普通高等教育“十一五”国家级规划教材

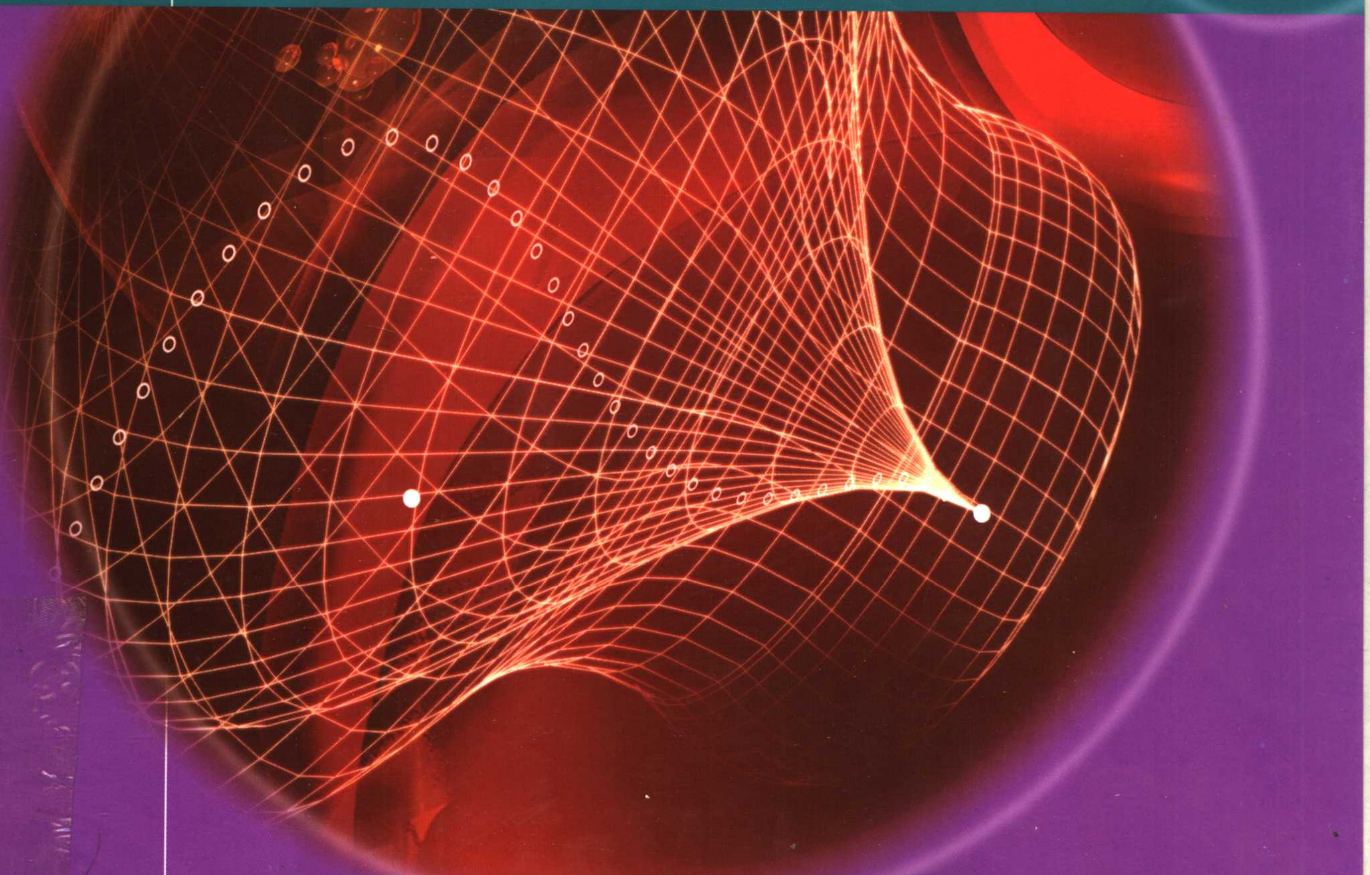
高等学校理工科数学类规划教材

工科微积分

CALCULUS

（下册）

大连理工大学应用数学系 组编



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等学校理工科数学类规划教材

工科微积分

CALCULUS

（下册）

大连理工大学应用数学系　组编
主编　曹铁川
编者　（以编写章节先后排序）
曹铁川　张海文　庞丽萍
金光日　李　林　蒋志刚

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分．下/大连理工大学应用数学系组编．—2版．—大连:大连理工大学出版社，2007.2
ISBN 978-7-5611-3485-6

Ⅰ．工…　Ⅱ．大…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 029044 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
电话:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　　印张:18　　字数:397 千字
2005 年 2 月第 1 版　　2007 年 2 月第 2 版
2007 年 2 月第 3 次印刷

责任编辑:梁　锋　范业婷　　责任校对:婕　琳
封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-3485-6　　定　价:25.00 元

高等学校理工科数学类规划教材

编审委员会

前 言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，它伴随着人类文明同生共存，不断创新．我国数学大师华罗庚对其作过精彩的描述："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在……"．

随着现代科学技术的迅猛发展，当今世界正从工业时代步入信息时代，过去严格的学科界限已经不复存在．各种学科交叉融合，相互促进，从科学理论的发展到技术的发明，再转化为生产力的速度越来越快．在这种大趋势下，数学的应用范围急剧扩展，大量新的数学方法正有效地应用于各个领域．高科技的特点，诸如高速度，高精度，高自动化，高安全性，高质量，高效率等，大多是通过数学模型和数学方法，并借助电子计算机控制加以实现，它们是数学的物化或外在表现，在一定意义上可以说，高科技的本质是数学技术，即数学已不再是传统意义上的思维的体操或科学的语言，而是作为一种技术直接活跃在科学技术舞台上，给人们带来智慧、创造力、信息和财富．

17 世纪，牛顿和莱布尼兹总结了众多数学先驱的研究成果，集大成创立了微积分．可以说，微积分是继欧几里得几何以后全部数学中最伟大的创造．直至今日，作为数学科学的重要支柱，微积分仍保持着强大的生命力．

数学是工科大学生的主要基础理论课，如何对当代大学生进行数学教育，是值得我们深入思考的问题．在大学数学中，微积分占有主体地位．通过该课程的学习，可获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、向量代数与空间解析几何、无穷级数与微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为学习后继课程奠定必要的基础．通过微积分的学习，还能够培养理性思维能力、综合应用能力、科学计算能力以及创新能力．

不仅如此，当代大学生还应对数学有更为广义而深刻的认识：数学不仅是一种科学，而且是一种文化；数学不仅是一种知识，而且是一种素养；数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式．

能够将这种对数学的认识和理解作为一种理念融入到高等教育中去，并在相关教材中体现出来，是高等教育工作者义不容辞的责任和义务．

大连理工大学是教育部《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》项目的参与单位之一．为了很好地体现以上数学教育理念，并适应当前高等教育情况，使学生在课时减少的情况下能掌握好微积分的基本思想和方法，提高数学素养和能力，我们结合多年的教学经验，编写了这本《工科微积分》教材．我们的编写原则是：按照教育部课程指导委员会对工科大学微积分课程的要求，广泛汲取传统教材和其他改革教材的优点，结合教学实际，努力使其成为一部结构合理，难度适中，逻辑清晰，叙述详细，特色鲜明，便于学习的

教材．

本教材共分上、下两册，我们力图体现下面特点：

1. 遵循认识规律，揭示数学发现

对于概念、定理、公式，尽可能从直观背景出发，提出问题，分析问题，水到渠成地得出结论，然后再抽象论证．在阐述过程中，努力将微积分的基本思想融入其中，引导学生学会从量化的角度数学地思考问题，学会用微积分的观点、方法认识和处理问题．

2. 适当调整知识体系

本着宏观不动，微观调整的原则，对传统内容适当增减．在局部章节采用新讲法．例如，在极限部分，突出了函数极限的地位，削减了数列极限的篇幅，用整标函数的观点认识和定义数列，把数列极限作为函数极限的特例，并用海涅定理将二者统一起来，从而使函数极限的性质和运算很自然地移植到数列上来，避免了叙述上的雷同与重复；在一元函数积分学中，先讲定积分，着重讲解积分思想、微积分基本公式，而不定积分和积分法作为定积分的计算工具随后才引入；在多元函数积分学中，把重积分、对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分，统一为数量值函数在几何形体上的积分；把对坐标的曲线积分、曲面积分统一为向量值函数在有向曲线（面）上的积分，并与向量场和物理背景有机地结合起来，这样处理可使学生在较高层次上理解积分的本质．考虑到某些专业基础课和物理课教学的需要，我们把微分方程一章放在了上册．

3. 加强应用意识的培养，突出微积分的强大应用功能

当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 P · D. 拉克斯（Lax，Peter D）指出："目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃，而且成就辉煌，但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其他科学的相互关系．这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的．纠正这种不平衡是一种教育工作，这必须从大学一开始就做起，微积分是最适合从事这项工作的一门课程．""在微积分里，学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言，可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉．最后，很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案．"

我们非常赞赏这些观点．为了激发学生的学习热情，开阔眼界，活跃思想，培养学习兴趣和应用意识，在选材上，我们非常注意联系工科实际，除经典的力学、物理学实例外，还增加了化学、生态、经济、管理、生命科学、军事、气象、医学、农业及日常生活中的实例．同时还增设了一些简单的数学建模实例．

特别需要指出的是，在写作风格上，我们一改数学教材的古板面孔，在每一章的开头，都针对该章的教学内容，提出一些饶有趣味的具有真实背景，且不乏时代感的应用问题，并在每一章末设有应用实例一节．相信这些内容的设置，会更进一步激发学生学习微积分的欲望．

4. 加强综合应用数学知识能力的训练

各章节的例题和习题比较丰富，特别是适量选编了一些综合性的题目，这有利于学生提高分析问题和解决问题的能力．对某些运算技巧（例如积分技巧）作了淡化处理．因为此类技巧并未涉及基本的数学思想和方法，况且有些问题利用日臻完善的计算机软件即可轻易解决．

5. 融入微积分演进历史

教材中适量融入了微积分发展过程中的一些重要思想，结合相关章节介绍相关原理产生的背景，展示数学先驱们的重大贡献，使学生在学习的同时，从微积分的发展足迹中受到启迪．

另外，对于重要数学名词，本教材给出中英文对照，为学生阅读英文资料提供了方便

本教材由大连理工大学应用数学系组织编写，曹铁川任主编并负责统稿．具体执笔依次是：曹铁川、张海文、蒋志刚、金光日、李林、孙丽华、庞丽萍．施光燕担任主审．

本教材配有《工科微积分同步辅导》教学参考书．

本教材2006年列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材．中国科学院院士钟万勰对教材的修改提出了宝贵意见，大连理工大学教学名师施光燕教授和应用数学系南基洙教授，以及部分兄弟院校的同行也提出了重要意见，在此一并表示感谢．

本版的修订工作由曹铁川完成.

高等教育正面临着新的挑战和机遇，我们热切希望大家一起面对挑战，抓住机遇，积极投入高等教育改革的探索和实践中．

大家有任何意见或建议，请通过以下方式与我们联系：

邮箱　jcjf@dutp. cn

电话　0411-84707962;84708947

编著者

于大连理工大学

2007 年 2 月

目 录

第5章 向量代数与空间解析几何

VECTORS AND ANALYTIC GEOMETRY IN SPACE

向量是对自然界和工程技术中存在着的既有大小又有方向的一类量的概括和抽象.作为重要的数学工具,向量代数在许多领域都有广泛的应用.

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何问题.空间直角坐标系的建立,把空间的点与三元有序数组对应起来,空间曲面和曲线与三元方程和方程组对应起来,空间向量及其运算的几何形式与坐标形式对应起来.正是这种形与数的结合,使几何目标得以用代数方法达到,反过来,代数语言又因有了几何解释而变得直观.现代计算机技术的发展,使形与数结合的数学方法在科学研究、工程技术乃至影视艺术等领域得到了淋漓尽致的发挥.

向量代数与空间解析几何既是独立的知识体系,同时又是学习多元函数微积分前应作的必要准备.

本章先引进向量的概念,并结合实际背景给出向量的运算.接着通过空间直角坐标系的建立,对向量及其运算用坐标法进行量化处理.在空间解析几何部分,又以向量为工具着重讨论平面和空间直线方程.在曲面方程中,着重讨论柱面、旋转曲面及锥面,并用截痕法研究二次曲面的图形.

5.0 引　例

在前几章，我们接触了一些用参数方程和极坐标方程表示的曲线. 这些曲线大都特色鲜明，图形优美. 在这些曲线中，许多都有着实际应用背景，星形线就是其中一种. 你知道它是怎样形成的吗？

瑞士数学家欧拉曾提出这样一个问题：如何用一个四面体的棱长表示四面体的体积？

以上两个问题，用本章提供的向量代数的方法都不难解决.

你一定有这样的经历：当一架超音速飞机在高空飞行时，总是先看见飞机从空中掠过，稍后才能听到飞机的轰鸣声. 试问，在看到飞机同一时刻能够听到飞机声响的范围是怎样的区域？有趣的是该区域居然是一个以飞机为顶点的圆锥体，在此圆锥体外，无论离飞机多么近，也不会听到飞机的轰鸣声. 这就是著名的"马赫锥"问题. 在本章末，我们将用空间解析几何的方法，推导出马赫锥圆锥面的方程.

5.1 向量及其运算

5.1.1 向量的概念

在现实生活中，我们遇到的量常可以分为两种类型. 一类量在取定测量单位之后，用一个实数就可以表示出来，如长度、体积、温度、质量、能量等，这类量称为**数量**或**标量**(scalar). 另一类量不仅有大小，而且还有方向，例如，描述一个物体的运动速度，只指出速度的大小还不够，还要同时指出速度的方向才算完整. 类似的量还有很多，如力、位移、加速度、力矩、电场强度等. 像这样既有大小又有方向的量，称为**矢量**或**向量**(vector).

向量通常用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点所表示的向量记作 $\boldsymbol{AB}$. 向量还常用黑体字母或加箭头的字母表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{F}$ 等. 向量的大小称为向量的**模**(norm)，记作 $|\boldsymbol{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$ 等.

在实际问题中遇到的具体向量，有时与起点有关，有时与起点无关，在数学上只讨论与起点无关的向量，即所谓**自由向量**，也就是只考虑向量的大小和方向这两方面的属性，而不考虑它的起点在何处. 因而本教材中的向量可以任意作平行移动，只要平移后能完全重合的向量都认为是相等的. 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果它们的模相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**(unit vector). 模等于 0 的向量称为**零向量**(zero vector)，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向可以看做是任意的，即可根据情况任意指定. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

若将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，则表示它们的有向线段的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称

为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5-1),记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

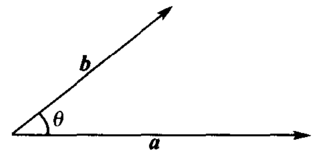


图 5-1

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π,即它们的方向相同或相反,则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因为相互平行的向量经平移后可以位于同一直线上,故又称两平行的向量**共线**. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于$\frac{\pi}{2}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **垂直**或**正交**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

因为零向量的方向可以看做是任意的,因此在具体问题中,零向量可以认为与任何向量都平行或垂直.

5.1.2 向量的线性运算

向量最基本的运算是向量的加法和向量与数的乘法,这两种运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

在力学中,求力的合成与分解用的是平行四边形法则,在物理学中出现的向量也用这个方法进行合成与分解. 由此可以规定向量的加法运算.

对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$. 在以 AB、AD 为邻边所作的平行四边形 $ABCD$ 中,记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AC}$,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 5-2),记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

此规则称为向量相加的**平行四边形法则**.

求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的运算称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法. 也可用下面的方法求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5-3):作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{AC}$ 表示的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,此规则称为向量相加的**三角形法则**. 从图 5-2 和图 5-3 中可明显看出,用平行四边形法则和用三角形法则求出的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一致的. 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行时,用三角形法则求它们的和也是适用的.

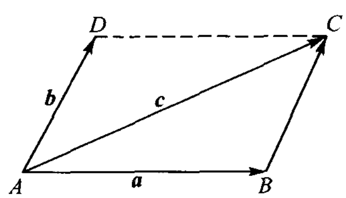


图 5-2

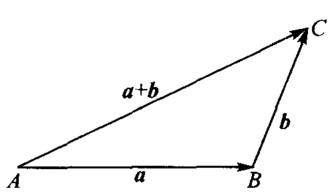


图 5-3

向量的加法满足下列运算规律:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律).

由向量加法的平行四边形法则知,交换律显然是成立的,结合律则可由图 5-4 得到验证.

根据零向量、负向量的定义及加法的运算规律,立即得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

利用负向量可以规定向量的**减法**,向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**差**为

$$a-b=a+(-b).$$

向量的减法也可以用三角形法则表示(图 5-5).

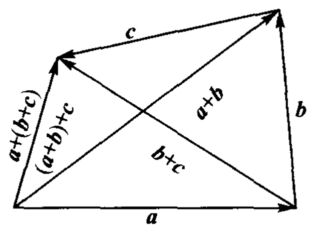


图 5-4

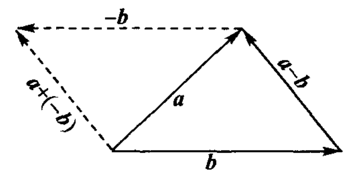


图 5-5

因为向量的加法满足交换律和结合律,所以加法可以推广至求任意有限个向量和的情况. n 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 相加可写成

$$a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

并容易看出只要把 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次首尾相接,则由 a_1 的起点到 a_n 的终点的有向线段所表示的向量即为所求的和. 图 5-6 给出了 $n=5$的情况:

$$s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

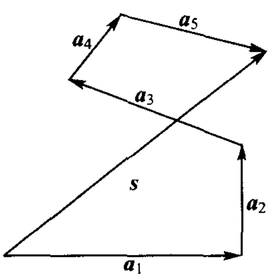


图 5-6

2. 向量与数的乘法(简称数乘)

设 a 是一向量,λ 是一实数,我们定义 a **与** λ **的乘积**(简称数乘)是一个向量,记作 λa,它的模 $|\lambda a|=|\lambda|\cdot|a|$,它的方向,当 $\lambda>0$ 时与 a 相同,当 $\lambda<0$ 时与 a 相反(图 5-7).

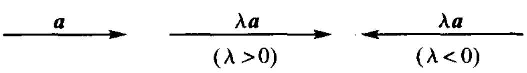


图 5-7

特别地,

$$1\cdot a=a,\quad (-1)a=-a.$$

当 $\lambda=0$ 时,

$$\lambda a=\mathbf{0}.$$

显然,对于任意向量 a、b 和实数 λ、μ,数乘满足下列运算规律:

(1)$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a=\mu(\lambda a)$(结合律);

(2)$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$(对实数的分配律);

(3)$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$(对向量的分配律).

由向量加法和数乘的定义可以直接推出(1)、(2). 图 5-8 给出了(3)的几何解释.

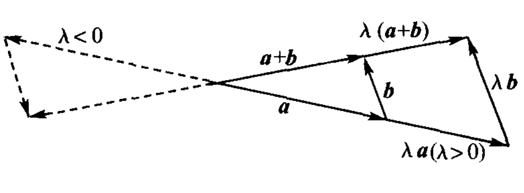


图 5-8

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 注意到 $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$，可见 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a$，于是有

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.}$$

这说明任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

进而可以得到下面的命题：

命题 5-1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 由向量数乘的定义立即得到充分性. 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$，有 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{e}_b/\!/\boldsymbol{e}_a$，这里 $\boldsymbol{e}_b$ 和 $\boldsymbol{e}_a$ 分别是与 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，因而 $\boldsymbol{e}_b=\pm\boldsymbol{e}_a$. 于是

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=|\boldsymbol{b}|(\pm\boldsymbol{e}_a)=|\boldsymbol{b}|\left(\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

利用向量的线性运算，有时可方便地证明一些几何命题.

【例 5-1】 证明三角形两腰中点的连线平行于底边，且等于底边的一半.

证明 如图 5-9 所示，在△ABC 中，D、E 分别为 AB、AC 的中点，

$$\boldsymbol{DE}=\boldsymbol{DA}+\boldsymbol{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{BA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AC})=\frac{1}{2}\boldsymbol{BC},$$

所以 $\boldsymbol{DE}/\!/\boldsymbol{BC}$，且 $|\boldsymbol{DE}|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{BC}|$.

设有向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果通过平移将它们的起点移至同一点后，这些向量均在同一平面上，则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ **共面**.

命题 5-2 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，则存在实数 λ 和 μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证明 因为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，故可知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量. 过一定点 O 作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$. 由题设知 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 共面.

过点 C 分别作直线 OB 和 OA 的平行线，交 OA 于 E，交 OB 于 F（图 5-10），从而

$$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OE}+\boldsymbol{OF}.$$

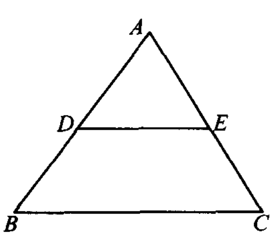


图 5-9

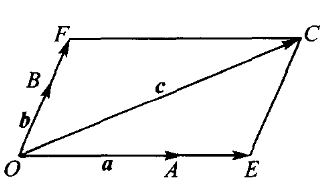


图 5-10

又因 $\boldsymbol{OE}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 共线，由命题 5-1 知存在实数 λ，使得

$$\boldsymbol{OE}=\lambda\boldsymbol{OA}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

同理存在实数 μ，使得

$$\boldsymbol{OF}=\mu\boldsymbol{OB}=\mu\boldsymbol{b}.$$

于是

$$\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

进而还可以得到：

命题 5-3 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面，则对任一向量 $\boldsymbol{d}$，存在实数 λ、μ、ν，使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

该命题证法类似命题 5-2，作为练习留给读者完成.

5.1.3 向量的数量积（点积、内积）

由物理学知，某物体在力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下，沿直线从点 A 移至点 B，用 $\boldsymbol{s}$ 表示物体位移 $\boldsymbol{AB}$，那么力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角（图 5-11）.

由此我们规定向量的数量积运算.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则称实数 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（scalar product），或称**点积**（dot product），也称**内积**（inner product），记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.}$$

按照数量积的定义，力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功可表示为 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

下面给出数量积的几何意义.

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线为 l，且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$. 用有向线段 $\boldsymbol{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，过点 A 和点 B 作平面垂直于直线 l，并与 l 分别交于点 A' 和点 B'（图 5-12），则称点 A' 和点 B' 分别为点 A 和点 B 在 l 上的**投影**，称有向线段 $\boldsymbol{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影向量**. 容易看出

$$\boldsymbol{A'B'}=(|\boldsymbol{AB}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a,$$

称上式中的实数 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**（projection），并记作 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$. 当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量的长度；当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量长度的相反数；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于零. 我们还注意到，无论向量 $\boldsymbol{b}$ 如何平移，它在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影都是同一个实数，即具有唯一性.

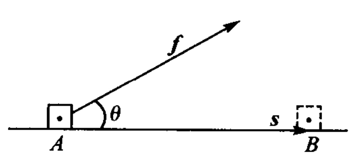


图 5-11

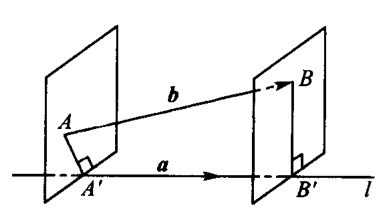


图 5-12

根据数量积的定义，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，立即得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

这表明，数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影的 $|\boldsymbol{a}|$ 倍，特别是当 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

不难验证，投影具有下面的线性性质：

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}.$$

由向量投影的定义，可立即推出前一式，图 5-13 给出了后一式的几何解释.

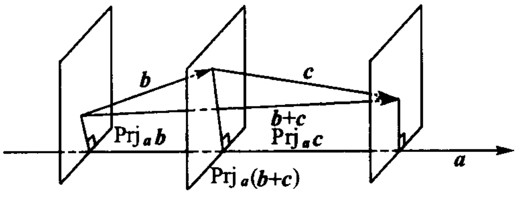


图 5-13

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ、μ，向量的数量积满足下面的运算规律：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(数乘结合律)；

(3)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

前两式由数量积和数乘定义可立即推出. 式(3)当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时自然成立. 下面就 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 的情况给予讨论，有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

这就验证了分配律的正确性.

由数量积的定义还可推知：

> 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模
>
> $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$
>
> 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角满足
>
> $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$
>
> $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是
>
> $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

【例 5-2】 设流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 流经平面 Π，在 Π 上有一面积为 A 的区域，$\boldsymbol{e}_n$ 为垂直于 Π 的单位向量[图 5-14(a)]，试用数量积表示流体经过该区域且流向 $\boldsymbol{e}_n$ 所指一侧的流量(即单位时间内流过该区域的流体质量)，已知流体的密度为常数 ρ.

解 单位时间内流经该区域的流体是底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体[图 5-14(b)]. 设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角为 θ，则此斜柱体的体积为

$$V=A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n.$$

从而所求流量为

$$\Phi=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n.$$

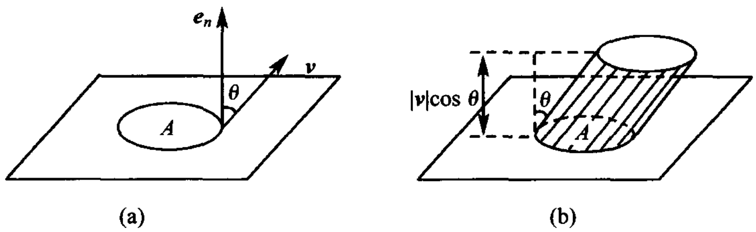


图 5-14

5.1.4 向量的向量积(叉积、外积)

在物理学中，讨论刚体转动时，要考虑作用在刚体上的力所产生的力矩. 例如，一物体的支点为 O，力 $\boldsymbol{f}$ 作用在物体上的点为 A，$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 的夹角为 θ，点 O 到力 $\boldsymbol{f}$ 作用线的距离为 $|OP|$(图 5-15). 则力 $\boldsymbol{f}$ 对支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量，它的大小为力的大小与支点到力作用线距离的乘积，即

$$|\boldsymbol{M}|=|OP||\boldsymbol{f}|=|\boldsymbol{OA}||\boldsymbol{f}|\sin\theta.$$

$\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{OA}$ 与 $\boldsymbol{f}$，指向符合"右手法则"，即当右手的四指从 $\boldsymbol{OA}$ 转向 $\boldsymbol{f}$ 时(转角为两者的夹角)，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向. 由此我们规定向量的向量积运算.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(vector product)是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

它的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则(图 5-16).

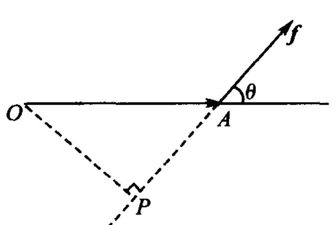


图 5-15

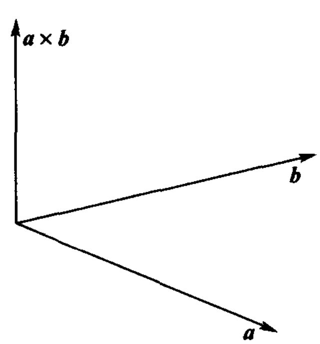


图 5-16

向量的向量积也称向量的**叉积**(cross product)或**外积**(outer product).

据此定义，上述力矩可以记作 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{f}$.

两向量的向量积有如下几何意义：

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(图 5-17)；

(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与一切既平行于 $\boldsymbol{a}$ 又平行于 $\boldsymbol{b}$ 的平面垂直.

向量积的几何意义在后面的空间解析几何中有着重要的应用.