组合数学

李　春　编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

组合数学

李　春　编著

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

组合数学 / 李春编著．—沈阳：东北大学出版社，2007.12
ISBN 978-7-81102-474-6

Ⅰ.组…　Ⅱ.李…　Ⅲ. 组合数学　Ⅳ.O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 183109 号

出 版 者：东北大学出版社出版
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83680267（社务室）　83687331（市场部）
传真：024—83680265（办公室）　83687332（出版部）
网址：http：//www.neupress.com
E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：4.375
字　　数：110 千字
出版时间：2007 年 12 月第 1 版
印刷时间：2007 年 12 月第 1 次印刷
责任编辑：孙　锋　刘振军　　责任校对：刘乃义
封面设计：胡　辑　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-474-6　　定　　价：20.00 元

序

组合数学是一个具有悠久历史的现代数学分支，它主要研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题，它的思想和技巧不仅正用于数学应用的传统自然科学领域，而且也应用于社会科学、信息科学、生命科学等领域.

本书围绕计数问题这个中心，介绍组合数学的基本理论和思想方法，内容不苛求全面，但求重点突出，理论联系实际，因而本书没有将所有定理的证明都写进去. 这样做的另一个好处是可以让学生去证明那些只有叙述而不加证明的定理，以此培养他们的数学能力. 本书安排了较多的例题，目的是希望读者在学习过程中既能重视分析推理，又能学到计算技巧. 书中许多问题都是通过历史上源于数学游戏和娱乐的实例引出的，还有一些则直接来源于现实生活. 将知识性与趣味性融为一体，这是本书所遵循的另一条原则.

本书是在笔者近几年来讲授此课程的讲义基础上形成的. 在本书的编写过程中，得到了硕士研究生王俊、李丹丹、于晓庆、周杨、张铮等的帮助，在此一并表示感谢.

衷心感谢渤海大学所给予的关怀和资助.

限于作者的水平，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正.

李　春

2007 年 7 月

目　　录

绪　论

组合数学是一个既古老又新颖的数学分支，它所研究的许多问题都有很深的历史渊源. 组合数学也是与人们的日常生活联系最紧密的一门学科，许多组合问题最初都以数学娱乐和游戏的形式出现. 例如，七桥问题、四色问题、幻方问题、夫妻问题等. 然而，由于缺乏生产实践和科学技术的刺激，长期以来，组合数学发展缓慢. 直到 20 世纪 60 年代，随着计算机科学和控制论等学科的巨大发展，组合数学才得以旧貌换新颜. 如今，组合数学已成为数学的一个重要分支，它的思想和技巧不仅正用于数学应用的传统自然科学领域，而且也应用于社会科学、信息科学和生命科学等领域.

由于组合数学与其他学科存在很大的交叉，所以不易给其一个精确的定义. 粗略地讲，它是研究任意一组离散性事物按照一定规则安排或配置(选取)的方法的数学分支. 特别地，当指定的规则相对简单时，主要问题就变为计算一切可能的安排或配置的方法数，并构造这类安排或配置. 若指定规则隐含对象安排的技巧性，则安排或配置的存在性问题便成为主要问题. 因此，组合数学可以一般性地描述为：组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科.

为了使前面的讨论更加具体，下面介绍组合问题的几个经典实例，其中有些问题的详细讨论将在后面章节中给出.

【例 1】　棋盘的完美覆盖

考虑一张国际象棋棋盘(8×8 矩阵). 设有形状一样的多米诺骨牌，每张恰好覆盖棋盘上相邻的两个方格. 问：能否把 32 张

牌摆放到棋盘上，使得任意两张牌均不重叠，每张牌覆盖两个方格，并且棋盘上所有方格都被盖住？

这就是棋盘被多米诺骨牌的完美覆盖问题．其存在性是显然的，而且人们能够很快构造出一些不同的完美覆盖．但计算出不同的完美覆盖的总数却不是一件易事，不过，这还是可以做到的，早在 1961 年，M.E. Fischer 就给出了这个问题的答案：共有 12 988 816 种方案．

是不是对于任意的 $m\times n$ 棋盘，都存在多米诺骨牌的完美覆盖呢？易见，3×3 棋盘不存在完美覆盖．一般地，有如下结论：

$m\times n$ 棋盘存在完美覆盖的充分必要条件是 m 和 n 中至少有一个是偶数，也就是 m，n 至少有一个能被 2 整除．

现在，如果剪掉 8×8 棋盘一条对角线上的两个方格，得到一张 62 个方格的残缺棋盘．问：是否存在多米诺骨牌完美覆盖？

答案是否定的．可以采用下面黑白涂色的办法，巧妙地给出解释．

在 8×8 棋盘上交替地将方格涂成黑色和白色，则共有 32 个白格，32 个黑格．若剪掉一条对角线上的两个方格，则等于剪掉了同样颜色的两个方格，不妨设为两个白格，所以这张残缺棋盘上共有 32 个黑格和 30 个白格．但是显然，若存在多米诺骨牌的完美覆盖，则必然需要 31 张多米诺骨牌，而每张牌需要盖住 1 个黑格和 1 个白格，所以 31 张不重叠的牌需要盖住 31 个黑格和 31 个白格．这样，矛盾出现了：设白格为 A，黑格为 B，则

$$31A+31B\neq30A+32B.$$

一般地，剪掉 $m\times n$ 棋盘上的若干个方格后得到的残缺棋盘，符合什么条件的剪法才能存在完美覆盖？利用上述黑白涂色的办法很容易发现，若存在完美覆盖，则棋盘上必须有相等的黑格数和白格数，但这个条件并不是充分的．比如，图 1 是一张 $4\times5-4$ 的残缺棋盘，虽然黑格数与白格数相等，但它不存在完美覆

盖，因为至少第一个格子没法用一张牌盖住. 关于残缺棋盘存在多米诺骨牌完美覆盖的充分必要条件，这里不做讨论. 下面转向多米诺骨牌完美覆盖的一个推广：b-牌的完美覆盖.

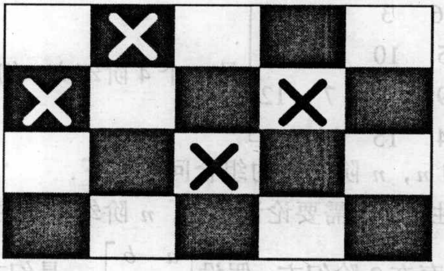

图 1

所谓 b-牌，就是一张由 b 个 1×1 的方格并排连接成的 $1\times b$ 的方格条. 因此，一张 b-牌可以盖住棋盘上一行或一列上的 b 个连续方格. 显然，2-牌就是上面提到的普通的多米诺骨牌，而 1-牌通常叫做单牌.

$m\times n$ 棋盘存在 b-牌的完美覆盖的充分必要条件是 m 和 n 中至少有一个能被 b 整除.

【例 2】　幻方/魔方

世界上最早的幻方是中国的九宫图(三阶幻方)，又称洛书. 但直到南北朝时，才出现九宫图的文字说明. 南宋时期出现了一个研究高潮，当时的数学家杨辉称之为纵横图. 伊拉克人柯拉，是中国以外最早研究幻方的人. 14 世纪初，纵横图被希腊人介绍到欧洲. 纵横图在欧洲得到了发展，并被称为 Magic Square，即幻方.

一个 n 阶幻方，是由整数 $1, 2, \cdots, n^2$ 按照下述规则构成的 n 阶方阵：每个行和，每个列和，以及每条对角线上的元素之和都等于同一个数 S. 这个数 S 被称为该幻方的幻和.

例如，$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$是一个 3 阶幻方，幻和 $S=15$.

又如，$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$是一个 4 阶幻方，幻和 $S=34$.

对任意的 n，n 阶幻方的组合问题如下.

① 存在性. 首先需要论证的是，n 阶幻方是否存在.

例如，不存在 2 阶幻方. 假设$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$是幻方，则必有 $a+b=a+c=a+d \Rightarrow b=c=d$. 而 a，b，c，d 应是 1，2，3，4 中 4 个互异的数，故产生矛盾，假设不成立.

② 计数. 如果 n 阶幻方存在，那么有多少不同“样式”.

有一点是肯定的，即任意两个 n 阶幻方都有相同的幻和

$$S=\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n^2)=\frac{1}{n}\frac{n^2(n^2+1)}{2}=\frac{n}{2}(n^2+1).$$

③ 构造. 如果 n 阶幻方存在，那么如何构造.

比如，3 阶幻方，有著名的杨辉法：“九子斜排 — 左右相更、上下对易 — 四维挺出”，如图 2 所示.

```
      1                 9               4   9   2
   4     2           4     2
7     5     3     3     5     7         3   5   7
   8     6           8     6
      9                 1               8   1   6
```

图 2

而 4 阶幻方可以这样构造：

- 把自然方阵两对角线分别倒排→幻方 A；

• 把幻方 A 第 2，3 列互换→幻方 B.

详见下列方阵.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\\9 & 10 & 11 & 12\\13 & 14 & 15 & 16\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}16 & 2 & 3 & 13\\5 & 11 & 10 & 8\\9 & 7 & 6 & 12\\4 & 14 & 15 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}16 & 3 & 2 & 13\\5 & 10 & 11 & 8\\9 & 6 & 7 & 12\\4 & 15 & 14 & 1\end{bmatrix}$$

（自然方阵）　　（幻方 A）　　（幻方 B）

还有一个概念是 n 阶幻方体(Magic Cub)，它是由 1，2，…，n^3 构成的一个 $n\times n\times n$ 的立方体，满足下述规则：平行于每条棱的直线上的元素之和，每个截面上的每条对角线上的元素之和，四条空间对角线中的每条对角线上的元素之和，都等于同一个数 S.

$$S=\frac{n}{2}(n^3+1).$$

这个数 S 被称为该幻方体的幻和.

对于幻方体，也有其存在、计数和构造等组合问题. 例如，不存在 3 阶幻方体.

【例 3】　四色问题

人人都熟悉地图，可是，绘制一张普通的政区图至少需要几种颜色，才能把相邻的政区或区域通过不同的颜色区分开来，就未必是一个简单的问题了. 很早的时候就有数学家猜想：任何地图的着色只需四种颜色就足够了，如图 3 所示. 这就是“四色问题”这个名称的由来.

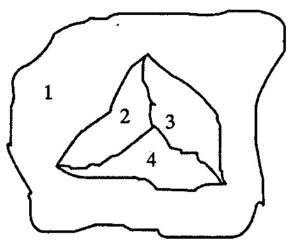

图 3

数学史上正式提出“四色问题”的时间是 1852 年. 当时伦敦大学的一名学生法朗西斯向他的老师摩根——著名数学家、伦敦大学数学教授——提出了这个问题，可是摩根无法解答，求助于

其他数学家，也没有得到答案. 于是从那时起，这个问题便成为数学界的一个“悬案”. 直到1976年9月，《美国数学会通告》正式宣布了一件震惊全球数学界的消息：美国伊利诺斯大学的K. Appel和W. Hakan等人利用电子计算机证明了“四色问题”这个猜想是完全正确的！他们将普通地图的“四色问题”转化为2000个特殊图的“四色问题”，然后在电子计算机上计算了足足1200小时，最后成功地证明了“四色问题”.

“四色问题”的被证明不仅解决了一个历时100多年的难题，而且成为数学史上一系列新思维的起点. 在“四色问题”的研究过程中，不少新的数学理论随之产生，也发展了很多数学计算技巧. 如将地图的着色问题化为图论问题，丰富了图论的内容. 不仅如此，在有效地设计航空班机日程表、设计计算机的编码程序上，“四色问题”都起到了推动作用.

不过，不少数学家并不满足于计算机取得的成就，他们认为，应该有一种简捷明快的书面证明方法.

【例4】 哥尼斯堡“七桥问题”

东普鲁士的哥尼斯堡城既是一个风景宜人的旅游胜地，也是一个在战争中双方必争的战略要地. 该城中有一条布勒格尔河横贯城区，它有两条分支流，在城中心汇合，成为一条主流，在两支流汇合处，中间有一个岛形地带，是繁华的商业中心，这种分布情况将城分为北区、东区、南区和岛区，这四个区分别由七座桥相连，如图4所示.

“七桥问题”的由来有多种版本，其中一个传说是说在一次战争期间，入侵部队要经过哥尼斯堡城，为延阻入侵者的进攻，当地驻军派出一支工兵部队来破坏这七座桥. 他们计划用一辆装炸药的卡车每通过一座桥便将其炸毁. 因此，指挥官需要一种将这七座桥都炸毁的卡车行驶路线方案.

历经多年，人们都没有找到答案. 欧拉经过悉心研究，于

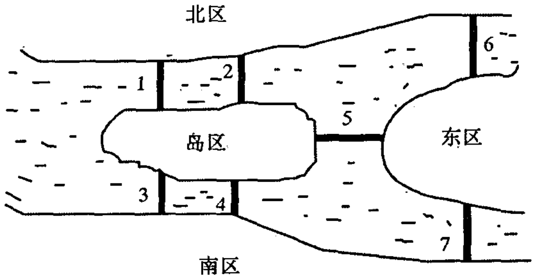

图 4

1736 年在其 29 岁时解决了这个问题，并向圣彼得堡科学院递交了一份题为《哥尼斯堡的七座桥》的论文．该论文不仅解决了这一难题，而且引发了一个新的数学分支——图论——的诞生．

欧拉将这个问题转化为数学问题：用 A，B，C，D 四个点分别代表岛区、北区、东区和南区，两区间有一座桥，就在相应两点间连一条线，这样，哥尼斯堡城区图就转化为图 5．进而“七桥问题”转化为：以 A，B，C，D 这四点中的任意一个为起点，能否不重复地用一笔将这个图形画出来？

【例 5】　最短路线问题

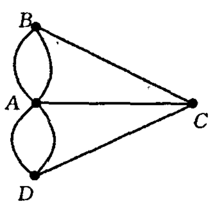

图 5

① 中国邮递员问题．一位邮递员从邮局出发，走遍管辖区的所有街道，最终回到邮局，求最短路线(添边→E 图，“一笔画”问题)．1959 年，山东师范大学管梅谷等一批科研人员把物资调运中的图上作业法与“一笔画”原理科学地结合起来，解决了这类邮递员投邮路线问题，因此它被数学界称为“中国邮递员问题”．

② 旅行商(货郎担)问题．有 n 座城市，一个商人要从某一座城市出发，唯一走遍所有城市，再回到出发的城市，求最短路线(H 图，环球航行问题)．

【例 6】 "六人集会"问题

1958 年，《美国数学月刊》曾刊登了这样一个问题($E1321$)：在任意六个人的集会上，或者有三个人以前彼此认识，或者有三个人以前彼此不认识．($K_6 \to (K_3, K_3)$)

【例 7】 帽子问题

在一次聚会结束时，10 位绅士去拿自己的帽子，有多少种方式使得这些绅士中没有人拿到自己来时所戴的帽子？(错位排列 D_n)

【例 8】 Nim 取子游戏

两人面对 k 堆硬币做游戏，$k \geqslant 1$，各堆硬币数分别为 n_1, n_2, …, n_k．游戏规则如下．

① 两人交替取子．(第一个取子的人称为游戏人Ⅰ，另一人称为游戏人Ⅱ．)

② 每次取子时须选择某一堆，并从中取走至少 1 枚硬币(可以取走该堆中的全部硬币)．

③ 所有堆都成为空堆时，游戏结束．最后取子者视为获胜者．

这个游戏中的变量是堆数 k 和各堆的硬币数 n_1, n_2, …, n_k, 对应的组合问题是：确定是游戏人Ⅰ胜还是游戏人Ⅱ胜，以及应如何取子才能保证获胜(获胜策略)．下面仅给出 $k=1$, 2 时的获胜策略，读者可以试着讨论 $k \geqslant 3$ 的情形．

当 $k=1$ 时，显然可以保证游戏人Ⅰ获胜．

当 $k=2$ 时，设两堆的硬币数分别为 n_1, n_2．获胜策略并不依赖于 n_1, n_2 的具体数值，而在于 n_1 是否等于 n_2．

Case 1：$n_1 = n_2$．

如果游戏人Ⅰ从一堆中取走 x 枚硬币，那么游戏人Ⅱ就从另一堆中取走 x 枚．这样的"模仿"策略可以保证游戏人Ⅱ获胜．

Case 2：$n_1 \neq n_2$.

游戏人Ⅰ可从大堆中取走$|n_1 - n_2|$枚硬币，使得两堆中含有相同数目的硬币．此后游戏人Ⅰ可通过“模仿”游戏人Ⅱ来取子，即游戏人Ⅱ在一堆中取 x 枚，游戏人Ⅰ就在另一堆中取 x 枚，这样即可保证游戏人Ⅰ获胜．

第1章 图论基础

第一节 基本概念

一、图与子图

定义1.1.1 一个图 G 由两个集合 V, E 组成. 其中 V 是事物的集合, 其元素称为顶点. E 是 V 中事物之间的关系的集合, 其元素称为边. 该图记作 $G=(V, E)$.

例如, $V=\{$北京, 锦州, 大连, 台北$\}$, 关系: 两地间有直达火车. 有关系的两事物写成偶对, 于是

$E=\{$(北京, 锦州), (北京, 大连), (锦州, 大连)$\}$.

如果用平面上的点表示图的顶点, 用线表示边(即两点间有关系就连上线), 那么图就可以在平面上被直观地表示出来. 如本例可用图 1-1 表示.

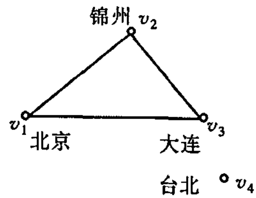

图 1-1

如果(v_i, v_j)是一条边, 那么称 v_i 与 v_j 为邻接. 若两条边有一个公共顶点, 则称这两条边邻接. 边与它的端点之间称为关联(Incident), 如图 1-2 所示.

图 1-2

如果 $v_i=v_j$, 那么称边(v_i, v_j)为环(Loop). 如果某个顶点与任何一条边都不关联, 那么称之为孤立点(Isolated Vertex).

如果连接同一对顶点的边数多于 1，那么称这样的边为多重边(Multiple Edge).

图中顶点的个数，称为图的阶(Order).

定义 1.1.2　一个有 p 个顶点和 q 条边的图，称为 (p, q) 图. 没有任何边的图，称为空图，记作 $\varnothing$. 只有一个顶点的图，称为平凡图. 没有环及多重边的图，称为简单图.

定义 1.1.3　每一对不同顶点间均有一条边的简单图，称为完全图(Complete Graph).

n 阶完全图记作 K_n，显然其边数为：$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$，如图 1-3 所示.

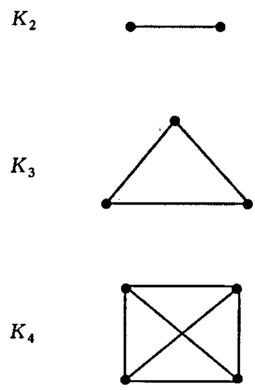

图 1-3

定义 1.1.4　设图 $G=(V, E)$ 是一简单图，H 是一个以 $V(G)$ 为顶点集的图，且两个顶点在 H 中邻接$\Leftrightarrow$它们在 G 中不邻接，则称 H 为 G 的补图(Complement)，记作 $H=\overline{G}$ 或 G^C，详见图 1-4.

显然，若 $G_1=(V, E_1)$ 与 $G_2=(V, E_2)$ 互为补图，则图 $G=(V, E_1 \cup E_2)$ 是完全图.

定义 1.1.5　$G=(V, E)$，如果 V 能分为两个互不相交的子集 V_1，V_2(即 $V_1 \cup V_2 = V$，$V_1 \cap V_2 = \varnothing$)，且 G 的每一条边都是一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中，则称 G 为二部图(Bipartite Graph)，并记作 $G=(V_1, V_2; E)$. 进一步，如果 V_1 中的每个顶点与 V_2 中的每个顶点都邻接，且 $|V_1| = m$，$|V_2| = n$，则称之为完全二部图，并记作 $K_{m,n}$，详见图 1-5.

定义 1.1.6　图 $G=(V, E)$，$G_1=(V_1, E_1)$，如果 $V_1 \subseteq V$ 且 $E_1 \subseteq E$，则称 G_1 为 G 的子图，记作 $G_1 \subseteq G$.