華夏英才基金學術文庫

周建伟 编著

代数拓扑讲义

科学出版社
www.sciencep.com

華夏英才基金學術文庫

代数拓扑讲义

周建伟　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容以基本群、同调群为主. 全书共五章. 第 1 章介绍基本群与覆盖空间; 第 2 章定义并讨论单纯同调群; 第 3 章介绍奇异同调群, 证明了奇异同调群是同伦不变量; 第 4 章继续讨论同调群的性质, 研究的主要工具是正合同调序列与切除定理; 第 5 章介绍奇异上同调群并讨论它们的性质, 证明了万有系数定理与 Poincaré 对偶定理. 本书纲目清楚, 论证严谨, 易于教学.

本书可作为高等院校数学系高年级大学生及研究生的代数拓扑教材或教学参考书, 也可供数学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

代数拓扑讲义/周建伟编著. 一北京: 科学出版社, 2007
(华夏英才基金学术文库)
ISBN 978-7-03-019051-2
I. 代… II. 周… III. 代数拓扑 IV. O189. 2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 080401 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007 年 7 月第 一 版　开本: B5(720×1000)
2007 年 7 月第一次印刷　印张: 14 3/4
印数: 1—3 000　字数: 278 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

代数拓扑是现代数学的主要成就之一, 它在数学的其他分支, 诸如代数、数论、代数几何、微分几何、各种分析（如实分析、复分析、大范围分析）上都有深远的影响与应用. 在理论物理、理论化学等学科也有广泛而深刻的影响.

代数拓扑以代数为工具, 用组合的方法给出拓扑空间的不变量, 这些不变量有很好的代数结构. 而拓扑空间之间的映射自然地给出它们的拓扑不变量之间的映射. 代数拓扑研究这些不变量及其性质.

1990 年左右, 作者开始为研究生开设这一课程, 内容大部分取自 Greenberg 和 Harper 所著 "Algebraic Topology". 在多年的科研教学过程中, 不断修改、完善、充实和提高, 逐步形成现在的讲义.

本书是一本代数拓扑的基础教材, 内容以介绍基本群、同调群为主. 同调群以介绍奇异同调论为主, 这是由于奇异同调群适用于所有的拓扑空间, 而单纯同调群仅适用于可剖分空间, 因而奇异同调群的运用更广泛. 而单纯同调群简单较易把握, 有助于建立一些直观, 便于以后的学习, 因此, 在第 2 章简要介绍单纯同调群. 在全书也穿插介绍一些 De Rham 同调群的知识. 代数拓扑内容丰富, 定义同调群的方法也有许多, 许多内容本书没有涉及, 或者虽然涉及但只讲了很少一点, 有兴趣的读者可以进一步学习研究.

全书共五章. 第 1 章介绍一维同伦群 —— 基本群, 主要内容是基本群与覆盖空间. 第 1.1 和 1.2 节介绍函子、同伦等代数拓扑的基本概念, 它们在本课程中始终起着重要的作用; 第 2 章定义欧氏空间中的多面体并讨论单纯同调群; 第 3~5 章研究奇异同调群. 第 3 章定义奇异同调群并讨论它们的性质, 证明了奇异同调群是同伦不变量, 从而也是拓扑不变量; 第 4 章继续讨论同调群特别是奇异同调群的性质, 研究的主要工具是正合同调序列与切除定理, 第 4.7 节证明了对于多面体或可剖分空间, 单纯同调群与奇异同调群是同构的; 第 5 章介绍奇异上同调群并讨论它们的性质, 证明了万有系数定理与 Poincaré 对偶定理.

虽然代数拓扑的概念简单自然, 是很好的数学, 但是学好它并不容易. 学习代数拓扑的困难是新概念较多而且抽象, 研究所用的方法与数学分析和代数等课程有很大的不同. 针对这一点, 在介绍新概念与定理的证明时我们注意与已有知识的衔接, 尽可能介绍一些背景材料, 把相关内容写清楚. 努力做到条理清楚, 论证严谨, 易于教学, 也注意与其他数学分支的联系及运用. 书中有许多例题及习题, 有助于理解消化理论知识, 扩大知识面.

本书可作为高等院校数学系高年级大学生及研究生的代数拓扑教材或教学参考书, 也可用于自学或供数学工作者阅读. 如果以讲授同调论为主, 可只讲授第 1 章第 1.1 和 1.2 节及第 2~5 章; 如果以讲授奇异同调群为主, 可只讲授第 1 章第 1.1 和 1.2 节及第 3~5 章, 其中有关单纯同调群的内容可以略去.

本书的编写参考了国内外许多同类书籍, 借鉴了其中一些好的写法, 向这些作者表示感谢. 也要感谢我的同事和学生, 他们为本书的写作与试用做了许多工作.

作者感谢中央统战部华夏英才基金给予的出版资助, 感谢李邦河院士与戎小春教授的大力推荐. 苏州大学数学科学学院对本书的编写与试用给予许多支持. 感谢科学出版社责任编辑为此书出版所做的工作.

限于本人的水平和经验, 书中不当之处在所难免, 恳请读者指正.

周建伟

2007 年 1 月于苏州

目　录

第1章 基 本 群

代数拓扑是现代数学的主要成就之一, 它在数学的其他分支, 诸如代数、数论、代数几何、微分几何、分析上有深远的影响与应用, 在理论物理、理论化学等方面也有广泛而深刻的影响. 代数拓扑是研究拓扑空间、微分流形的重要工具. 它的关键思想是给拓扑空间及它们的映射附上代数结构, 这些代数结构在一些空间变形和映射下都是不变的.

为了证明两个拓扑空间同胚, 需要构造一个既单且满, 其逆映射也连续的映射, 把一个空间映为另一个空间; 而为了证明两个空间不同胚, 则需证明这样的映射不存在, 后者往往更困难. 本书利用代数的方法研究拓扑空间, 即在拓扑空间上构造有很好代数结构的拓扑不变量. 代数拓扑主要研究这些不变量以及它们的性质. 如果两个拓扑空间的拓扑不变量不相同, 那么它们不可能同胚. 本章定义和讨论基本群. 第 1.1 和 1.2 节介绍一些代数拓扑的基本知识与概念, 它们在本书中始终起着重要的作用. 第 1.5 和 1.6 节介绍一些覆盖空间与万有覆盖空间的知识, 它们与基本群有密切的关系.

1.1 函 子

代数拓扑讨论的不变量许多可以归结为某种"函子". 在定义函子之前, 先介绍一些群同态的概念.

设 G, H 是两个群, 如果映射 φ: $G \to H$ 保持 G 与 H 的群运算, 称 φ 是一个同态. 以下分几种情况说明.

如果 G, H 都是交换群, 它们的群运算都用加法表示. 映射 φ: $G \to H$ 是同态是说对 G 中任意元素 g_1, g_2, 有

$$\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2).$$

这时 φ 把群 G 的零元素变成 H 的零元素, 且有 $\varphi(g_1 - g_2) = \varphi(g_1) - \varphi(g_2)$. 例如, 线性空间关于向量的加法都是交换群, 线性空间之间的线性映射都是同态.

如果群 G, H 的群运算都用乘法表示. φ: $G \to H$ 是同态, 那么对 G 中任意元素 g_1, g_2,

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2).$$

这时 φ 把群 G 的单位元变成 H 的单位元, 对 G 中任意元素 g, $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$.

而如果群 G 的运算用乘法表示, H 的运算用加法表示, 对 G 中任意元素 g_1, g_2, 同态 φ: $G \to H$ 满足

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2).$$

这时 φ 把乘法群 G 的单位元变成加法群 H 的零元素, 也有 $\varphi(g^{-1}) = -\varphi(g)$.

类似可以给出 G 是加法群 H 是乘法群时映射 φ: $G \to H$ 是同态的条件.

拓扑空间 X, Y 之间的连续映射记为 f: $X \to Y$. 拓扑空间之间的连续映射可以复合, 如果 f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ 是两个连续映射, 则 $g \circ f$: $X \to Z$ 也是连续映射. 假设 $\mathcal{T}$ 是所有拓扑空间或者是具有某一类性质的拓扑空间的集合, $\mathcal{T}$ 叫做一个*范畴*. 设 $\mathcal{G}$ 是所有群的集合.

由于本书主要考虑拓扑空间之间的连续映射及它们的性质, 以后我们简称连续映射为映射.

定义 1.1.1　设有映射 F: $\mathcal{T} \to \mathcal{G}$, 对每个 $\mathcal{T}$ 中拓扑空间 X 定义一个群 $F(X)$, 并且对每个连续映射 f: $X \to Y$ 定义了一个群同态 $F(f) = f_*$: $F(X) \to F(Y)$. 它们满足

(1) 如果 $X = Y$ 且 $f = id_X$, 则 $f_* = id$: $F(X) \to F(X)$;

(2) 对于任意两个映射 f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$, 总有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

称 F 是范畴 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{G}$ 的*共变函子*, 简称*函子*.

定义中 id 表示恒同映射, 例如, id_X: $X \to X$ 表示拓扑空间 X 到自己的恒同; $F(X)$ 是群, id: $F(X) \to F(X)$ 是群 $F(X)$ 上的恒同.

由函子的定义, 一个函子定义了两方面的映射, 一个是拓扑空间的集合到群的集合的映射, 即 F: $\mathcal{T} \to \mathcal{G}$, 它对于 $\mathcal{T}$ 中每一个拓扑空间 X 给出一个群 $G = F(X)$; 另一个是拓扑空间之间的映射所成集合到群之间的同态的集合的映射, 即把 f: $X \to Y$ 映射成 $f_* = F(f)$: $F(X) \to F(Y)$. 定义中两个映射

$$F(X) \xrightarrow{f_*} F(Y) \xrightarrow{g_*} F(Z)$$

的合成就是 $(g \circ f)_*$: $F(X) \to F(Z)$.

例 1　平凡函子. 设 $\{e\}$ 是独点群, 也就是仅由单位元构成的群. 对任意 $X \in \mathcal{T}$, 定义 $F(X) = \{e\}$, 容易验证这样的 F 定义了一个函子.

所以函子总存在, 自然, 这样的平凡函子没有什么用处.

如果 A 是拓扑空间 X 的子集, 具有 X 的诱导拓扑. 也就是说, 如果 U 是 X 中开集, 那么 $A \cap U$ 是 A 中开集, 并且 A 中开集都是这样生成的, 称 A 是 X 的子空间. 这样的两个拓扑空间记为 (X, A), 称为一个*空间偶*. 设 (Y, B) 是另一个空间偶, 如果有连续映射 f: $X \to Y$, 并且 $f(A) \subset B$, 则 f 限制于 A 上得连续映射 $f|_A$: $A \to B$. 这样的映射称为空间偶的连续映射, 简称为映射, 记为 f: $(X, A) \to (Y, B)$.

如果另有空间偶的映射 g: $(Y,B)\to(Z,C)$, 则

$$g\circ f\colon (X,A)\to(Z,C)$$

也是空间偶的映射. 如果 f: $(X,A)\to(Y,B)$ 中 A 为空集 $\varnothing$, 则 f: $(X,\varnothing)\to(Y,B)$ 也有意义, 这时简记为 f: $X\to(Y,B)$.

上面定义的函子可以推广到所有空间偶所成的集合上, 这时只需把拓扑空间 $X,Y,\cdots$ 换成空间偶 $(X,A),(Y,B),\cdots$, 拓扑空间之间的映射换成空间偶之间的映射. 读者可以对照定义 1.1.1 写出相应的定义.

以后, 我们会看到本书所讨论的主要内容如基本群, 单纯、奇异同调群等都是函子, 它们都是非平凡的函子. 其中基本群、同调群中的相对同调群都是空间偶所成的集合 $\mathcal{T}$ 上的函子, 这样的 $\mathcal{T}$ 也是一个范畴.

性质 1.1.1　设 F: $\mathcal{T}\to\mathcal{G}$ 是一个函子, 如果 $\mathcal{T}$ 中两个拓扑空间 X,Y 同胚, 那么它们对应的群 $F(X)$ 与 $F(Y)$ 是同构的.

证　设 f: $X\to Y$ 是拓扑空间 X,Y 的同胚映射, f^{-1}: $Y\to X$ 是它的逆映射. 由函子定义有 f_*: $F(X)\to F(Y)$ 与 $(f^{-1})_*$: $F(Y)\to F(X)$. 由定义 1.1.1 中条件 (1) 与 (2) 可得

$$(f\circ f^{-1})_*=f_*\circ(f^{-1})_*=id\colon F(Y)\to F(Y),$$

同理 $(f^{-1})_*\circ f_*=id$: $F(X)\to F(X)$. 因此, $(f_*)^{-1}=(f^{-1})_*$: $F(Y)\to F(X)$ 是同态 f_*: $F(X)\to F(Y)$ 的逆映射. 这证明了群 $F(X)$ 与 $F(Y)$ 是同构的.

类似可以定义*反变函子*, 我们通过下面的例子说明什么是反变函子.

设 M 是一个 n 维的微分流形, 以 $A^k(M)$ 记 M 上全体 k 次外微分形式, 其中 $A^0(M)=C^\infty(M)$ 是 M 上可微函数的集合,

$$d\colon A^k(M)\to A^{k+1}(M)$$

是外微分算子.

$$Z^k(M)=\{\xi\in A^k(M)\mid d\xi=0\},$$
$$B^k(M)=\{d\eta\mid \eta\in A^{k-1}(M)\},$$

分别是 M 上 k 次闭形式与恰当形式的集合. 由 $d\circ d=0$ 可知 $B^k(M)\subset Z^k(M)$, 定义商群

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M,R)=Z^k(M)/B^k(M),\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

$H^k_{\mathrm{DR}}(M,R)$ 叫 M 上 k 维 *De Rham 同调群*. 如果 M 是紧致连通的微分流形, 那么可以证明 $H^k_{\mathrm{DR}}(M,R)$ 是一个有限维的向量空间. 由外微分形式的加法, $A^k(M)$ 是一个交换群, 因此, $H^k_{\mathrm{DR}}(M,R)$ 也是交换群.

如果 N 是另一个微分流形, f: $M \to N$ 是流形之间的光滑映射, 那么有余切映射

$$f^*: A(N) \to A(M), \quad \text{并且} \quad d \circ f^* = f^* \circ d.$$

因此 f^* 分别把闭形式与恰当形式变成闭形式与恰当形式, 从而诱导映射

$$H^k_{\mathrm{DR}}(f) = f^*: H^k_{\mathrm{DR}}(N, R) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M, R).$$

这样, H^k_{DR} 定义了一个反变函子, $k = 0, 1, \cdots$. 对于这一函子, $\mathcal{T}$ 是微分流形所成的集合. H^k_{DR} 满足

(1) 如果 $M = N$, 则 $H^k_{\mathrm{DR}}(id_M) = id$: $H^k_{\mathrm{DR}}(M, R) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M, R)$;

(2) 如果 f: $M \to N$, g: $N \to P$ 是两个光滑映射, 则有

$$(g \circ f)^* = H^k_{\mathrm{DR}}(g \circ f) = H^k_{\mathrm{DR}}(f) \circ H^k_{\mathrm{DR}}(g) = f^* \circ g^*: H^k_{\mathrm{DR}}(P, R) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M, R).$$

仍假设 $\mathcal{T}$ 是所有拓扑空间或者是具有某一类性质的拓扑空间的集合, $\mathcal{G}$ 是群的集合.

定义 1.1.2 设有映射 F: $\mathcal{T} \to \mathcal{G}$, 即对每个 $\mathcal{T}$ 中拓扑空间 X 定义了一个群 $F(X)$, 且对每个映射 f: $X \to Y$, 存在同态 $f^* = F(f)$: $F(Y) \to F(X)$. 它们满足

(1) 如果 $X = Y$ 且 $f = id_X$, 则 $f^* = id$: $F(X) \to F(X)$;

(2) 对于任意两个映射 f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$, 总有 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

称 F 是范畴 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{G}$ 的反变函子.

这一定义要求 f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ 诱导的两个映射

$$F(Z) \xrightarrow{g^*} F(Y) \xrightarrow{f^*} F(X)$$

的合成是 $(g \circ f)^*$: $F(Z) \to F(X)$.

定义 1.1.1 中函子与定义 1.1.2 中反变函子的主要区别在于: 拓扑空间之间的映射 f: $X \to Y$ 诱导的群之间同态的方向不同. 函子诱导 $f_* = F(f)$: $F(X) \to F(Y)$, 而反变函子诱导 $f^* = F(f)$: $F(Y) \to F(X)$.

由于本课程主要研究拓扑空间的不变量, 它们都可以归结为某种函子, 所以在定义 1.1.1 与定义 1.1.2 中只对拓扑空间给出函子与反变函子的定义. 定义 1.1.1、定义 1.1.2 中 $\mathcal{T}$ 也可以是某一类空间的集合, 而不必是拓扑空间的集合, 这时要求 $\mathcal{T}$ 中空间之间的映射满足定义 1.1.1、定义 1.1.2 的类似条件. 这样的例子见第 5.1 节.

习 题 1.1

1. 设 G, H 是两个交换群, 它们的群运算用加法表示. 如果映射 φ: $G \to H$ 是一个同态, 证明

(1) 对任意 $g \in G$, $\varphi(-g) = -\varphi(g)$;

(2) $\varphi(0) = 0$, 0 表示 G 与 H 中零元素;

(3) 对任意 $g \in G$ 及整数 n, $\varphi(ng) = n\varphi(g)$.

2. 设 φ_1, φ_2: $G \to H$ 是群 G 到加法群 H 的两个同态,

(1) 利用 $(\varphi_1 + \varphi_2)(g) = \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$ 定义映射 $\varphi_1 + \varphi_2$: $G \to H$, 证明 $\varphi_1 + \varphi_2$ 是同态;

(2) 对任意整数 n, 定义 $n\varphi_1$: $G \to H$, $(n\varphi_1)(g) = n\varphi_1(g)$, 证明 $n\varphi_1$ 是同态.

3. 设 φ: $G \to H$ 是交换群之间的同态,

(1) 如果 G_1 是 G 的一个子群, 证明 $\varphi(G_1)$ 是 H 的子群;

(2) 如果 H_1 是 H 的一个子群, 证明 $\varphi^{-1}(H_1)$ 是 G 的子群.

4. (1) 证明函数 $f(t) = e^t$ 是群同态, 它是哪两个群之间的同态?

(2) 证明函数 $g(s) = \ln s$ 是群同态, 它是哪两个群之间的同态?

1.2 映射的同伦与拓扑空间的同伦型

本节介绍拓扑学一些重要的基本概念, 这些概念在后面的各种问题中都要遇到. 本书所讨论的拓扑空间的不变量都是在同伦下不变的, 是同伦不变量.

以 E^n 表示所有实有序数组 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 的集合, 对任意 $u, v \in E^n$, 定义它们的加法

$$u + v = (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n).$$

任意实数 λ 可以乘以 v 得 $\lambda v = (\lambda v_1, \cdots, \lambda v_n)$, 叫做数乘. E^n 关于向量的加法与数乘成为一个 n 维的向量空间. 对任意 $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $u = (u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, 定义它们的内积

$$\langle v, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i.$$

这样 E^n 成为一个欧氏空间, $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ 是向量 v 的长度.

我们也常用 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 表示欧氏空间 E^n 上点, 它是以原点为起点时, 向量 v 的终点表示的点. 两点 $v, u \in E^n$ 的距离是

$$|v - u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i)^2}.$$

这时, $(v_1, \cdots, v_n)$, $(u_1, \cdots, u_n), \cdots$ 叫做欧氏空间 E^n 上点的直角坐标.

1.2.1 映射的同伦

先介绍代数拓扑的一个重要概念 —— 同伦, 直观地说, 同伦就是连续形变. 在给出定义之前, 我们来看下面的例子.

如图 1-2-1, 设 U 是欧氏平面上两个椭圆围成的闭区域, $\xi = P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是 U 上 1 次微分式. 设 C_1, C_2, C_3 是区域 U 内三条曲线, 曲线的方向如图所示. 其中 C_1, C_2 在 U 内围出一个区域, C_1, C_2 是它的边界; 而 C_3 在 U 内围出一个可以收缩成一点的区域. 考虑三个曲线积分

$$a_i = \oint_{C_i} \xi = \oint_{C_i} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad i = 1,2,3.$$

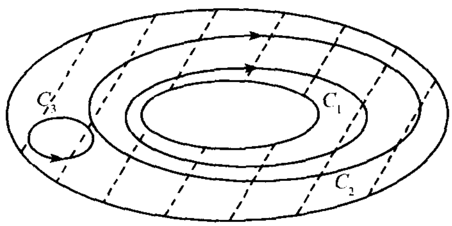

图 1-2-1

如果 ξ 是区域 U 上的闭形式, 即 $d\xi = 0$ 或 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 利用平面区域积分与边界积分的关系, 由 Green 公式得到

$$a_1 = a_2, \quad a_3 = 0.$$

不难知道, 曲线 C_1 在区域 U 内可连续形变为 C_2. 如果两条曲线中的一条可以连续形变为另一条, 我们把这两条曲线叫做同伦的. 上面例子中曲线 C_1 与 C_2 是同伦的; 而 C_3 可以在 U 内连续形变为一点, 因此 C_3 与常值道路同伦. 这里常值道路是指曲线的像是一点.

下面给出同伦的定义. 设 X, Y 是两个拓扑空间, $I = [0,1]$ 是单位线段,

$$X \times I = \{(x,t) \mid x \in X, t \in I\}$$

是 X 与 I 的乘积空间.

定义 1.2.1　设 $f_0, f_1\colon X \to Y$ 是两个连续映射, 如果存在连续映射 $H\colon X\times I \to Y$, 使得

$$H(x,0) = f_0(x), \quad H(x,1) = f_1(x), \quad x \in X.$$

称映射 f_0 同伦于 f_1, 记作 $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$ 或 $H\colon f_0 \simeq f_1$, 有时也简记为 $f_0 \simeq f_1$.

映射 H 也称为 f_0 与 f_1 之间的一个同伦.

由于 H 连续, 对每一 $t \in I$, $f_t(x) = H(x,t)$ 定义了从 X 到 Y 的连续映射. 随着 t 从 0 变到 1, 映射 $f_t\colon X \to Y$ 从 f_0 形变为 f_1, 见图 1-2-2.

对欧氏空间中任意两点 v_1, v_2, 连接 v_1, v_2 的线段上点可以表示为

$$v_1 + t(v_2 - v_1) = (1-t)v_1 + tv_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

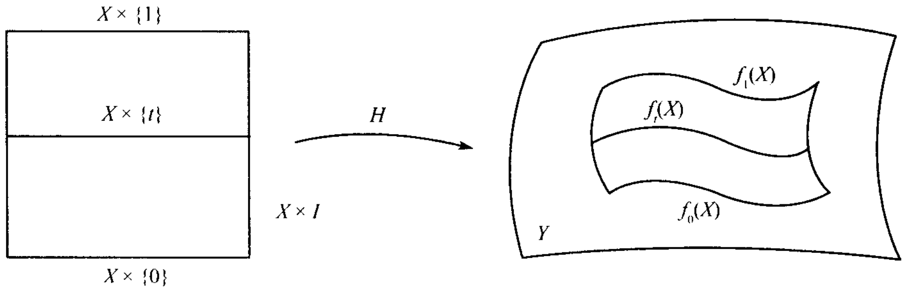

图 1-2-2

例 1 设 C 是欧氏空间中的凸集, 即对任意 $v_1, v_2 \in C$, 连接 v_1, v_2 的线段上点 $tv_1 + (1-t)v_2$ 也都是 C 中点. 设 f_0, f_1 是从拓扑空间 X 到凸集 C 的任意两个映射, 定义映射 H: $X \times I \to C$,

$$H(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x), \quad x \in X,\ t \in I.$$

由于 C 是凸集, 对于 $f_0(x), f_1(x) \in C$, 都有 $H(x,t) \in C$; 因为 f_0 与 f_1 都连续, 映射 H: $X \times I \to C$ 也是连续的. 因此 H 是映射 f_0 与 f_1 的同伦, 我们证明了从任一拓扑空间到一个凸集的任意两个映射是同伦的.

特别, 设 f_1 是常值映射, 即存在 $v_0 \in C$, 使得对任意 $x \in X$, $f_1(x) = v_0$, 上面证明了从 X 到凸集 C 的任意一个映射同伦于常值映射. 注意, 常值映射总是连续的.

例 2 $S^2 = \{v \in E^3 \mid |v| = 1\}$ 是 3 维欧氏空间中单位球面, 设 X 是任意一个拓扑空间, f, g: $X \to S^2$ 是两个连续映射. 如果对任意的 $x \in X$, $f(x) \neq -g(x)$, 证明 $f \simeq g$.

证 由于 $f(x) \neq -g(x)$, 对任意 $x \in X$, $t \in I$, $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$. 否则, 从 $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$ 可得 $|(1-t)f(x)| = |-tg(x)|$, 于是 $|1-t| = |t|$, $0 \leqslant t, 1-t \leqslant 1$, 得 $t = \dfrac{1}{2}$, 因此 $f(x) = -g(x)$, 此为矛盾. 可以定义映射 H: $X \times I \to S^2$,

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|},$$

其中 $|\cdot|$ 是欧氏空间中向量的长度. 显然 $f(x) = H(x,0)$, $g(x) = H(x,1)$, 因此只要证明映射 $H(x,t)$ 是连续的.

$(1-t)f(x) + tg(x)$, $|(1-t)f(x) + tg(x)|$ 关于 t, x 都是连续的, 因而映射 $H(x,t)$ 是连续的, H 是映射 f, g 的同伦.

类似可得, 如果对于任意 $x \in X$, $f(x) \neq g(x)$, 则有 $f \simeq -g$.

下面给出同伦的一些性质.

引理 1.2.1　设 X, Y 是两个取定的拓扑空间, 从 X 到 Y 的映射的同伦关系是等价关系.

证　(1) 反身性. 设 f: $X \to Y$ 是连续映射, 令 $H(x,t) = f(x)$, 由同伦的定义, $f \simeq f$.

(2) 传递性. 如果 H: $f \simeq g$, G: $g \simeq h$: $X \to Y$ 分别是 X 到 Y 的映射 f, g 与 g, h 的同伦, 定义

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

由于 $H(x,1) = G(x,0) = g(x)$ 对任意 $x \in X$ 成立, 映射 $F(x,t)$ 是连续的, 且实现了 f 与 h 的同伦. 故由 $f \simeq g$, $g \simeq h$, 可得 $f \simeq h$.

同伦 F 与同伦 H, G 的关系见图 1-2-3, 从此图也容易得出 F 的连续性.

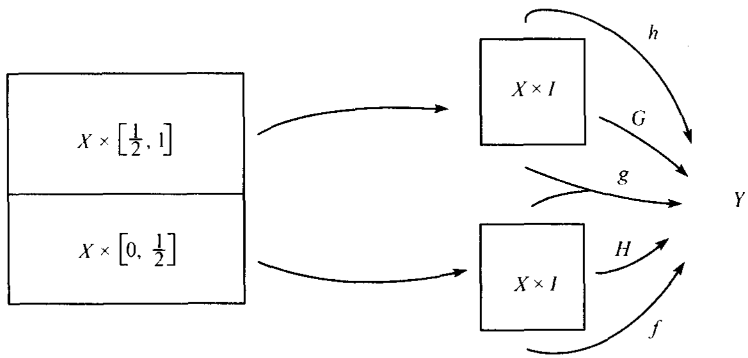

图 1-2-3

(3) 对称性. 如果 H: $f \simeq g$: $X \to Y$, 令 $\widetilde{H}(x,t) = H(x,1-t)$, 则有 $g \overset{\widetilde{H}}{\simeq} f$: $X \to Y$.

从空间 X 到 Y 有许多连续映射, 利用这一引理, 它们可以按照同伦关系进行分类. 与 f 同伦的映射所成的集合记为 $[f]$, 称为 f 的同伦等价类. 从拓扑空间 X 到 Y 的映射的同伦类的全体记为 $[X, Y]$.

引理 1.2.2　如果 $f_0 \simeq f_1$: $X \to Y$, $g_0 \simeq g_1$: $Y \to Z$ 是拓扑空间之间同伦的映射, 那么有

$$g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 \colon X \to Z.$$

证　由引理 1.2.1, 只要证明 $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1$ 与 $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$.