迎的，也是我们宣传奥运、服务奥运的一种表示。

(5) 在对泛对角线幻方的讨论中，原先只简单地提到“所有单偶数阶幻方不可能是泛对角线幻方”，但没有给出证明。笔者后来了解到，如何证明它曾经困扰了我国几代幻方研究者，许多人为此付出了巨大的心血和精力，直到21世纪初才有人破解了这一“难题”，并将论文发表在某著名高校的学报上。实际上，这个问题早在1919年就由普朗克解决了，我国学者的证明方法和普朗克的方法是一样的。为了从这件事中吸取教训，今后避免出现类似现象，我们对此加入了必要的介绍。

(6) 在5.4节中增加了奇数阶乘幻方的一般构造方法，在7.4节中补充介绍了一个魔三角。

第二部分主要有以下修订和补充：

(1) 在第十二章讨论累进可除数问题时，对如何

判断数是否可被 7 整除，原书介绍了里昂斯提出的方法。不久前谈祥柏先生来信指出，这个方法是不可靠的，他给出了一个反例。笔者对自己疏于检验，引用了错误的资料深感内疚。为了免得谬种流传，我们删去了这个方法而代之以谈先生推荐的另一个方法。

(2) 在第二十章中，我们介绍了美国 20 世纪 80 年代发明的一个游戏，要求将 4 个滑块上的 4 个箭头由初始布局的离心状态改变为向心状态。书中给出了一组解法。笔者认为这些解有进一步优化的可能，因此悬赏征求新的解法。经过 2 年的等待，终于出现了 2 位年轻的游戏高手：浙江大学学生沈超峰和安徽黄山学院学生张杰分别以比书上的解少 12 步和 31 步的优秀成绩赢得了奖金。现在我们高兴地把他们的解法介绍给大家。

(3) 在第九章素数奇趣中增加 2 节：素数分布的有趣图案以及高斯素数和艾森斯坦素数。

(4) 在第十三章数的自同构现象中也增加 2 节：六边形自守数和同心六边形自守数以及“蛋糕”自守数。

(5) 在第二十一章中，介绍了外国学者新近提出的利用维恩图生成格雷码的新方法。

此外，在素数研究方面，近年来进展很大，不断有新的、更大的梅森素数、回文素数、孪生素数等被挖掘出来。我们都根据最新资料对相关内容进行了更新，以体现与时俱进的精神。

本书出版以来，受到广大读者的厚爱。笔者不断

收到来自全国各省市（包括宝岛台湾）、各年龄段的许多读者的来信，他们或与笔者交流心得、讨论问题、交换资料，或向笔者提出批评建议，这使笔者至深感荷。本次的许多修订和补充就是根据或参考读者的意见进行的。借着修订本出版的机会，笔者向所有关心、爱护本书的读者表示深深的谢意。

吴鹤龄

2006 年年初