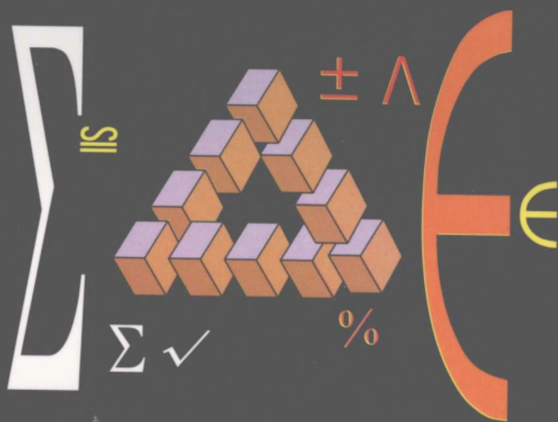
高中课本中的

数学基本解题方法

上册

虞　涛　编著



Mathematics

华东师范大学出版社

高中课本中的

数学基本解题方法

上册

Mathematics

内容提要

本书的写作是根据二期课改精神（立足于使所有学生获得必备的数学基础）和高考命题思想（重视数学基本方法的考察），依照最新教材的知识体系，从教材中提炼出基本的数学解题方法，构建每位高中学生都必须掌握的数学基础。它通过【方法阐述】、【课本溯源】、【例题选讲】、【方法点悟】、【基本训练】、【考题链接】等系列过程对高中数学中的各种基本解题方法作了全面的、深刻的诠释。它将是高中各年级学生学习数学的良师益友，也是中学数学教师平时课堂教学和高考复习辅导的宝贵材料。

ISBN 978-7-5617-5396-5

9 787561 753965 >

定价：12.00元

www.ecnupress.com.cn

高中课本中的
数学基本解题方法

（上　　册）

虞　涛　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中课本中的数学基本解题方法. 上/虞涛编著.
—上海:华东师范大学出版社,2007.5
ISBN 978-7-5617-5396-5

Ⅰ.高… Ⅱ.虞… Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071579 号

高中课本中的数学基本解题方法(上册)

编　　著　虞　涛
项目编辑　徐惟简
文字编辑　伍杨超
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电　　话　021-62450163转各部　行政传真021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　海安人民印刷厂有限公司
开　　本　890×1240　32开
印　　张　7.5
字　　数　208千字
版　　次　2007年7月第一版
印　　次　2007年7月第一次
印　　数　8000
书　　号　ISBN 978-7-5617-5396-5/G·3168
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

序

高中虽然不属于义务教育阶段，却仍然是基础教育.高中数学课程的目标不是培养专业的数学工作者，而是为了打好数学基础，提高数学思维能力，进一步提高作为现代公民的数学素养.

虞涛老师的这本著作，通过[方法阐述]、[课本溯源]、[例题选讲]、[方法点悟]、[基本训练]、[考题链接]等系列过程，着力在数学基本方法上，完全符合高中数学教学改革的大方向.作为一本教学辅导书，能够摆脱题海中讲究死套路的做法，具备长远的战略眼光，很不容易.

无庸讳言，教学辅导书必然要和高考相关.自从人类实行考试制度以来，就有“考基础”还是“考创新”的争论.时至今日，作为限制时间的笔试，主要只能考查应试者的基本知识和基本技能，很难想象在两个小时之内，能够显示一人的创造才能.在这个意义上，有的老师认为：“基础决战高考”，还是很有道理的.

万丈高楼平地起，做任何事情都必须有坚实的基础，古今中外，概莫能外.但是，打好基础的目的是为了发展.在花岗岩基础上盖茅草房，则是一种浪费.祝愿各位读者在使用本书之后能够有更大的发展.应作者之约，遂有此序，并与大家共勉.

张奠宙

2007年于旅美途中

前　言

许多教育专家和广大教师都主张中学数学教学应该从学生的双基(基本知识和基本方法)抓起，来提高学生的素质.基本知识的定义明确，它包括数学概念、定理、公式、法则等，在教材中可寻可查.基本方法又包括哪些方面呢？仁者见仁，智者见智，却没有清晰的定义或解释.不少老师和学生迫切希望明确的解释，便于平时具体的教与学.本人历经三年，潜心研读课程标准和新教材，并请教许多数学教育专家，对高中数学课程内容进行全面的思考，逐步有所感悟.

《数学课程标准》明确提出目标：要求学生通过学习数学要“获得必要的数学基础知识和基本技能，理解基本的数学概念、数学结论的本质，了解概念、结论等产生的背景、应用，体会其中所蕴藏的数学思想和方法”.教师教学要“抓住数学知识的主干部分，突出基本原理和通用方法，切实加强数学课程的基础性”.因此，在课堂教学中，我们应充分利用通用教材，深刻地挖掘概念的内涵，生动地展现定理的形成过程，详尽地讲解例题的解答思路，清晰地阐释每一个数学分支的本质.从中归纳、总结和提炼出重要的、基本的数学解题方法，构建中学生人人应该掌握的数学基本方法.数学基本方法是数学思想的体现，是数学的行为，具有模式化与可操作性，可作为解题的具体手段，是解题的通法.“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是深化.通过对教材“知识”的记忆、基本“方法”的操练、数学“思想”的领悟，增强学生对数学思想方法的认识和运用能力，提高数学素质.

数学高考命题历来重视考查数学基本方法，淡化数学解题技巧.体现在高考命题过程中，对于只能用技巧来解的备选问题，或是舍弃，或是改编成能用基本方法解的问题.为了帮助学生掌握解题的基

本方法这个金钥匙,特别奉献此书.

本书有以下几个特点：

1. 遵循课改理念和高考命题改革精神；

2. 依据最新二期课改教材的知识体系；

3. 坚持所有的基本方法均源自于教材；

4. 诠释各种方法内在规律和运用技巧；

5. 精选相关练习供学生自我训练提高；

6. 分类汇集近二十年内经典高考试题.

借以此书帮助学生系统地学好数学解题方法,扎实地提高素质,轻松地面对高考.

由于作者水平有限,存在不足之处,恳请读者给予指正.(E-mail：yuboya@sina.com)

虞　涛

2007.4.

目　　录

第一章　集　合

1. 列举法

方法阐述

对于一些有明显特征的集合，可以将集合中的元素一一列举出来，然后从中寻找符合条件要求的元素，这种解决集合问题的方法就是列举法.

列举法既是表示集合的方法之一，也是解决集合问题的一种最基本的方法. 用列举法研究集合问题时，将集合中的元素一一列举出来，元素的个数、元素的类型也就都直接地表现出来. 描述法虽然也是表示集合的方法之一，由于它是用文字或数学符号表述元素的公共属性，有时就显得抽象，不便于问题的研究. 若能将描述法转化为列举法，则将抽象化为具体，使研究元素的公共属性和有限个体一览无遗地展现在你的面前. 这就给问题的研究和解决带来极大的便利.

利用列举法解决问题应注意：

(1) 集合中元素之间的互异性和无序性；

(2) 真子集和子集的区别；

(3) 不要忘记全集和空集这两种情况是否可能.

课本溯源

在高中课本第 1 章“集合与命题”的“集合的运算”一节中，交集

概念的引入就是先用列举法将集合 $A=\{x|x$ 为 10 的正约数$\}$、$B=\{x|x$ 为 15 的正约数$\}$、$C=\{x|x$ 为 10 与 15 的正公约数$\}$中的元素分别列出，再找出集合 A、B 中的所有公共元素组成集合，进而观察它们与集合 C 的关系.

例题选讲

例 1 若集合 $M=\{1, 3, x\}$，$N=\{x^2, 1\}$，且 $M\cup N=\{1, 3, x\}$，则满足条件的 x 的个数有(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

思路剖析 在考虑集合中元素互异性和无序性的条件下，将集合 M、N 中的对应元素一一列出，并分别研究.

解 要使得 $M\cup N=\{1, 3, x\}$，集合 M、N 的元素对应关系有如下几种情况：

(1) 当 x 对应 x^2 时，$x=x^2$，$x=0$ 或 $x=1$(舍去).

此时 $M=\{1, 3, 0\}$，$N=\{1, 0\}$，因此 $M\cup N=\{1, 3, 0\}$ 适合条件.

(2) 当 3 对应 x^2 时，$x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$.

此时 $M=\{1, 3, \sqrt{3}\}$，$N=\{1, 3\}$，因此 $M\cup N=\{1, 3, \sqrt{3}\}$ 适合条件；或 $M=\{1, 3, -\sqrt{3}\}$，$N=\{1, 3\}$，因此 $M\cup N=\{1, 3, -\sqrt{3}\}$ 适合条件.

因此满足条件的 x 有三个，即 1、$\sqrt{3}$、$-\sqrt{3}$. 故选(C).

点评 解决此问题的关键是考虑集合元素的互异性，判断两元素是否相同还是互异，可以把元素列举出来进行判断. 当集合中的元素很少时，列举法是解决问题的最直接、有效的方法.

例 2 (1993 年高考·全国)集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\supsetneqq N$

(C) $M\subsetneqq N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

思路剖析 集合 M、N 看似复杂的无限集，但是由于 k 为整数，因此分别取 $k=\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$，将集合 M、N 中的元素分别一一列出，就可以比较两集合中元素的差异.

解 分别取 $k=\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$，得

$$M=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\},$$

$$N=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}.$$

易知 $M\subsetneqq N$. 故选(C).

点评 注意要多列举几个元素才能发现集合 N 与集合 M 中元素的关系.

例 3 已知集合 $M=\{x\mid ax+6=0\}$，$N=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，且 $M\subsetneqq N$，求 a 值.

思路剖析 由于集合 M 是集合 N 的真子集，因此应先将集合 N 中的元素一一列举出来，再将集合 M 是其真子集所有可能对应列举出来，从而逐个求出适应的 a 值.

解 因为 $N=\{2,3\}$，又 $M\subsetneqq N$，所以 M 可为 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$.

若 $M=\varnothing$，则关于 x 的方程 $ax+6=0$ 无解，此时 $a=0$；

若 $M=\{2\}$，则 $2a+6=0$，$a=-3$；

若 $M=\{3\}$，则 $3a+6=0$，$a=-2$.

故所求 a 的值为 0 或 -2 或 -3.

点评 注意不要忽视空集是集合 N 的真子集. 当两集合中元素都很少时，用列举法研究它们中元素的性质是非常有效的.

例 4 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x\mid x\in A,x\in \mathbf{N}^*\}$，$C=\{x\mid x\subseteq A\}$，试问 $A\cup B$ 与 C 之间的关系.

思路剖析 从题设条件可知三个集合中元素的表示形式都不同，似乎关系不明显. 若用列举法把集合 B、C 的元素表示出来，再研究它们之间的关系，$A\cup B$ 与 C 之间的关系便一目了然.

解 因为 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x\mid x\in A,x\in \mathbf{N}^*\}$，所以

$$B=\{1,2\},A\cup B=\{0,1,2\}.$$

又因为 $A=\{0,1,2\}$，$C=\{x\mid x\subseteq A\}$，所以

$$C=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\},$$

因此

$$A\cup B\in C.$$

点评 在研究集合问题时，首先必须了解每个集合中的公共属性是什么，在此基础上进一步研究集合之间的关系或进行集合运算. 这里要提醒的是集合 C 是以集合为元素的集合.

方法点悟

列举法适用于具有明显列举特征的简单集合. 列举法一般用于解答有限集问题上，而对于与自然数有关、规律简单的无限集也可用列举法研究. 往往先多找出几个元素发现规律，利用从特殊到一般的不完全归纳法解决问题.

训练问题

1. 设全集是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x\mid x\leqslant 1+\sqrt{2},x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}M\cap N$ 等于(　　).

(A) $\{4\}$　　(B) $\{3,4\}$

(C) $\{2,3,4\}$　　(D) $\{1,2,3,4\}$

2. 已知集合 $M=\{x\mid x^2=1\}$，集合 $N=\{x\mid ax=1\}$，若 $N\subsetneqq M$，那么 a 的值为(　　).

(A) 1　(B) -1　(C) 1 或 -1　(D) 0、1 或 -1

3. 设 $A=\{-3,x+1,x^2\}$，$B=\{x-5,2x-1,x^2+1\}$. 若 $A\cap B=\{-3\}$，则实数 x 的值为(　　).

(A) 2　(B) 2 或 -1　(C) -1　(D) 不存在

4. 若集合 $A=\{1,2,3\}$，则满足 $A\cup B=A$ 的集合 B 的个数是(　　).

(A) 1　(B) 2　(C) 7　(D) 8

5. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A,B\subsetneqq U$，且 $A\cap B=\{4\}$，$\complement_U A\cap B=\{2,5\}$，则满足条件的集合 A 有(　　).

(A) 4 个　　(B) 3 个　　(C) 2 个　　(D) 1 个

6. 已知集合 $A=\{1, 3, 2m-1\}$，集合 $B=\{3, m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$ ________.

7. 若集合 $A=\{x \mid x^2+2x+a=0, a\in \mathbf{R}\}\neq\varnothing$，则 A 中所有元素的和是________.

8. 集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集是________；真子集是________；非空真子集是________.

9. 若一系列函数的解析式相同，值域也相同，但定义域不同，则称这些函数为"同族函数"，那么解析式为 $y=x^2$，值域为 $\{1, 4\}$ 的"同族函数"的个数为________.

考题链接

1. (2004 年高考・上海)设集合 $A=\{5, \log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a, b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ ________.

2. (2001 年高考・上海)设集合 $A=\{x \mid 2\lg x=\lg(8x-15), x\in \mathbf{R}\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, \cos\dfrac{x}{2}>0, x\in \mathbf{R}\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为________.

3. (2000 年高考・全国)设集合 $A=\{x \mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x \mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是(　　).

(A) 11　　(B) 10　　(C) 16　　(D) 15

4. (2004 年高考・江苏)设集合 $P=\{1, 2, 3, 4\}$，$Q=\{x \mid |x|\leqslant 2, x\in \mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于(　　).

(A) $\{1, 2\}$　　(B) $\{3, 4\}$

(C) $\{1\}$　　(D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

5. (2005 年高考・湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P, b\in Q\}$，若 $P=\{0, 2, 5\}$，$Q=\{1, 2, 6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

6. (2002 年高考·北京)满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

7. (1996 年高考·全国)已知全集 $I=\mathbf{N}$, 集合 $A=\{x\mid x=2n, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\mid x=4n, n\in\mathbf{N}\}$, 则(　　).

(A) $I=A\cup B$　　(B) $I=\complement_I A\cup B$

(C) $I=A\cup\complement_I B$　　(D) $I=\complement_I A\cup\complement_I B$

8. (2002 年高考·全国)设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$, 则(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\subset N$

(C) $M\supset N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

9. (2005 年浙江·高考)设 $f(n)=2n+1\ (n\in\mathbf{N})$, $P=\{1,2,3,4,5\}$, $Q=\{3,4,5,6,7\}$,记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$, $\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$,则 $(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$(　　).

(A) $\{0,3\}$　　(B) $\{1,2\}$

(C) $\{3,4,5\}$　　(D) $\{1,2,6,7\}$

10. (2001 年上海·高考)对任意一个非零复数 z,定义集合 $M_z=\{w\mid w=z^{2n-1}, n\in\mathbf{N}\}$,设 α 是方程 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ 的一个根,用列举法表示集合 M_α.

2. 文氏图法

方法阐述

在讨论集合与集合之间的关系及运算问题时,可画出一个由一条或几条封闭曲线围成的图形,从而借助于形象直观的图示语言来研究集合.这种用封闭曲线围成的区域来表示集合的方法就叫做集

合的文氏图法. 所用的图形叫做 Venn 图(中文也译作文氏图);John Venn (1834—1923)是英国逻辑学家.

Venn 图并不是几何学的图形,而仅仅是把集合中的元素都包围在某个区域内的直观表示,它的形状与集合的性质没有任何的联系. 因此,文氏图与曲线的形状无关,如画成圆、矩形、正方形,乃至信手勾出的任何非规则的封闭曲线.

利用文氏图可将集合问题化抽象为直观,帮助我们清晰地认识各个元素、各个集合之间的关系,为研究和解决集合问题提供了方便.

课本溯源

高中课本第 1 章“集合与命题”的“集合之间的关系”一节中就用文氏图法直观地显示了交集、并集、补集等概念. 从课本中不少例题和习题可以看出,文氏图法不仅能帮助我们深刻理解与记忆集合的概念、运算公式及相互关系,如证明著名的摩根定律: $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$; $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$. 而且还能对一些数进行合理、有效的分类,进而获得简明的解法,特别是涉及到离散数学、抽象集合、集合之间的包含关系问题,更体现出文氏图法的方便.

例题选讲

例 1 (2000 年高考·上海春考)设 I 是全集,非空集合 P、Q 满足 $P\subset Q\subset I$. 若集合 P、Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为空集 $\varnothing$. 则这个运算表达式可以是________(只要求写出一个表达式).

思路剖析 用文氏图法设计两集合的交集为空集即为所求结果.

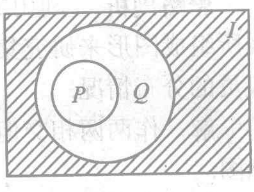


图 1.2.1

解 如图所示,可知集合 Q 的补集为阴影部分,即 $\complement_I Q$. 显然 $P\cap(\complement_I Q)=\varnothing$.

点评 借助于文氏图,清晰地显示了条件 $P\subset Q\subset I$ 表示的集合 P、Q、I 之间的关系,使得解答化难为易.

例 2 已知集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 S、T 是 U 的两个子集，并且(1) $S\cap T=\{2\}$；(2) $\complement_U S\cap T=\{4\}$；(3) $\complement_U S\cap\complement_U T=\{1, 6\}$. 求集合 S、T.

思路剖析 利用文氏图，从全集 U 中所有元素分布入手，将各种条件直观地表现出.

解 如图，方框表示全集，在其内部的两条封闭曲线将图形分成 4 个区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，由条件(1)知Ⅱ仅有元素“2”；由条件(2)知Ⅲ仅有一个元素“4”；由条件(3)知Ⅳ有元素“1”和“6”，则区域Ⅰ有元素“3”和“5”.

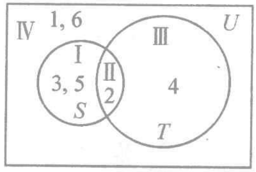


图 1.2.2

因此 $S=\{2, 3, 5\}$，$T=\{2, 4\}$.

点评 此题若直接从元素的归属上去分析，则容易陷入复杂的讨论中. 利用文氏图法从全集中所有元素的分布入手，则使得元素的归属清晰明朗. 借助文氏图可以帮助我们深刻地理解概念，分析集合之间的关系，便利于思考和解决问题.

例 3 某班有 28 名同学参加学校运动会，其中有 15 人参加了游泳比赛，8 人参加了田径比赛，14 人参加了球类比赛，而同时参加游泳和田径两项比赛的有 3 人，同时参加游泳和球类两项比赛的有 3 人，还有若干人同时参加了三项比赛，但参加的人数不比同时参加田径和球类两项比赛的人数少. 问只参加一项比赛的一共有多少人？

思路剖析 利用文氏图法，用三个两两相交但不共点的封闭曲线所组成图形来研究集合中的元素，即参赛人员的分布情况.

解 作两两相交但不共点的封闭曲线，如图.

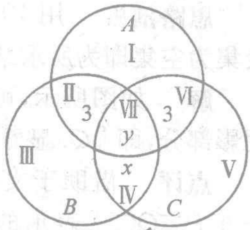


图 1.2.3

设 A={参加游泳比赛的同学}，它包括四个区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅵ、Ⅶ，共 15 个元素. B={参加田径比赛的同学}，它包括四个区域