21世纪高职高专公共课教材

高等数学

主编 潘立守 卢 春
主审 敖屹兰

华南理工大学出版社

21世纪高职高专公共课教材

高等数学

主编 潘立守 卢 春
参编 邱 文 香永辉
主审 敖屹兰

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书本着以应用为目的，以必需够用为度的原则，在结构处理和内容安排上注重理论知识与实际应用相结合。

全书介绍了一元函数微积分以及极限的基本概念、基本性质和应用，导数和不定积分、积分的概念和应用。为方便学生学习，各章后还配有总结和习题。

本书可作为高等职业教育文科类学生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/潘立守，卢春主编．—广州：华南理工大学出版社，2007.8
(21世纪高职高专公共课教材)
ISBN 978-7-5623-2633-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①潘…②卢…　Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第104695号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧立局
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：8.5　字数：171千
版　　次：2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷
印　　数：1～3000册
定　　价：19.00元

前　　言

高等数学作为经济和管理类专业的基础课，受到各高等院校的普遍重视。为了适应高等职业院校培养高等技术应用型人才的需要以及各专业对数学课的要求，我们编写了本书。

本书在保证数学的科学性、逻辑性的基础上，更加突出以必需、够用为度的原则，在结构处理和内容安排上注重理论知识与实际应用相结合，降低理论要求，以讲清概念、强化应用为重点，以技能训练为主线，内容通俗易懂，切合高职院校文科专业学生的学习特点。

为了适应不同层次学生学习的需要，掌握学习中的重点、难点，我们对每章内容进行了归纳、总结。本书每节都配有习题，并配有《高等数学习题册》一书，对每道习题给出详细解答，以便学生自学，提高学习效率。本课程教学时数大约78学时。

本书由广东交通职业技术学院的潘立守、卢春主编，由敖屹兰副教授主审，邱文、香永辉老师等也参加了编写工作。

本书在编写过程中得到华南理工大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平和经验有限，书中如有错误和不妥之处，恳请读者指正。

编者

2007.8

目　录

第 1 章　极限与连续

极限是微积分中一个重要的基本概念,它是学习微积分的理论基础.极限的概念是由求某些实际问题的精确解答而产生的.如在几何里,计算三角形、矩形等简单图形的面积都很简单,但是计算圆的面积就复杂了,要用半径为 r 的内接正 n 边形的面积

$$S_n = f(n) = \frac{1}{2}a_n \cdot r \cdot n$$

(n 为正 n 边形的边数,a_n 为边长)近似代替圆的面积.当 n 很大时,内接正 n 边形的面积就非常接近圆的面积,n 越大,近似程度就越高.这就是极限的思想.本章主要介绍极限的概念及运算,并在此基础上介绍函数的连续性.

1.1　极　限

1.1.1　数列的极限

数列是以正整数 n 为自变量的函数,即 $y_n = f(n)$,所以数列又称整标函数,它们的图形在直角坐标系中是一些离散的点.

下面考察当自变量 n 无限增大时,下列数列 $y_n = f(n)$的变化趋势.

(1)$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{2n},\cdots$;

(2)$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$;

(3)$-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$;

(4)$1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots$.

数列 $y_n=\frac{1}{2n}$,$y_n=\frac{n+1}{n}$,$y_n=(-1)^n$ 的图形分别如图 1.1、图 1.2、图 1.3 所示.

由图 1.1 可以看出,当 n 无限增大时,即当 $n\to\infty$时,$y_n=\frac{1}{2n}$无限趋近于确定的常数 0;由图 1.2 可以看出,当 $n\to\infty$时,$y_n=\frac{n+1}{n}$无限趋近于确定的常

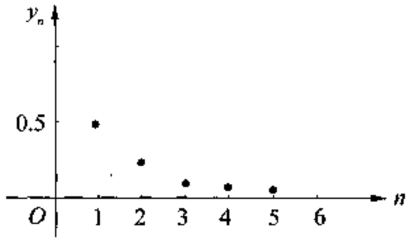

图 1.1

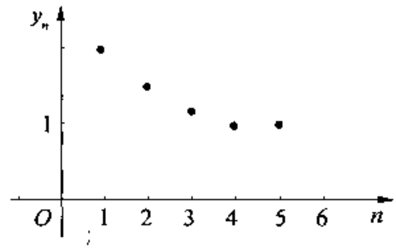

图 1.2

数 1.

归纳数列(1)、(2)的变化趋势，可知当 n 无限增大时，y_n 都分别无限趋近于一个确定的常数. 一般地，我们给出下面的定义.

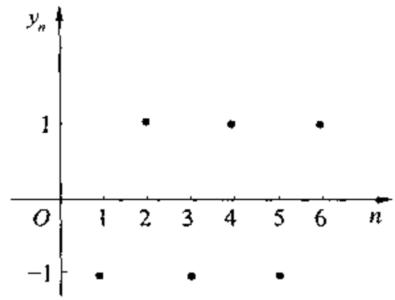

图 1.3

定义 1.1 如果当 n 无限增大时，y_n 无限趋近于某一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做数列 y_n 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad 当\ n\to\infty\ 时,\ y_n \to A$$

因此，数列(1)的极限是 0，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0$；数列(2)的极限是 1，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$.

数列有极限 A，也称数列收敛于 A. 由图 1.3 可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$y_n = (-1)^n$ 总在 -1 和 1 两个数上来回跳动，不趋近于确定的常数，所以这个数列没有极限，也称数列是发散的或极限不存在.

而对于数列 $y_n = 2n-1$，当 $n\to\infty$ 时，y_n 越来越大，也不能无限趋近于一个确定的常数，所以这个数列也没有极限，是发散的，这时可记作

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = \infty$$

例 1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $y_n = \dfrac{1}{n^2}$； (2) $y_n = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$；

(3) $y_n = (-1)^n\dfrac{1}{2n}$.

解 (1)$y_n=\frac{1}{n^2}$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,y_n 的各项依次为

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},\cdots$$

因为当 $n\to\infty$ 时,y_n 无限趋近于 0,所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

(2)$y_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,y_n 的各项依次为

$$1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{4},1-\frac{1}{8},1-\frac{1}{16},1-\frac{1}{32},\cdots$$

因为当 $n\to\infty$ 时,y_n 无限趋近于 1,所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=1$$

(3)$y_n=(-1)^n\frac{1}{2n}$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,y_n 的各项依次为

$$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\frac{1}{8},-\frac{1}{10},\cdots$$

因为当 $n\to\infty$ 时,y_n 无限趋近于 0,所以

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{2n}\right]=0$$

例 2 考察下列数列的变化趋势:

(1)$y_n=1-\sin(2n+1)$;　　　　(2)$y_n=3^n$.

解 (1)数列 $y_n=1-\sin(2n+1)$,当 n 无限增大时,y_n 不能趋近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限.

(2)数列 $y_n=3^n$,当 n 无限增大时,y_n 也无限增大,但不能无限趋近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限.

例 3 求数列 $y_n=10$ 的极限.

解 这个数列的各项都是 10,所以

$$\lim_{n\to\infty}10=10$$

根据数列极限的定义,可以得出下面结论:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=\begin{cases}0 & (a>0)\\ 1 & (a=0)\\ +\infty & (a<0)\end{cases}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0 & (|q|<1)\\ \infty & (|q|>1)\end{cases}$;

(3) $\lim_{n\to\infty}C=C$（C 为常数）.

1.1.2 函数的极限

数列的极限是研究自变量 $n\to\infty$ 这样一种变化趋势下，$y_n=f(n)$ 的变化趋势，它的极限只是一种特殊的函数极限. 对于一般的函数，由于自变量的变化过程不同，函数的极限一般也不同. 自变量的变化一般会有以下情况：

(1) 自变量 x 的绝对值无限增大（记为 $x\to\infty$）；

(2) 自变量 x 无限趋近于一个确定的常数 x_0（记为 $x\to x_0$）.

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{2x}$ 的变化趋势.

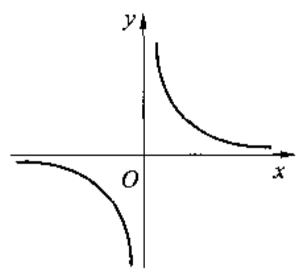

图 1.4

由图 1.4 可以看出，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限趋近于零. 即当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a\ (a>0)$ 时有定义，如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad 当\ x\to\infty\ 时，f(x)\to A$$

根据上述定义可知，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\frac{1}{2x}$ 的极限为 0，可记为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

$x\to\infty$ 可分为 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况.

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,+\infty)$（或 $(-\infty,a)$）内有定义，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)=A$$

或当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,$f(x)\to A$.

如 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}3^x=0$$

又如图 1.4 所示,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0 \qquad 及 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$$

例 4 考察 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$(极限不存在),

$$\lim_{x\to-\infty}2^x=0$$

即当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)=2^x$ 不趋向于一个确定的常数,故当 $x\to\infty$时,2^x 的极限不存在.

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限

例 6 考察当 $x\to1$ 时,函数 $f(x)=x^2+3$ 的变化趋势.

解 列表求值看函数的变化趋势,如表 1-1 所示.

表 1-1

x	0.5	0.8	0.99	0.999 9	…	1.0001	1.01	1.1	1.2	1.5
$f(x)=x^2+3$	3.25	3.64	3.980 1	3.999 800 01	…	4.000 200 01	4.020 1	4.21	4.44	5.25

从表 1-1 可以看出,当 x 从 1 的左侧无限趋近于 1 时,$f(x)$趋近于 4;当 x 从 1 的右侧无限趋近于 1 时,$f(x)$也趋近于 4.由此可知,当 $x\to1$ 时,$f(x)=x^2+3$ 的值无限趋近于 4.

对于这种当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的变化趋势,给出下面定义:

定义 1.4 如果函数 $f(x)$在 x_0 的邻域(点 x_0 本身可以除外)有定义,当 x 从左、右两侧无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$无限趋近于某一个确定的常数 A,则称 A 为函数$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或当 $x \to x_0$ 时,$f(x) \to A$.

因此,当 $x \to 1$ 时,$f(x)=x^2+3$ 的极限是 4,可记为

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + 3) = 4$$

定义 1.5 如果当 x 从x_0 的左侧趋近于 x_0(记为 $x \to x_0^-$)时,函数 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做函数$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

如果当 x 从x_0 的右侧趋近于 x_0(记为 $x \to x_0^+$)时,函数 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫作函数$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的右极限,记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

由表 1-1 可以看出,函数 $f(x)=x^2+3$ 当 $x \to 1$ 时的左极限为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 3) = 4$$

右极限为

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 3) = 4$$

即
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$$

定理 1.2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例 7 讨论函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$当 $x \to 1$ 时的极限.

解 函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.因为 $x \neq 1$,所以

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

作出这个函数的图形(如图 1.5),由图可知:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2$$

所以 $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

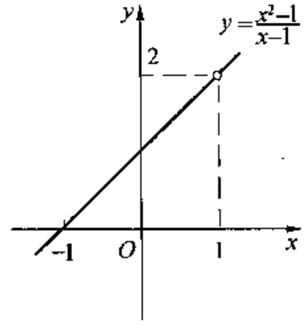

图 1.5

例 8 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x & x\geqslant0\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0$$

由定理 1.2 可知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

例 9 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & x\leqslant2\\ x^2+1 & x>2\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x+3)=5$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(x^2+1)=5$$

即 $$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=5$$

故 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$.

习题 1.1

1. 观察下列数列有无极限,如有极限,请指出其极限值:

(1) $y_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$;　　(2) $y_n=1-\sin(n+1)$;

(3) $y_n=\begin{cases}1-\frac{1}{n+1} & (n\text{ 为奇数})\\ (-1)^n & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 1}(3x-2)$；

(2) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(5+\dfrac{1}{2n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x}{|x|}$；

(4) $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{x^3+2x+3}{1-2x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(6) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x^2+x+1}{(x+2)(x-1)}$.

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ x^2-2x & x \geqslant 0\end{cases}$$

讨论 $x \to 0$ 时，$f(x)$的极限是否存在.

1.2 无穷小量与无穷大量

1.2.1 无穷小量

1. 无穷小量的定义

在变量的变化过程中，有一类变量的绝对值可以无限变小而趋于零，即变量的极限为零. 对于这样的变量，我们给出下面的定义.

定义 1.6 如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时，函数 $f(x)$的极限为零，那么函数 $f(x)$叫作当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小量，简称为无穷小.

例如，因为 $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以当 $x \to \infty$时，函数$\dfrac{1}{x}$是无穷小量；因为 $\lim\limits_{x \to 2}(x^2-4)=0$，所以当 $x \to 2$ 时，函数 x^2-4 也是无穷小量.

注意：(1)说一个函数是无穷小量，必须指出其自变量的变化趋向. 例如说函数 $f(x)=2x-1$ 是无穷小量是没有意义的，因为只有当 $x \to \dfrac{1}{2}$时，函数 $f(x)=2x-1$ 才是无穷小量，而当 x 趋向其他数值时，函数 $f(x)=2x-1$ 就不是无穷小量.

(2)不要把一个确定的绝对值很小的常数(如 0.00001)与无穷小量混为一谈. 因为绝对值很小的常数不管在 x 的何种趋向下，其极限为常数本身，并不是零.

(3)常数“0”可以看成是无穷小量，因为 $\lim\limits_{x \to x_0}0=0$.

2. 无穷小量的性质

在自变量的同一个变化过程中：

(1)有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

(2)有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

(3)无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(4)函数 $f(x)$以 A 为极限的充要条件是函数 $f(x)$可以表示成 A 与一个无穷小量之和.即

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{或} x \to \infty}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \text{或} x \to \infty}} \alpha = 0$.

以上各性质证明从略.

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x^2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ 且 $\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| \leqslant 1$,即有界,所以

$$\lim_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x^2} = 0$$

1.2.2 无穷大量

1. 无穷大量的定义

定义 1.7 如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,即 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \text{或} x \to \infty}} f(x) = \infty$,那么函数 $f(x)$叫做当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大量,简称为无穷大.

例如,当 $x \to \infty$时,函数 $f(x) = 2x$ 是无穷大量,即

$$\lim_{x \to \infty} 2x = \infty$$

当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$是无穷大量,即

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

注意:(1)说一个函数 $f(x)$是无穷大量,必须指明自变量 x 的变化趋向.如函数 $f(x) = \frac{1}{3x}$是当 $x \to 0$ 时的无穷大量,但当 $x \to \infty$时它就不是无穷大量,而是无穷小量.

(2)不要把绝对值很大的常数(如 1×10^{12})说成是无穷大量,因为绝对值很大的常数不管在 x 的何种趋向下,其极限为常数本身,并不是无穷大量.

2. 无穷大量与无穷小量的关系

我们知道,当 $x\to\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)=x-\frac{1}{2}$ 是无穷小量,而函数 $g(x)=\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$ 是无穷大量;当 $x\to\infty$ 时,$f(x)=x-\frac{1}{2}$ 是无穷大量,而 $g(x)=\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$ 是无穷小量.

定理 1.3 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 是无穷大量,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x)\neq0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$,所以

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}=\infty$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+3)$.

解 考察 $2x^2-x+3$ 的倒数,因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2-x+3}=\lim\frac{\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{0}{2}=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+3)=\infty$.

1.2.3 无穷小量的比较

两个无穷小量在自变量的同一变化过程中虽然都趋向于零,但趋向于零的速度却不一定相同,有时差别很大.如表 1-2 列出了函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$,当 $x\to+\infty$ 过程中的变化情况.

表 1-2

x	10	100	10 000	…	$\to+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	0.1	0.01	0.000 1	…	$\to 0$
$g(x)=\frac{1}{x^2}$	0.01	0.000 1	0.000 000 01	…	$\to 0$

显然,当 $x\to+\infty$时,$\frac{1}{x^2}$比$\frac{1}{x}$趋向于 0 的速度要快得多.此时$\frac{1}{x^2}$与$\frac{1}{x}$之商,即$\frac{1}{x}$的极限为 0,而$\frac{1}{x}$与$\frac{1}{x^2}$之商,即 x 的极限为∞.这里用"阶"来比较它们趋向于 0 的速度的快慢程度.

定义 1.8 设 α 和 β 都是同一个自变量变化过程中的无穷小量,$\lim\frac{\alpha}{\beta}$ 是这个变化过程中的极限.

(1)如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,就说 α 是比 β 较高阶的无穷小;

(2)如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$,就说 α 是比 β 较低阶的无穷小;

(3)如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C$($C$ 为不等于零的常数),就说 α 与 β 是同阶无穷小;

(4)如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$,就说 α 与 β 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

根据以上定义可知,当 $x\to+\infty$时,$\frac{1}{x^2}$是比$\frac{1}{x}$高阶的无穷小,$\frac{1}{x}$是比$\frac{1}{x^2}$低阶的无穷小.

又如当 $x\to 0$ 时,$10x$ 是 $2x$ 的同阶无穷小.

例 4 比较当 $x\to 0$ 时,无穷小量 $\frac{4}{x+2}+x-2$ 与$\frac{1}{2}x^2$ 阶数的高低.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{x+2}+x-2}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4+(x-2)(x+2)}{\frac{1}{2}x^2(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x^2-4}{\frac{1}{2}x^2(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}(x+2)}$$

$$=1$$

所以 $\frac{4}{x+2}+x-2\sim\frac{1}{2}x^2$.即 $\frac{4}{x+2}+x-2$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小.

习题 1.2

1. 指出下列函数哪些是无穷小量,哪些是无穷大量:

(1) $f(x)=100x^3(x\to0)$; (2) $f(x)=\frac{1+(-1)^x}{x}(x\to\infty)$;

(3) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}(x\to0^+)$; (4) $f(x)=3^{\frac{1}{x}}(x\to0^-)$;

(5) $f(x)=\frac{x}{x^2}(x\to0)$; (6) $f(x)=\log_a x(x\to0^+)$.

2. 下列函数自变量怎样变化时是无穷小?怎样变化时是无穷大?

(1) $y=\frac{3}{x^5}$; (2) $y=\tan x$;

(3) $y=10^{\frac{1}{x}}$; (4) $y=\frac{1}{2x+1}$.

3. 下列无穷小量哪一个较高阶,哪一个是同阶或等价无穷小?

(1)当 $x\to0$ 时, x^2-x^3 与 x^2-3x;

(2)当 $x\to4$ 时, $x^2-7x+12$ 与 x^2-5x+4.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)\cos\frac{1}{x-2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\operatorname{arccot}x$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x-2}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-x+1)$.

1.3 极限的运算

前面给出了一些简单的求极限方法,为了更好地解决极限的计算问题,这一节进一步介绍函数极限的求法.

1.3.1 极限的四则运算法则

定理 1.4 设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$ (此处 lim 代表 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}$),则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$ (C 为常数);

(3) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;