

S HUXUEZHEXUE YU  
SHUXUEJIAOYUZHAXUE

# 数学哲学与数学教育哲学

■ 郑毓信 著

凤凰出版传媒集团  
江苏教育出版社

# 数学哲学与数学教育哲学

郑毓信 著

凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

## 图书在版编目(CIP)数据

数学哲学与数学教育哲学/郑毓信著. —南京:江苏教育出版社,2007.3

ISBN 978-7-5343-8090-7

I. 数… II. 郑… III. ①数学哲学②数学:教育哲学  
IV. 01-0 01-02

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 040171 号

书 名	数学哲学与数学教育哲学
责任编辑	胡晋宾
出版发行	凤凰出版传媒集团 江苏教育出版社(南京市马家街31号 210009)
网 址	<a href="http://www.1088.com.cn">http://www.1088.com.cn</a>
集团网址	凤凰出版传媒网 <a href="http://www.ppm.cn">http://www.ppm.cn</a>
经 销	江苏省新华发行集团有限公司
照 排	南京理工出版信息技术有限公司
印 刷	盐城印刷总厂有限责任公司
厂 址	盐城市纯化路29号(邮编224001)
电 话	0515-8153008
开 本	850×1168 毫米 1/32
印 张	12.5
字 数	330 000
版 次	2007年4月第1版 2007年4月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5343-8090-7/G·7731
定 价	25.00 元
批发电话	025-83260760,83260768
邮购电话	025-85400774,8008289797
短信咨询	10602585420909
E-mail	<a href="mailto:jsep@vip.163.com">jsep@vip.163.com</a>
盗版举报	025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换  
提供盗版线索者给予重奖





郑毓信，男，1944年生，浙江镇海人。1965年毕业于江苏师范学院数学系，1981年硕士研究生毕业于南京大学哲学系。现为南京大学哲学系教授、博士生导师。长期从事数学哲学、科学哲学与数学教育的专门研究，已在上述领域出版了21部著作，并在国内外学术刊物上发表论文250多篇。1992年起享受政府特殊津贴。

引言:从数学哲学到数学教育哲学 .....	1
-----------------------	---

## 第一部分 数学哲学

<b>第一章 数学哲学的早期发展</b> .....	17
1.1 古希腊的数学哲学研究 .....	17
1.2 16~18 世纪的数学哲学研究 .....	32
<b>第二章 数学基础研究</b> .....	47
2.1 数学基础研究的兴起 .....	47
2.2 逻辑主义 .....	57
2.3 直觉主义 .....	70
2.4 形式主义 .....	89
2.5 关于数学基础研究的一般性评论 .....	106
<b>第三章 数学哲学的现代发展</b> .....	117
3.1 数学哲学中的革命 .....	117
3.2 模式论的数学哲学 .....	143

## 第二部分 数学教育哲学

<b>第四章 数学观与数学教育</b> .....	183
4.1 数学活动论及其教育涵义 .....	183

4.2	数学模式论及其教育涵义 .....	213
4.3	数学活动的形式与非形式的方面 .....	223
4.4	多元的、辩证的数学观 .....	237
<b>第五章</b>	<b>数学教育目标与数学教育的性质 .....</b>	<b>253</b>
5.1	数学教育目标的现代发展 .....	253
5.2	数学教育的性质 .....	282
<b>第六章</b>	<b>数学学习观与数学教学观 .....</b>	<b>321</b>
6.1	从行为主义到认知心理学 .....	321
6.2	建构主义的学习观与教学观 .....	347
6.3	学习理论的现代发展 .....	376

## 引言：

# 从数学哲学到数学教育哲学

作为数学哲学与数学教育哲学的系统论述，无疑应当首先论及这样一些问题：什么是数学哲学？什么又是数学哲学的主要作用或意义？同样地，什么是数学教育哲学？什么又是数学教育哲学的主要作用或意义？

作为全书的引言，我们将首先对这些问题作出简要回答。

### 一、数学哲学的历史发展

数学哲学，就其最为直接的意义而言，即是关于数学的哲学分析，也即是以数学作为直接研究对象的哲学理论。

从更为深入的层次看，我们又应特别强调这样一点：数学哲学有一个逐步成长、发展和演变的过程，特别是，数学哲学曾在很长时间内完全从属于一般哲学，而只是在 19 世纪后期才逐步获得了相对的独立性，从而形成了一门相对独立的哲学分支，而所说的独立性的主要标志就在于，这时的数学哲学已有了自己特殊的研究问题，而不再局限于一般哲学的研究问题。进而，又正是基于主要研究问题的转变或转移，我们并可具体地论及数学哲学历史发展的不同阶段。

由此可见，为了对“什么是数学哲学”这一问题作出更为具体的说明，我们就不应停留于“关于数学的哲学分析”这一简单论述，而应采取历史的、动态的观点，也即应当围绕数学哲学的历史发展对此作出更为具体的分析，特别是，即应清楚地指明数学哲学的不同发展阶段。

这事实上也就是本书第一部分所采取的基本线索。但是，应当明确的是，我们的重点并不在于历史本身的介绍，而是希望能以此为背景更好地理解数学哲学的性质，包括清楚地指明数学哲学的基本研究问

题,以及各个相关的理论主张或基本理念。

具体地说,数学哲学的历史发展可以大致分为如下3个时期。

### 1. 数学哲学的早期发展(1890年以前)

这一时期的主要特征在于:当时的数学哲学只是作为一般哲学的一个部分而存在。特别是,这时的数学哲学并没有自己特殊的研究问题,事实上也不存在专门的数学哲学家,因为,当时从事数学哲学研究的主要地就是一些一般意义上的哲学家,他们之所以重视数学的哲学分析主要地也就是由于一般哲学研究的需要,特别是,数学往往被看成是知识的典范,从而,哲学家们就希望能经由数学的分析引出哲学上的普遍结论。

对照哲学发展的不同历史时期,我们在此也可就古希腊与近代(16~18世纪)欧洲分别去论及数学哲学的早期发展。应当指明的是,正是在这一阶段人们开始接触到了数学对象的存在性问题(也可称为“数学的本体论问题”)与数学真理的性质问题(更为一般地说,即是“数学的认识论问题”)。由于这两者即是与所谓的“哲学基本问题”直接相对应的,因此,人们往往也就将其称为“数学哲学的基本问题”。

### 2. 数学基础研究(1890~1940年)

正是在这一阶段,数学哲学开始脱离一般哲学而获得了相对的独立性,特别是,当时的数学哲学研究主要地即是围绕所谓的“数学基础问题”展开的,以至在很长时期内出现了如下的特殊现象:“数学哲学”就被等同于“数学基础研究”。另外,相对于数学哲学的早期发展而言,这一时期中数学哲学研究的主体也发生了重要的变化:从事基础研究的主要力量已不再是一般的哲学家,而是数学家。进而,这又正是数学基础研究的一个重要特点,即是哲学性分析与数学性研究的较好结合。具体地说,从事数学基础研究的各个学者不仅明确地提出了自己在这问题上的基本主张,而且,作为后者的具体体现,他们又都发展起了相应的研究规划,并希望通过规划的实施能够证明自己主张的正确性。也正因为此,尽管数学基础问题最终并不能被看成获得了很好的解决,



但是相关的研究仍然产生了不少重要的成果,并直接导致了一些新的数学分支的诞生,如证明论等。

应当提及的是,数学基础研究常常被形容为“数学哲学研究的黄金时代”:由于基本立场的不同,在数学基础研究中形成了多个不同的学派,包括逻辑主义、直觉主义和形式主义等,并且在相互之间展开了激烈的争论和批评,从而事实上造就了一个百花齐放、百家争鸣、欣欣向荣的局面。

### 3. 数学哲学的现代发展(1940年以后)

由于数学基础问题始终没有得到彻底的解决,因此,在经历了上述的“黄金时代”以后,从1940年开始数学哲学的研究就一度出现了发展的停滞,而只是到了1965年以后才出现了“复兴”的迹象。

首先,对于基础研究的认真总结与反思是造成数学哲学现代复兴的一个重要原因,特别是,反思基础问题是否应当被看成数学哲学研究的主要问题。更为一般地说,这也就是指,什么应是数学哲学研究的适当定位,特别是,这究竟应是一种规范性的研究,还是一种描述性的工作。

其次,相对于基础研究而言,数学哲学的现代研究也表现出了更大的开放性,这就是说,除去内在的动力以外,外部的因素也对数学哲学的现代发展发挥了十分重要的促进作用,特别是,我们即应充分肯定科学哲学现代研究的重要影响。

最后,如果说数学基础研究主要地即是围绕基础问题展开的,那么,就现代的数学哲学研究而言,则可大致地区分出两种不同的研究范式或研究取向:一种研究范式突出强调了对于“数学哲学基本问题”的回归,从而也就可以被看成重新转向了一般的哲学研究;另一种范式则更加重视与实际数学活动的联系,即认为数学哲学应当成为实际数学工作者的“工作哲学”。

笔者赞同后一种研究范式,而这事实上也就是实际促成由数学哲学向数学教育哲学研究工作发展的主要原因。接下来,我们将主要从这一角度对数学哲学研究的意义作出具体分析。

## 二、数学哲学的意义

笼统地说,这正是笔者在这一问题上的一个基本立场:数学哲学既不应被看成某种高高在上、无可怀疑的普遍规范,也不应成为毫无现实意义的哲学遐想;恰恰相反,作为一种系统的理论分析,数学哲学应对实际的数学活动(包括数学研究与数学教育)发挥积极的促进作用。

为了清楚地说明数学哲学的这种促进作用,在此应当首先指明这样一点:尽管有不少数学家(包括某些著名的数学大师)都曾发表过对于自己学科的一些哲学思考,但这并不能被等同于数学哲学的系统理论,因为数学上的高明显然不等于哲学上的较高素养。恰恰相反,正如美国著名数学哲学家赫斯(R. Hersh)所指出的,实际数学家所面临的如下“哲学困境”即已清楚地表明努力提高自身哲学素养的重要性:“一个典型的‘正在工作的数学家’在工作日是个柏拉图主义者,在星期天则是形式主义者。换言之,当他搞数学时,他确信正在研究一种客观的实在,正在试图决定它的性质。但是,当被问及这些实在的哲学含义时,他能够用来防身的最简单遁词却是,他根本不相信数学的实在性。”更为一般地说,“今日数学界的大多数数学家,对他们的工作的性质和意义持两种矛盾的观点”。赫斯明确指出,针对上述的矛盾处境,“也许我们可以不去理睬它,然而,这无异于把自己变成一种未被审查过的哲学偏见的囚徒,它不招致某种实际的后果才怪呢”!<sup>[1]</sup>

进而,笔者以为,就实际的数学工作者而言,数学哲学的主要作用就是能够促进其对于自身数学观作出必要的反思,从而也就有利于由不自觉状态向自觉状态的重要转变,包括努力纠正已经存在的各种片面性或绝对化的观点以及观念的必要更新。

具体地说,这不能不说是这方面的一个基本事实,即实际数学工作者往往已经通过日常的工作逐步形成了较为固定的观念,后者反过来则又对他的研究(或教学活动)产生了十分重要的影响;但是,由于这主要地是一种潜移默化的行为,因此,数学工作者通常就没有深切地感到

[1] 赫斯. 复兴数学哲学的一些建议[J]. 数学译林, 1981(2): 52-53.

对自己的数学观念作出认真反思的必要性,更没有能作出足够的努力以纠正相应的错误或片面观念并实现观念的必要更新。

为了清楚地说明问题,在此可以举出著名数学史学家克朗(M. Crowe)的实例——尽管其主要是一位数学史学家而非数学家,但由于克朗曾对自身数学观念的演变过程作了十分详尽的描述,我们就仍然可以由此获得重要的启示。

克朗指出,当他于20世纪60年代开始研究工作时,他对数学(尽管并非完全自觉地)具有以下6种观念<sup>[1]</sup>:

① 由于……数学具有演绎的结构,……数学的发展在很大程度上不同于物理科学。

② ……判定数学对象的惟一标准是其能否由在先的假设演绎地推出。

③ ……数学一定是积累性的。

④ ……尽管科学可能受到形而上学的考虑的影响,对数学来说却并非是这样的情况。

⑤ ……数学的严格性、证明和确定性是超越时间的。一个定理一旦获得了证明,就永远是真的。

⑥ 数学中不可能有革命发生。

其后,通过较为系统的反思,克朗又于1985年提出了关于数学的如下10个观念——对此非但克朗本人曾经一度持有,而且他确信对于很多数学家来说也是同样的情况:

① 数学的方法是演绎。

② 数学能提供可靠的知识。

③ 数学是积累的。

④ 数学的命题是永远正确的。

⑤ 数学的结构精确地反映了它的历史。

⑥ 数学的证明是没有问题的。

[1] D. Gillies. *Revolutions in Mathematics*[M]. Clarendon Press, 1992:308.

⑦ 严格性的标准不会变化。

⑧ 数学的方法论与科学的方法论有很大的不同。

⑨ 对于数学的猜想可以作出确定性的判断。

⑩ 在对数学中所应用的方法论作出具体论述时,经验论、形式主义、直觉主义和柏拉图主义是仅有的可能选择。

容易看出,上述的10个观念与先前所提及的6个观念是十分一致的;然而,与刚刚开始研究工作时的情况不同,在经过了20多年以后,这时的克朗已经清楚地认识到了所说的10个观念都是有问题的:它们“不仅是完全错误的,而且还会成为数学史研究的障碍”<sup>[1]</sup>。

当然,对于克朗的上述结论读者应当作出自己的独立分析。但是,在笔者看来,这却正是克朗的这一实例所给予我们的主要启示——数学工作者应对自己的数学观作出更为自觉的总结与反思。值得指出的是,后者事实上也就是克朗作出上述回忆的一个主要目的:“通过对我的观念变化过程作出详尽的回顾,我希望……能促进实际工作者作出自己的反思。”<sup>[2]</sup>另外,就自己的观念转变过程而言,克朗又明确指出:“80年代初期出版的3部著作对我当时的思想演变过程有很大的影响,它们是M. 克莱因的《数学:确定性的丧失》(1980)、戴维斯(P. Davis)与赫斯的《数学经验》<sup>[3]</sup>(1981)和基切尔(P. Kitcher)的《数学知识的性质》(1983)。……它们对我的思想起到了指导的作用。”<sup>[4]</sup>从而,这也就十分清楚地表明了数学哲学对于实际数学工作者的积极意义。

其次,除去数学研究工作者以外,我们又应突出强调数学哲学对于数学教育的重要作用。

具体地说,正如人们现已普遍认识到了的,各种层次上的数学教师

---

[1] W. Aspray, P. Kitcher. History and Philosophy of Modern Mathematics[M]. University of Minnesota Press, 1988;260.

[2] 同[1].

[3] 这两部著作已分别由湖南科技出版社(1997年)和江苏教育出版社(1991年)翻译出版.

[4] D. Gillies. Revolutions in Mathematics[M]. Clarendon Press, 1992;311.

都是在一定观念(特别是数学观)的指导或影响下从事自己的教学工作的;另外,更为重要的是,又正是通过数学学习年青一代逐步形成了自己的数学观,而这则直接关系到数学的未来发展。

在此,我们可以通过与伦理教育的对比进一步指明数学哲学对于数学教育的特殊重要性。

具体地说,这是一个明显的事实,即任何一个正常人的行为都处于一定的道德观念的指导或影响之下,从而,在这样的意义上,我们就应当明确肯定伦理道德的重要性。然而,由于成年人通常已经形成了较为稳定的道德观念,因此,对其而言道德教育所能发挥的就主要是这样一种作用,即能促进人们对于自己的道德观念作出自觉反思,从而也就有可能主动地去克服或纠正其中的不道德成分;与此相对照,道德教育对于青少年来说则有更大的重要性,因为后者尚未形成稳定的道德观念,从而也就具有更大的可塑性,而一旦形成则会对其整个人生产生十分重大的影响,这从总体上说也就直接关系到整个社会的未来发展。

应当指明,上述的比喻事实上也就清楚地表明了这样一点:正如教师的日常言行往往会对学生道德观念的形成产生十分重要的影响(这就是通常所说的“身教重于言教”)一样,学生主要地也就是通过学校的数学学习(特别是在教师的直接影响之下)逐步形成了自己的数学观念,后者并主要地是一个潜移默化的过程。例如,主要地也就是在这样的意义上,著名数学家、数学教育家波利亚(G. Polya)写道:“有一条绝对无误的教学法——假如教师厌烦他的课题,那么,整个班级也将毫无例外地厌烦它。”<sup>[1]</sup>显然,就我们目前的论题而言,这也就更为清楚地表明了数学哲学对于数学教师的特殊重要性。

最后,还应指明的是,以上关于数学哲学对于数学教育特殊重要性的分析事实上也就表明了本书何以同时包括数学哲学和数学教育哲学这样两个主题;进而,这也可以被看成对于笔者在过去20年中所走过

---

[1] [美]G. 波利亚. 数学的发现(第二卷)[M]. 呼和浩特:内蒙古人民出版社, 1981:174.

的学术道路的一个简要概括:从数学哲学到数学教育哲学。

### 三、数学教育哲学的内容和意义

1. 以上的分析显然已从一个角度指明了数学教育哲学的重要性:这即可被看成充分发挥数学哲学对于实际数学活动(特别是数学教育)促进作用的一个重要环节或实际途径。

另外,应当指明的是,对于数学教育哲学的普遍关注事实上也是数学教育现代发展的一个重要特点。对此,由以下两个事例就可清楚地看出:

第一,这是发生在中国台湾师范大学林福来教授身上的一个真实故事:一些年前他带领一批数学教育工作者去访问著名的荷兰弗赖登塔尔数学教育研究所,双方进行了自由交谈。令林福来教授十分吃惊的是,弗赖登塔尔数学教育研究所时任所长德朗根(J. de Lange)首先提出的竟然是这样一个问题:“什么是台湾数学教育的哲学基础?或者说,台湾的数学教育建立在什么样的哲学思想之上?”<sup>[1]</sup>

第二,作为国际程序委员会的一名委员,笔者曾实际参与了为2004年于丹麦哥本哈根召开的第10届国际数学教育大会(ICME-10)确定各项议程的工作。具体地说,国际程序委员会第一次会议所确定的大会议程并没有包括“数学教育哲学”这样一个主题。但是,在会后征求意见时,有不少学者提议应将这一主题包括在内,这一建议后来也为程序委员会所采纳,这就是后来的DG4(Discussion Group 4)。

显然,以上的事例清楚地表明了国际数学教育界对于数学教育哲学的普遍关注。但是,我们在此显然又应提出这样一个思考:由于就国际范围而言数学教育哲学是一个较新的研究领域,因此,我们就应深入地去思考:数学教育哲学的兴起究竟是一种纯粹的时髦,还是有其一定

---

[1] 据林福来教授介绍,他当时的回答是:“我们的哲学就是没有哲学!”就当时的场合而言,这或许不失为一个较好的遁词;但是,我们究竟又能在这种坦率的“无知”背后躲藏多久呢?!毋宁说,这即十分清楚地表明了数学教育哲学对于数学教育的特殊重要性。



的必然性?

笔者以为,由以下的事实我们即可清楚地看出数学教育哲学在现代的兴起并非偶然,而是有其一定的必然性,或者说,这事实上也就是从不同侧面更为清楚地表明了数学教育哲学对于实际数学教育活动的积极意义:

第一,每个数学教师,无论其自觉与否,总是在一定观念的指导下或影响下从事自己的教学工作的。例如,法国著名数学家托姆(R. Thom)就曾突出地强调了数学观对于数学教学的特殊重要性:“事实上,无论有着怎样的主观愿望,所有的数学教学法,……都依赖于数学哲学。”类似地,赫斯也曾指出,“主要的问题并不在于什么是最好的教学法,而是数学究竟是什么。……如果我们不正视关于数学性质的问题,关于教学……的争论就不可能得到解决。”<sup>[1]</sup>

第二,如果说观念对于数学教师教学工作的影响主要是一种不自觉的行为,那么,由数学教育理论与数学教育改革我们就可更为清楚地看到数学教育哲学对于数学教育的特殊重要性,因为,任何一个深刻的数学教育理论都必然地反映出一定的数学观,任何一次重大的数学教育改革也都必然地依赖于哲学上的深入分析与思考。

我们在此并可特别提及这样一个事实:自20世纪60年代以来,在国际范围内已有过多次重要的数学教育改革浪潮,包括20世纪60年代的“新数运动”,20世纪80年代的“问题解决”(就美国而言,在20世纪70年代并有所谓的“回到基础”),以及20世纪90年代以后的“建构主义”与“大众数学”。尽管这些改革运动的基本思想不尽相同,但所有这些运动又都不能说取得了很大的成功,毋宁说,对于数学教育的现状人们始终存在普遍的不满情绪。从而,作为必要的总结,我们也就应当从理论高度对数学教育作出认真的反思:数学教育何去何从?由此,数学教育哲学的兴起就不可避免了,因为,归根结底,哲学就是一门反思的学问,而这事实上也就应当被看成数学教育哲学的一个基本定位,即

---

[1] P. Ernest. The Philosophy of Mathematics Education[M]. The Falmer Press, 1991: xiii.

应从理论高度对数学教育改革的各个基本理念与实践作出必要的分析和审视。<sup>[1]</sup>

最后,还应强调的是,就数学教育系统理论的建立而言,数学教育哲学又可被看成提供了必要的理论基础。这也就是说,如果说“数学教育学”与其他一些相关学科的联系可以用“构成数学教育学所依据的理论基础有唯物辩证法、数学、教育学、心理学、逻辑学、计算机科学等”来表述的话(图 1),那么,数学教育哲学就可被看成为“数学教育学”提供了相对独立的理论基础(图 2),也即是在建立数学教育的系统理论这一方面上迈出了重要的一步。

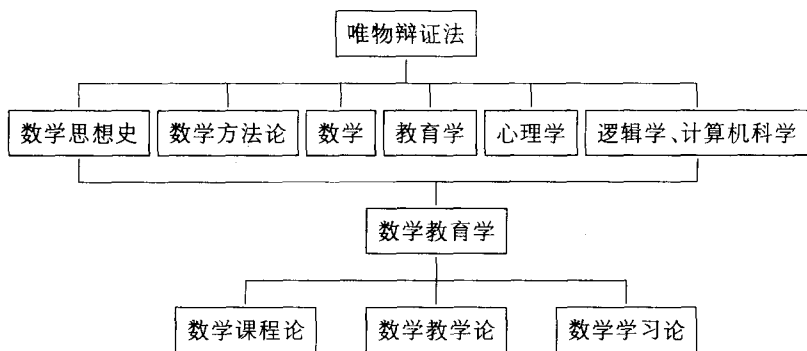


图 1

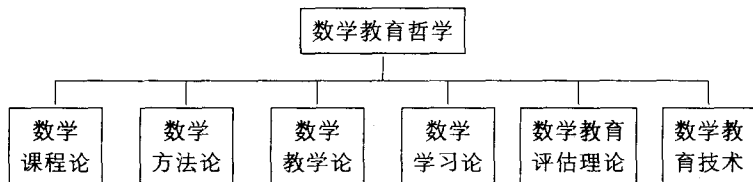


图 2

[1] 这也正是笔者自 2000 年我国开展新一轮数学教育改革以来所采取的一个基本立场,详见另著《数学教育:从理论到实践》(上海教育出版社 2001 年出版)或《数学教育:动态与审思》(上海教育出版社 2005 年出版)。

2. 以上的分析显然表明：为了充分发挥对于实际数学教育活动的促进作用，数学教育哲学与数学哲学相比不仅应当具有更大的针对性，而且也应包括更多的内容。因为，数学教育显然不仅涉及到了数学观，而且也与数学教育观和数学教学观有着直接的联系。

具体地说，笔者以为，数学教育哲学主要地即可被看成围绕以下3个问题展开的：

第一，什么是数学？这也就是所谓的“数学观”。

容易看出，就这一内容而言，数学教育哲学与数学哲学有着较大的交叉；但是，与后者相比，数学教育哲学应当说又有着不同的重点，特别是，我们将更加重视数学观现代演变的教育涵义，包括动态的、模式论的数学观，以及数学的多元性与辩证性质。

第二，为什么要进行数学教育？这就是所谓的“数学教育观”。

具体地说，在这一部分中，我们将首先对数学教育目标的现代演变作出论述，这就是指，数学教育应由唯一地强调基础知识与基本技能逐步转变到更为重视帮助学生学会数学地思维乃至学生数学素养的培养上来。其次，我们也将从内、外两个方面对数学教育的性质作出具体分析。

第三，应当怎样去进行数学教学？与数学教学方法的具体研究不同，我们在此主要是从认识论的高度揭示数学学习与数学教学活动的本质，这也就是所谓的“数学教学观”。

具体地说，除去对于建构主义的学习观与教学观的具体分析以外，在这一部分中我们还将对学习理论的现代发展作出概括，后者事实上也可被看成为深入理解学习活动的本质提供了必要的基础。

以上3个方面就是本书第二部分的主要内容。应当强调的是，由于课程改革正是我国数学教育界在当前的最大现实，因此，在这一部分中我们也就将注意联系数学教育的现实情况去进行分析，努力做到理论联系实际。

#### 四、本书的基本定位

除去部分论题的直接交叉以外，研究工作的哲学性质也可被看成