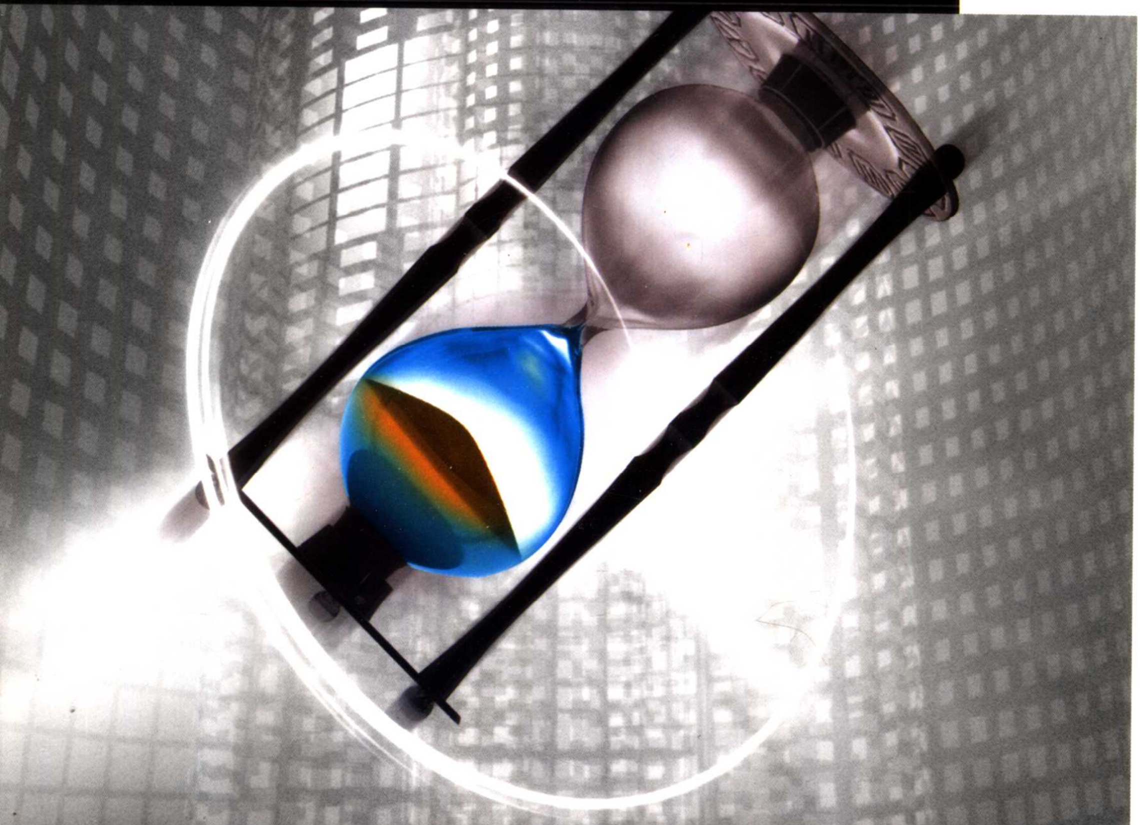
胡学刚　穆春来　等编著

数学物理方法



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

配电

数学物理方法

胡学刚　穆春来
郑继明　向昭银　等编著

机　械　工　业　出　版　社

本书根据目前高等院校理工科各专业的教学实际编写而成．全书共分8章，第1章介绍典型数学物理方程及其定解条件的推导，数学物理方程的基本概念和分类，第2～5章分别介绍数学物理方程的分离变量法、积分变换法、行波法、Greeen函数法等常用求解方法；第6、7两章分别讨论Bessel函数和Legendre多项式的基本性质及其在求解数学物理方程中的应用；第8章简要介绍变分法的基本知识和变分问题的求解方法．全书概念清楚、论证适度，注重方法与应用，理论联系实际，适当与现代数学知识接轨，深入浅出，便于教学．

本书可作为高等院校理工科各专业的本科生及工科相关专业的研究生教材或参考书，也可供工程技术人员、数学和物理工作者参考．

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法/胡学刚，穆春来等编著．—北京：机械工业出版社，2007．8

ISBN 978－7－111－21979－8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①胡…②穆…　Ⅲ．数学物理方法－高等学校－教材　Ⅳ．O411．1

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第113743号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：田淑华　赵　慧
责任编辑：田淑华　版式设计：霍永明　责任校对：姚培新
封面设计：刘吉维　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷
2007年9月第1版·第1次印刷
184mm×260mm·13印张·318千字
0 001—4 000册
标准书号：ISBN 978－7－111－21979－8
定价：20．00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379739

前　言

数学物理方法是高等院校工科各专业的一门重要的专业基础课程。它的主要内容包括复变函数、数学物理方程与特殊函数. 在教学实践中，许多院校单独开设复变函数课程，而数学物理方法课程主要讲授数学物理方程与特殊函数等内容. 该课程通过对一些具有典型意义的模型方程的深入剖析，阐明和介绍偏微分方程的基本理论、解题的典型技巧以及它们的物理背景. 直接目标是帮助学生掌握必要的数学知识和工具，为后续专业基础课和专业课的学习作准备. 长远的目标是训练学生的数学思维及运用数学工具解决实际问题的能力. 当然更高的要求是开拓创新思想的培养.

随着高校扩招，我国高等教育从“精英教育”向“大众化教育”转型，学生的数学、物理等素质都与以前不同. 目前数学物理方法类教材为数不少，有的教材虽内容丰富，理论性强，但知识引入，内容讲解、例题和习题都过于繁琐，不仅要求学生有很好的数学基础，教学上也需要较多的时数，使很多人对这门课望而生畏，既不利于教，也不利于学. 这类教材尤其不适合工科少学时的教学特点. 有的教材内容虽精练，篇幅适当，但起点太高，要求学生具有泛函分析等方面的知识，这些要求对工科和部分理科专业学生是困难的. 有的教材结构严谨，内容经典，但又似乎过于简略，把许多虽是基本的但是重要的内容都省略了，学生所学与学科近现代理论相差甚远，既不便于学生自学，也不利于学生的进一步学习.

我们在近几年的教学实验过程中，结合前辈教材的优点，组织编写了这本适合工科和部分理科专业特点的《数学物理方法》教材. 编写中做到概念介绍要清楚，论证适度，篇幅适当，注重方法与应用，理论联系实际，适当与现代数学知识接轨，深入浅出，便于教学. 书中的重要结论以定理或命题的形式准确叙述，便于复习和记忆. 精心选择例题和习题，例题强调典型性和覆盖性；习题密切联系课程内容，难度适当，并在书后附有部分习题的参考答案.

在教材具体内容的安排上，我们做了精心的设计. 第 1 章讲解数学物理方程的基本知识. 首先，数学物理问题离不开物理背景，所以模型的推导是必要的. 在模型的推导中，我们不仅注意三类典型模型和定解条件的导出，也介绍一般 n 维空间上导出相应的定解问题，有利于与现代数学知识的接轨. 其次，为保持教材的系统性和完整性，利于后面内容的学习，我们详细讨论了偏微分方程的基本概念和分类，并介绍了叠加原理和齐次化原理. 第 2 ~ 5 章讨论求解三种典型偏微分方程的常用解法，其中包括分离变量法、积分变换法、行波法和 Green 函数法. 我们介绍了高维高阶方程的分离变量法，利于扩大学生的知识面. 积分变换法的重点是 Fourier 变换和 Laplace 变换，给出了这两种变换的基本概念和性质，并讲解了它们在求解数学物理方程中的应用. “小波分析”是近年来发展起来的一个比较新的理论课题和应用数学方法，本书从积分变换的角度，对

小波变换作了一个入门性的介绍，目的只是希望有读者萌发了解与钻研小波分析的兴趣. 行波法的讨论中不仅给出了波动方程定解问题的 d'Alembert 公式和 Kirchhoff 公式，同时讨论了一维非齐次波动方程的初值问题的求解. 学生普遍感到 Green 函数法难于掌握，原因在于不熟悉积分学中的几个重要公式，我们在教材处理上首先介绍 n 维空间上的 Gauss 公式、分部积分公式和 Green 公式，为学习后面的相关理论扫清障碍. 第 6，7 两章为“特殊函数”部分，主要是讲解 Bessel 函数和 Legendre 多项式，其中包括：如何从求解数学物理方程引出 Bessel 方程和 Legendre 方程以及两个方程通解的表达式；Bessel 函数和 Legendre 多项式的性质以及如何利用这两种特殊函数解决相关的实际问题. 第 8 章介绍了变分法的基本知识，把求函数极值的思想推广到求泛函极值中来，把变分问题转换为偏微分方程的边值问题. 同时也简要介绍了变分问题的直接解法.

根据我们的经验，完成本书的教学内容大约需要 32 ~ 48 学时. 如果教学时数为 32 学时，可以选择学习第 1，2，3，4，6，7 章，其中的部分内容可以略讲或不讲. 如果教学时数为 48 学时，除了书中标以 * 号的内容外，其余内容基本可以讲授完. 为了提高学生的解题能力，书中配有较多的例题供教师选择，可留一部分作为习题的补充让学生自己完成. 对于书中用小字号排版的内容，可留给学生自学使用. 为方便教学，我们免费为上课教师提供电子课件，需要者请与机械工业出版社联系. 社网 www.cmpbook.com.

本书由重庆邮电大学、四川大学、电子科技大学、四川师范大学等高校的相关教师联合编著而成。全书由胡学刚统稿，参加编著和审改的老师还有：穆春来、郑继明、向昭银、李玲、邓霞、李玉环等.

本书的部分内容参考了国内外有关文献，详见本书的参考文献。在本书的撰写过程中，得到了重庆邮电大学田有先教授，夏世全教授的热情鼓励和大力支持，蒋伟、孙慧芬、王顺等研究生逐字逐句阅读了本书的全部内容，并帮助验证了部分例题和习题，此外，本书的编著还获得了“重庆邮电大学重点教材项目”的资助，在此一并致谢.

由于编者学识有限，不妥与错误之处在所难免，诚望同行与读者批评指证.

作　者

2007 年 4 月

目　　录

第 1 章　数学物理方程的一些基本知识

用数学方法研究自然科学和工程技术中的实际问题时，首先要建立合理的数学模型，从数量上刻画各物理量之间的关系. 在很多情况下，这种模型是一个含有未知函数偏导数的方程. 这些反映物理及工程过程规律的方程就是所谓的数学物理方程.

本章首先通过微元法和物理上的一些普遍规律，从力学、热学中引入三类典型方程及其定解条件，然后介绍偏微分方程的一些基本概念、二阶偏微分方程的分类及化简，最后讨论叠加原理和齐次化原理.

1.1　三类典型方程的推导

1.1.1　弦振动方程与定解条件

18 世纪 d'Alembert 等人首先讨论了如下的弹性弦的振动问题.

设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，而后以某种方法激发，使弦在铅直平面内作微小振动. 求弦上各点的运动规律.

将实际问题归结为数学模型时，必须作一些理想化的假设，以便抓住问题最本质的特征. 在考察弦振动问题时的基本假设为：

（1）均匀细弦理解为弦的直径与弦的长度相比可以忽略，以致可以将弦视为一条曲线，它的线密度 ρ 为常数.

（2）弦在一平面内作微小横振动，即弦的位置始终在一平面内的一条直线段附近，且弦振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小.

（3）柔软的弦可以假设为弦在形变时不抵抗弯曲，弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致，而弦的伸长形变与张力的关系服从 Hooke 定律.

我们取弦的平衡位置为 x 轴，以弦的一个端点为原点建立如图 1-1 所示的坐标系. 设 $u(x, t)$ 是坐标为 x 的弦上一点在 t 时刻的（横向）位移，在弦上任取一小段 $[x, x+\Delta x]$，这一段的弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \mathrm{d}x.$$

由假设 2 可知，$\partial u/\partial x$ 很小，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 与 1 相比可以忽略不计，从而

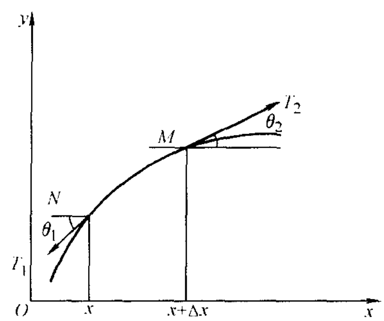


图　1-1

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x.$$

弧$\overset{\frown}{NM}$在 x 轴方向的受力的总和为 $T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_1$. 由于弦只作横向振动，因此 $T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_1 = 0$.

由于弦作微小振动，根据假设 2 知 θ_1，θ_2 都很小，从而 $\cos\theta_1 \approx 1$，$\cos\theta_2 \approx 1$，因此可以近似地得到 $T_1 = T_2 = T$.

弧$\overset{\frown}{NM}$在 u 轴方向的受力总和为 $T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 - \rho g\Delta x$. 注意到 θ_1，θ_2 都很小，因此

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x},$$

$$\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x}.$$

且弧$\overset{\frown}{NM}$在 u 方向 t 时刻的加速度为$\partial^2 u(x,\ t)/\partial t^2$，弧的质量为$\rho\Delta x$，根据 Newton 第二定律，有

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 - \rho g\Delta x \approx \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2},$$

即

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right] - \rho g\Delta x \approx \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2},$$

也就是，

$$T\frac{u_x(x+\Delta x,\ t) - u_x(x,\ t)}{\Delta x} - \rho g \approx \rho \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，取极限，得

$$T\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} - \rho g = \rho \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2},$$

即

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来，张力较大时弦振动速度变化较快，即$\partial^2 u/\partial t^2$ 要比 g 大得多，所以又可以把 g 略去. 经过这样逐步略去一些次要的量，抓住主要的量. 最后得到 $u(x,\ t)$应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1\text{-}1)$$

这里 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$. 式(1-1)称为一维波动方程.

如果弦还在横向(位移 u 的方向)受到外力的作用. 设在时刻 t 弦上 x 点处的外力密

度为$F(x, t)$. 仿照前面的推导，有

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}=a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}+f(x, t), \tag{1-2}$$

这里$f=\dfrac{F}{\rho}$.

方程(1-2)与(1-1)的差别在于方程(1-2)的右端多了一个与未知函数$u(x, t)$无关的项，这个项称为自由项. 我们把含有自由项的方程称为非齐次方程. 自由项恒等于0的方程称为齐次方程. (1-1)为齐次一维波动方程，式(1-2)为非齐次一维波动方程.

方程(1-1)或(1-2)描述了弦振动的一般规律，但是弦振动的具体情况还与弦两端的约束情况以及弦上各点在初始时刻的位移和速度有关，即还需附加边界条件和初始条件.

设弦在开始时刻于点x的位移为$\varphi(x)$，初速度为$\psi(x)$. 即

$$u(x, 0)=\varphi(x), u_t(x, 0)=\psi(x), x\in[0, l], \tag{1-3}$$

式中，$\varphi(x)$，$\psi(x)$为已知函数.

我们称式(1-3)为$u(x, t)$应满足的初始条件.

注 1.1.1 一般地，一个方程如果其关于时间的导数的最高阶数为n，则对应的初始条件需要给出未知函数关于时间从0阶直到$n-1$阶导数的所有初始时刻的值.

为了确定弦的运动还需给出边界条件. 最简单的边界条件为已知端点的位移规律，即

$$u(0, t)=g_1(t), u(l, t)=g_2(t) \quad (t\geqslant 0), \tag{1-4}$$

式中$g_1(t)$，$g_2(t)$为两个已知函数.

这种边界条件被称为**Dirichlet 边界条件**(也称为**第一类边值条件**). 特别地，如果在整个振动过程中弦的两端保持固定，即$g_1(t)$，$g_2(t)$都恒为0时，称为第一类齐次边值条件. 也就是

$$u(0, t)=u(l, t)=0 \quad (t\geqslant 0). \tag{1-5}$$

在前面所讨论的弦振动问题中，若弦的一端(如$x=0$)在u轴方向上自由滑动，且不受垂直方向的外力. 这种边界称为自由边界. 由于在$x=0$处的张力的分量为$T\dfrac{\partial u}{\partial x}$，于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \quad (t\geqslant 0). \tag{1-6}$$

若边界张力沿u方向的分量是关于时间t的一个已知函数$w(t)$，则相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=w(t) \quad (t\geqslant 0). \tag{1-7}$$

式(1-6)，式(1-7)的边界条件称为 Neumann **边界条件**，也称为**第二类边界条件**.

若弦的一端束缚在与Ox轴垂直的弹簧上，弹簧的弹性系数为k. u在$x=l$的值表示该弹性支承在该点的伸长，如图1-2所示.

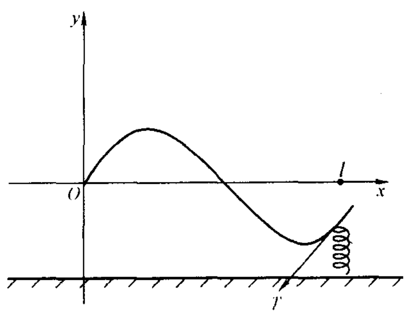


图 1-2

弦在支承拉力的垂直方向的分量为 $-T\frac{\partial u}{\partial x}$. 由 Hooke 定律,有

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=ku\bigg|_{x=l}.$$

因此在弹性支承的情况下, 边界条件归结为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right)\bigg|_{x=l}=0 \qquad (t\geqslant 0), \tag{1-8}$$

式中, $\alpha=\frac{k}{T}$为已知函数.

在数学中还可以考虑更普遍的边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right)\bigg|_{x=l}=h(t) \quad (t\geqslant 0), \tag{1-9}$$

式中, $h(t)$为已知函数. 式(1-8)、式(1-9)称为**第三类边界条件**, 也称 Robin **边界条件**.

边界条件和初始条件统称为**定解条件**, 其中式(1-4)、(1-7)、(1-9)称为**非齐次边界条件**. 式(1-5)、(1-6)、(1-8)称为**齐次边界条件**.

注 1.1.2 弹性弦有一个重要的特点就是充分柔软, 只抗伸长, 不抗弯曲. 当它发生形变时, 反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计. 如果研究的对象没有这样的特点, 力学上就把它们改称为梁和板. 梁和板的振动方程与弦的不同, 一般会出现未知函数的四阶微商.

注 1.1.3 1752 年, d'Alembert 首先建立了弦振动方程(1-1). 1759 年, Euler 研究弹性薄膜的微小横振动(平面波), 建立了如下的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,\ y,\ t). \tag{1-10}$$

我们称式(1-10)为二维波动方程. 1762 年, Bernoulli 考察声波在空间中的传播时, 引出了如下的三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t). \tag{1-11}$$

通常, 记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 称 $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$为 Laplace 算子, 于是方程(1-11)可以简写为

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f.$$

在数学上, 我们常讨论如下的 n 维波动方程

$$u_{tt}(x,\ t)=a^2\Delta u(x,\ t)+f(x,\ t), \qquad x\in\Omega,\ t\in(0,\ \infty), \tag{1-12}$$

式中, Ω 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界区域, $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\Delta u(x,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

事实上，我们可以通过如下的方式得到方程(1-12)．设 $u(x, t)$ 表示空间区域 Ω 中任一点 x 在时刻 t 沿某个方向的位移，D 为 Ω 中的任意一个微小区域，∂D 为 D 的边界曲面，不妨设 Ω 的密度为 1．任意一点 x 在 D 内的加速度为 $\partial^2 u/\partial t^2$，从而受力之和为

$$\int_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x.$$

又因为 D 通过边界受到的外力为 $-\int_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$．由散度定理得

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_D \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}x.$$

这里，n 是 ∂D 的单位外法向量，$\mathrm{d}S$ 是 ∂D 的面积元素，$\mathrm{d}x$ 表示体积元素 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$．根据 Newton 第二定律，有

$$\int_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x = -\int_D \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}x.$$

利用函数的连续性及区域 D 的任意性，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\mathrm{div}\boldsymbol{F}.$$

对于弹性体来说，$\boldsymbol{F}$ 是关于位移的梯度函数，即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\nabla u).$$

这里，$\nabla u = (u_{x1}, u_{x2}, \cdots, u_{xn})$．由于是微小振动，因此 $\boldsymbol{F}(\nabla u) \approx -a\nabla u$，从而 $u_{tt} = a\mathrm{div}\,(\nabla u) = a\Delta u$，这就得到了 n 维齐次波动方程

$$u_{tt} = a\Delta u.$$

例 1.1.1 长为 L 的弦在 $x=0$ 端固定，另一端 $x=L$ 自由，且在初始时刻 $t=0$ 时处于水平，位移速度为 $x(L-x)$，作微小横振动．试写出弦的运动规律和相应的附加条件．

解 取弦的水平位置为 x 轴，$x=0$ 为原点．设弦在 x 处 t 时刻的横向位移为 $u(x, t)$．因为弦作自由(无外力)横振动，所以弦的运动规律可用下面的齐次波动方程来刻画，即

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (0<x<L,\ t>0).$$

边界条件：因为弦一端 $x=0$ 固定，所以 $u(0, t)=0$，而另一端 $x=L$ 自由，自由意味着张力为零，所以从“自由”这个条件推出 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0$，即 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0$，这里 $t\geqslant 0$．

初始条件：由题知，当 $t=0$ 时，弦处于水平状态，即 $u(x, 0)=0$，位移速度 $x(L-x)$，即 $u_t(x, 0)=x(L-x)$，这里 $0\leqslant x\leqslant L$．

例 1.1.2 试求理想高频传输线上的电压和电流的变化规律．

解 设 $I(x, t)$ 和 $V(x, t)$ 分别表示 t 时刻传输线 x 处的电流强度和两线之间的电压．用单位传输线的串联电阻 R、串联电感 L、分路电容 C 和分路电导 G 来表示其介质特性．

对于理想情况，可视传输线上无损耗，即 $R=G=0$，如图 1-3 所示. 在该传输线上任取一段微元 $\mathrm{d}x$，此时，由于在该段电感上的感生电动势为 $L\mathrm{d}x\dfrac{\partial I}{\partial t}$，而电容充放电的电流为 $C\mathrm{d}x\dfrac{\partial V}{\partial t}$. 根据 Kirchhoff 基尔霍夫第一定律：会合在节点的电流代数和为零(规定流入节点的为正，流出节点的为负)，即

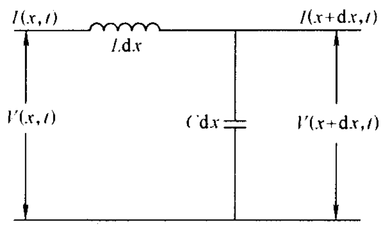


图 1-3

$$I(x,\ t)-I(x+\mathrm{d}x,\ t)-C\mathrm{d}x\frac{\partial V}{\partial t}=0.$$

令 $\mathrm{d}x\to 0$ 取极限，得

$$C\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial x}=0. \tag{1-13}$$

另外，根据 Kirchhorr 第二定律：沿任一闭合回路的电势增量的代数和为零(规定沿回路顺时针方向的电动势和电流都为正；反之为负)，即

$$V(x,\ t)-V(x+\mathrm{d}x,\ t)-I\mathrm{d}x\frac{\partial I}{\partial t}=0.$$

$\mathrm{d}x\to 0$ 取极限，得

$$L\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}=0. \tag{1-14}$$

将(式 1-14) $\times\dfrac{1}{L}$ 对 x 求导减去式(1-13)式对 t 求导，整理后得

$$V_{tt}=\frac{1}{LC}V_{xx}.$$

而将式(1-14)对 t 求导减去式(1-13) $\times\dfrac{1}{C}$ 对 x 求导，整理后得

$$I_{tt}=\frac{1}{LC}I_{xx}.$$

因此，理想高频传输线上的电压和电流的变化规律为

$$\begin{cases}V_{tt}=a^2V_{xx},\\ I_{tt}=a^2I_{xx}.\end{cases}$$

式中，$a^2=\dfrac{1}{LC}$.

1.1.2 热传导方程与定解条件

当一个物体内部各点的温度分布不均匀时，热量会从温度高的地方向温度低的地方

流动，这种现象称为热传导. 由于热传导过程总是表现为温度随时间和位置的变量，所以解决热传导问题，归结为求物体内温度的分布问题.

在物体 Ω 中任取一小区域为 V，它的外表曲面为∂V，如图 1-4 所示。假设区域 V 内点 $M(x, y, z)$ 处在时刻 t 的温度为 $u(x, y, z, t)$，$\boldsymbol{n}$ 为曲面元素 $\mathrm{d}S$ 的单位外法向量. 由热传导理论的 Fourier 实验定律知：物体在无穷小时间 $\mathrm{d}t$ 内流过一个无穷小面积元 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$ 与时间 $\mathrm{d}t$，热流通过的面积 $\mathrm{d}S$ 及 u 沿 $\mathrm{d}S$ 的法方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial n}$成正比，即

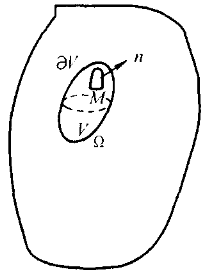


图 1-4

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

式中，$k=k(x, y, z)$称为物体在点 $M(x, y, z)$处的热传导系数，取正值. 上式的负号表示热流流向是温度梯度的相反方向.

当物体均匀且各向同性时，热传导系数 k、物体的密度 ρ，比热 c 都为常数. 利用上面的关系，在时间段$[t_1, t_2]$内,通过曲面∂V 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\oint_{\partial V} k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t.$$

根据散度定理得，

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_V k\Delta u\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_V k\Delta u\mathrm{d}v\mathrm{d}t. \tag{1-15}$$

如果物体内有热源，设在单位时间内单位体积所产生的热量为 $F(x, y, z, t)$，则在$[t_1, t_2]$内热源放出热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_V F(x, y, z, t)\mathrm{d}v\mathrm{d}t. \tag{1-16}$$

流入的热量和物理内部热源产生的热量使 V 内温度发生变化. 区域 V 在时间间隔$[t_1, t_2]$内各点温度从 $u(x, y, z, t_1)$变化到 $u(x, y, z, t_2)$. 于是在$[t_1, t_2]$内 V 内温度升高所需的热量为

$$\begin{aligned}Q_3 &= \int_V c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\mathrm{d}v \\ &= \int_V\left(\int_{t_1}^{t_2} c\rho u_t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}v \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_V c\rho u_t\mathrm{d}v\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{1-17}$$

由能量守恒定律，有 $Q_3 = Q_1 + Q_2$，即

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V c\rho u_t\mathrm{d}v\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_V(k\Delta u + F)\mathrm{d}v\mathrm{d}t.$$

由于时间间隔$[t_1, t_2]$及区域 V 都是任意的，不妨假设被积函数都是连续的，因此

$$c\rho u_t = k\Delta u + F.$$

令 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f = \dfrac{F}{c\rho}$, 得

$$u_t = a^2\Delta u + f. \tag{1-18}$$

称式(1-18)为**三维热传导方程**. 如果物体内部没有热源, 即$f\equiv 0$, 则得齐次热传导方程

$$u_t = a^2\Delta u. \tag{1-19}$$

显然与弦振动问题类似, 单靠一个微分方程还不足以完全确定一个特定的物理过程. 我们知道, 对于一个物体, 在一个确定的传热过程中, 它的温度分布依赖于开始时刻物体的温度和物体表面上的温度, 因此还须对方程附加相应的初值条件和边值条件.

初始条件下可以写成:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \ (x, y, z,) \in \Omega, \tag{1-20}$$

式中, $\varphi(x, y, z)$为已知函数, 它描述物体在 $t=0$ 时刻的温度分布.

关于边界条件, 从物理现象发生的过程来看有三种情况:

情形 1: 若物体 Ω 的表面$\partial\Omega$ 的温度分布已知, 这时可归结为第一类边界条件:

$$u(x, y, z, t)\big|_{\partial\Omega} = \psi(x, y, z, t), \tag{1-21}$$

式中, $\psi(x,y,z,t)$是给定在$\partial\Omega\times[0, \infty)$上的已知函数.

情形 2: 若已知物体 Ω 表面上每一点的热流密度 q, 也就是通过边界曲面$\partial\Omega$ 上单位面积单位时间内的热量已知, 这实际上表示温度 u 沿边界曲面$\partial\Omega$ 的法向导数是已知的, 这时可以归结为第二类边界条件:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y, z, t), \tag{1-22}$$

式中, $\varphi(x, y, z, t)$是给定在$\partial\Omega\times[0, \infty)$上的已知函数. 特别, 如物体 Ω 的边界是绝热的, 即物体与周围介质无热交换, 于是 $\varphi(x, y, z, t)\equiv 0$, 这时归结为第二类齐次边界条件:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

情形 3: 若已知通过$\partial\Omega$ 与周围介质热量交换规律. 不妨设周围介质在物体表面的温度为 $\theta(x, y, z, t)$, 则物体 Ω 和外部介质的温度差为

$$[u(x,y,z,t) - \theta(x,y,z,t)]\big|_{\partial\Omega},$$

此时会产生热量流动. 根据 Newton 热交换定律: 在无穷小时段内, 经过物体 Ω 表面上的无穷小面积 dS 流出(入)到周围介质中的热量和物体与介质在接触面上的温度差成正比. 即

$$\mathrm{d}Q = k_1(u-\theta)\big|_{\partial\Omega}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

这里, $k_1>0$ 为热交换系数.

另一方面, 根据 Fourier 定律知,

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

于是得,

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = k_1(u-\theta)\bigg|_{\partial\Omega}.$$

这时可以归结为第三类边界条件:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y, z, t) \tag{1-23}$$

式中, $h = k_1/k$ 是$\partial\Omega$ 上的已知函数, $\varphi(x, y, z, t) = k_1\theta/k$ 是在$\partial\Omega\times[0, \infty)$上的已知函数.

注 1.1.4 在前面所讨论的热传导问题中, 作为特例, 如果所考虑的物体是一根细杆或一块薄板, 或者即使不是细杆或薄板, 而其中的温度 u 只与 x 和 t, 或只与 x, y 和 t 有关, 则方程(1-18)就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

注 1.1.5 虽然我们习惯上称式(1-18)为**热传导方程**, 但在生产实际中还有很多现象都可以用这种方程来描述. 例如在电学中, 海底电缆的电压 e 也满足方程

$$\frac{\partial e}{\partial t} = k\frac{\partial^2 e}{\partial x^2},$$

式中, $k = RC$, R 为电阻值, C 为电容值. 又如导电线圈在所围柱体内的磁场 H 满足方程

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right),$$

式中, $a^2 = \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$, c 为光速, μ 为磁导率, σ 为电容率. 在研究物质在液体中的扩散现象时, 扩散物质的浓度 N 也满足方程

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right),$$

式中, D 是扩散系数, 所以也称热传导方程为**扩散方程**.

一般地, 在数学中还研究 n 维热传导方程

$$u_t(x, t) = a^2\Delta u(x, t) + f(x, t), \qquad x\in\Omega,\ t\in(0, \infty), \tag{1-24}$$

式中, Ω 为 n 维空间 R^n 中的一个有界区域, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\Delta u(x, t) = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.