21世纪高等学校教材

大学数学

（人文、社科、外语、体育等专业适用）

主编 燕列雅

副主编 权豫西 李 琪 王兰芳

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

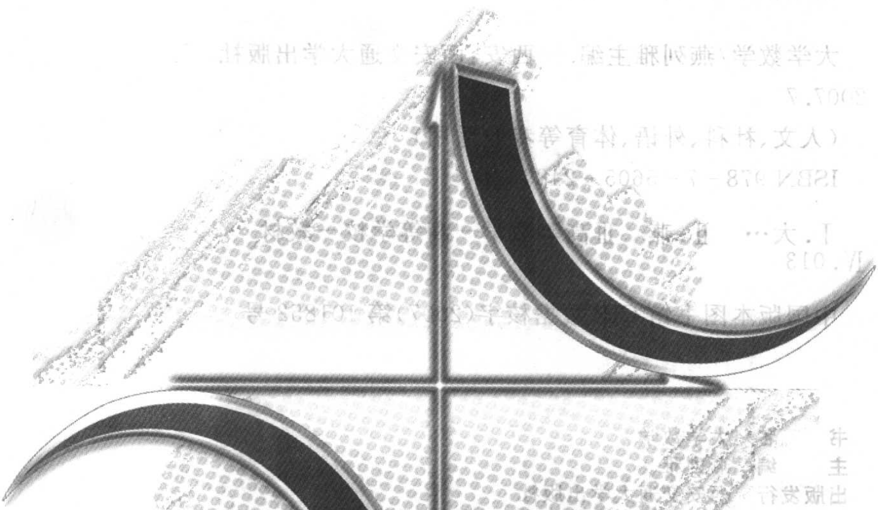
21世纪高等学校教材

大学数学

（人文、社科、外语、体育等专业适用）

主编 燕列雅

副主编 权豫西 李 琪 王兰芳



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是为适应21世纪文科数学课程教学改革而编写的一本教材. 全书共7章,内容包括:数学概述,微积分的理论基础,微分学,积分学,线性代数初步,概率论初步,数学发展史与经典数学问题.

本书在内容编排上特别注意文史、体育、艺术类学生的特点,以数学问题、数学知识为载体,着重介绍数学的思想方法,问题的分析到解决的全过程,使学生从中体会数学方法的特点,提高数学素质.

本书叙述简明易懂,易于教学。适用于政治经济学、法律学、哲学、历史学、考古学、文学、新闻、外语、体育、美学、建筑学、艺术设计等学科的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/燕列雅主编. 一西安:西安交通大学出版社,2007.7

(人文、社科、外语、体育等专业适用)

ISBN 978-7-5605-2489-4

Ⅰ.大… Ⅱ.燕 Ⅲ高等数学一高等学校一教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第101852号

书　名	大学数学
主　编	燕列雅
出版发行	西安交通大学出版社
地　址	西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
字　数	217千字
开　本	727 mm×960 mm　1/32
印　张	11.75
版　次	2007年7月第1版　2007年7月第1次印刷
书　号	ISBN 978-7-5605-2489-4/O·261
定　价	16.00元

前　　言

数学是人类文化的一个重要组成部分.二次世界大战以后,数学与社会的关系发生了根本性的变化,数学已经深入到从自然科学到社会科学的各个领域.著名数学家 A. Kaplan 说:“由于最近 20 年的进步,社会科学的许多领域已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段.”数学对于社会和人文科学的作用,数学对于现代人整体素质的意义,已逐渐被人们所认识。

本书针对文史、体育、艺术、外语类学生的情况,着眼于提高他们的数学素质,其特点表现在以下几个方面:

一、内容组织科学、紧凑。全书共分七章:数学概述,微积分的理论基础,微分学,积分学,线性代数初步,概率论初步,数学发展史与古今数学问题。

数学概述首先让学生从数学家对“数学是什么”的认识中体会随着数学的发展,人们对“数学是什么”的认识所发生的变化,进一步了解数学的特点,数学发展的思想方法经历的四个阶段,特别是数学与文学的关系,数学对体育、法学等学科的影响,激发学习积极性。一元函数微积分学是本书的主要内容,通过第 2、3 章的学习,使学生认识到高等数学有着完全不同于初等数学的思维方式,第 4 章在有了定积分的概念后,对微积分的基本思想方法做了总结,让学生认识到微积分基本思想方法的一致性。第 5、6 章对线性代数和概率论做了初步介绍,使学生对离散量的基础——线性代数以及随机量的基础——概率统计有所了解。在学生具备了这些基本知识后,又对数学的发展按时间分期进行阐述,并介绍数学发展经历的三次危机,同时用通俗的语言介绍了一些迄今已经解决或尚未完全解决的古今数学问题。

二、突出数学的思想方法。内容编排上以数学问题、数学知识为载体,着重介绍数学的思想方法,问题的分析到解决的全过程,体会数学方法的特点。

对于概念的形成过程以及相关的背景知识都做了详细阐述,如函数概念的形成与发展,极限概念的形成,微积分的产生与发展,线性代数研究的问题,从赌博中发展起来的概率理论等等。对计算规则、基本应用等环节,都以讲清数学思想为准绳。

三、应用实例贴近专业或日常生活。每章最后一节都有精选的数学在社会科

学或生活中的应用实例,这些例子都和本章内容密切相关,例如纳税问题,体能消耗问题,人口问题,刑事侦察中死亡时间的鉴定,指派问题,生日概率问题,抽奖问题等等,增加了这门课程的趣味性。

四、有3个附录。附录1介绍了对数学的发展有重要影响的几位数学家,如莱布尼兹和我国数学家吴文俊。附录2列出了五种基本初等函数的定义域、性质和图像。附录3是积分表,以便必要时查阅。

本书是大学文史、体育、艺术类数学课程的教材。内容编排上特别注意文史、体育、艺术类学生的特点,叙述简明易懂,易于教学,适用于政治经济学、法律学、哲学、历史学、考古学、文学、新闻、外语、体育、美学、建筑学、艺术设计等学科的学生使用。每节配有难易适中的习题,第2章到第6章有复习题,书后附有习题参考答案。教师在使用本书时,可根据学时与授课对象,选择若干章节讲授。其中的背景知识亦可穿插于内容中讲授。

本教材是学校重点资助教材,教务处、理学院以及数学系给予了大力支持,赵彦晖教授、杨泮池教授详细审阅了全部初稿,并提出了许多宝贵的建设性意见,王艳、李顺波老师为本书查阅了大量资料,编者在此对他们一并表示衷心地感谢!

本书的内容编排是为适应21世纪文科数学课程教学改革而做的一种尝试,由于编者水平有限,缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2007年5月

目　　录

第1章　数学概述

没有数学，我们无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度。而若没有两者，人们就什么也看不透.

B. Demollins

1.1　数学是什么

1.1.1　数学的内容

数学来源于人类的生产实践活动，它随着社会生产力的发展而发展. 今天的数学是千百年来众多先辈们的不断探索研究积累而成的，已成为拥有几百个分支的大学科.

一般说来，我们把数学分为初等数学和高等数学两大部分.

初等数学基本上是以常量为对象的数学，主要包含代数学和几何学两部分. 代数学是研究数量关系的学科，而几何学是研究空间形式的学科.

高等数学的内容则要丰富得多，以大学工科数学课程设置为例，我们要学习：

微积分与微分方程，这是连续量的基础；

线性代数与空间解析几何，这是离散量的基础；

概率论与数理统计，这是随机量的基础.

这些构成了高等数学的基础部分. 在此基础上，我们还要学习数学物理方法，数值计算方法，应用统计方法，优化方法及数学建模这五大应用数学方法.

作为大学非理工科学生，我们则以这些基础知识为载体，了解和体会数学中一些重要的思想方法.

1.1.2　数学的若干“定义”

数学是什么?人们可根据自己对数学的认识做出各种回答，历史上许多数学家和哲学家对这一问题都有独到的看法.

(1) 古希腊亚里士多德(前 384 ～ 前 322) 认为，数学是对“量”的研究.

(2) 英国培根(约 1214 ～ 约 1292) 称数学为一种使人"机敏精细" 的学问.

(3) 伽利略(1564 ～ 1642) 的名言:"数学是上帝用来书写宇宙的文字."

(4) 法国数学家笛卡儿(1596 ～ 1650) 则称数学是"序和度量" 的科学.

(5) 恩格斯(1820 ～ 1895) 曾说:**"数学乃是关于物质世界的空间形式及其数量关系的科学."**

(6) 德国数学家弗立克斯·克莱因(1849 ～ 1925) 认为数学是"自明之物" 的科学.

(7) 英国数学家怀特海(1904 ～ 1960) 称数学为对于"一切类型的形式的、必然和演绎的推理" 的研究.

从以上这些"定义" 可以看到,随着数学的发展,人们对"数学是什么" 的认识也在发生着变化.事实上,不论是对专家来说,还是对普通人来说,唯一正确全面的回答,不是哲学家几句高深玄妙的言论,而应该是数学发现本身那些活生生的经验(即数学史).从这一点来说,苏联数学家柯尔莫哥洛夫(1903 ～ 1987) 的说法较为客观:**"① 数学是作为关于数、量、几何图形的科学;② 数学是作为关于量的变化及几何的映像的科学;③ 数学是作为关于现实世界一切普遍性、抽象化的数量形式及其空间形式的科学."**

其实数学是人类活动的结果,具有明显的社会性,因此只有真正了解数学历史的人才能对这一问题有较全面的认识.

思考题

1. 谈谈你对数学的认识.

1.2 数学的特点

我们在小学阶段学过数的四则运算,在中学时代学过代数、几何与三角学等数学课程.即使从这些初等数学里也不难觉察到数学有三大特性:**抽象性、精确性和应用的广泛性.**

1.2.1 抽象性

抽象性在简单的数字运算中就已体现出来.比如两个抽象数字相乘,我们并不关心运算中的数字代表什么,是孩子的数目,苹果的数目,还是苹果的单价.一个点沿一个方向和其相反方向延伸,这就是几何中直线的意义,我们不会关心它是拉紧了的绳索,还是一根木棒.

抽象性并不是数学独有的属性,其他任何学科,乃至人类思维都有抽象性.比如说"人" 就是一个抽象的概念,我们只见过张三、李四等,何曾见过"人"?文学中

经常涉及的“爱”也是一个非常抽象的概念.不过,数学的抽象性又不同于其他学科的抽象性.首先,数学的抽象性远远超过其他学科的抽象性,以至于抽象到几乎难以琢磨的程度.比如说,我们生活的这个现实世界是个三维空间,人们对于一维、二维及三维空间很熟悉,在这三种空间中任何两点间的距离可以度量出来,很直观.四维以上的空间,我们就看不见摸不着了,至于无限维空间是什么样就很难理解.其次,在数学的抽象中,仅保留量的关系和空间形式,舍弃掉其他一切.这里量是抽象的,空间也是抽象的.最后一点,也是最惹人注意的一点,那就是数学几乎完全在抽象概念间周旋.

总之,数学是抽象的,量是抽象的,空间是抽象的,一切数学概念是抽象的,数学的方法也是抽象的.

1.2.2 精确性

数学的精确性,确切地说是指逻辑的严密性和结论的确定性.数学推理和论断证明对于每个了解它的人来说,都是确定无疑和无可争辩的.

有这样一个故事,一位数学家,一位物理学家,一位作家坐火车访问云南.作家看到窗外田野上有一只黑羊,感慨道:“想不到云南的羊都是黑的!”物理学家说:“不对,云南至少有一只羊是黑的.”数学家看看窗外,说:“云南至少有一块地上有一只羊,至少半边是黑的.”

数学中的严谨推理和一丝不苟的计算,使得每一个数学结论都是牢固的、不可动摇的.这点对于其他学科影响很大,以致有些学科中的理论,如果不能上升到用数学模型表达就不能令人信服.不过,数学的精确性并不是绝对的,数学的原则也不是一成不变的.

1.2.3 应用的广泛性

数学的广泛应用性是其他任何学科所不能比拟的,几乎所有学科都或多或少地应用着数学.我国著名数学家华罗庚(1910 ~ 1985)曾经这样说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在.”

科学通常分为自然科学和社会科学两大类,数学作为自然科学的一部分,它和哲学一样,是自然科学和社会科学共有的工具.

自然科学中物理学以及天文学上的定律就是用数学公式的形式来描述的;过去化学和生物学与数学联系较少,现在也需要借助数学来发展自己;农业方面要想提高农产品的产量和质量,就需要应用试验设计和优选法;海王星的发现,首先不是通过望远镜,而是利用纸笔,借助于数学公式“算”出来的,望远镜只不过印证了这个“计算结果”;天气预报、地震预报离不开数学;由于数学的关键性应用,有人甚

至称海湾战争是数学战，等等.

社会科学中，这样的例子还有很多.金融经济学借助于数学中的随机分析方法取得了重大的突破；历史学家借助于数学方法开辟了许多过去不为人重视或未很好利用的历史资料的新领域，并大大改进了研究的手段和方法；用数学方法研究语言现象已形成了一门新的交叉学科——数理语言学；数学方法加上计算机技术已成功地运用于文学和艺术的研究，对《红楼梦》作者及成书过程的研究成果，以及分形图像的研究，就是典型的例子；电影电视中引人入胜的动画制作，同样离不开数学.可以这样说，一个社会科学工作者如果掌握了数学工具，其研究领域将会展现一个新的视野.

思考题

1. 数学的特点是什么？
2. 举例说明数学应用的广泛性.

1.3 数学发展的四个阶段

数学的产生、发展来源于生产实际，其思想方法的发展经历了精确数学、随机数学、模糊数学、突变理论四个阶段.如果按质分类，大体可归四大类：必然现象、随机现象、模糊现象和突变现象.在第7章，我们将对数学的发展按时间分期进行阐述.

1.3.1 必然现象与必然数学

必然现象的例子非常多，如金属加热会膨胀，冷却会收缩；异性电荷互相吸引，同性电荷互相排斥；氢在氧气中燃烧生成水.

为描述和研究现实世界的必然现象及其规律，就产生了必然数学.必然数学又称精确数学或经典数学，它是常量数学和变量数学的统称，包括算术、三角、几何、代数、微积分、微分方程论和函数论等分支学科，主要应用在自然科学领域.

1. 常量数学的形成

常量数学是以常量即不变的数量和固定的图形为其研究对象，主要内容是初等数学包括算术、初等代数、初等几何、三角.常量数学的形成经历了从算术解题法到代数解题法这样一个演进过程.

算术解题法

这是我们小学数学的内容，它的特点是只限于对具体的、已知的数进行运算，不允许有抽象的未知数参加.

它的解题步骤为:① 依据问题的条件列出关于具体的已知数的算式;② 通过四则运算求出算式的结果.

它的困难是,在解决那些具有复杂数量关系的应用题时,第 ① 步难以办到. 于是产生了:

代数解题法

这是我们小学高年级和初中数学的内容,其特点为:未知数与已知数有着同等的权利,而方程只是一种条件等式.

其步骤为:列方程,解方程. 解方程的过程是未知数和已知数进行重新组合的过程,即未知数向已知数转化的过程.

总之,算术与代数作为最基础而又最古老的两个分支学科,有着不可分割的亲缘关系,算术是代数产生的基础,代数是算术发展到一定阶段的必然产物.

方程在数学中占有重要的地位,代数解题法对后来整个数学的进程产生了巨大的影响,其中最典型的首推常量数学的形成.

2. 变量数学的产生

变量数学产生于 17 世纪,大体上经历了解析几何的产生和微积分的创立两个具有决定性的重大步骤.

虽然常量数学可以有效地描述事物和现象相对稳定的状态,但对于描述运动和变化,却是无能为力的.

16、17 世纪提出了大量用常量数学无法描述的数学问题,大体可分为以下 5 种类型:

(1) 非匀速运动物体的轨迹(天文学);

(2) 求变速运动物体的速度或路程(物理学);

(3) 求曲线在任一点的切线(光学、力学);

(4) 求变量的极值(力学、天文学);

(5) 计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心、变密度物体的重心以及大质量物体之间的引力等.

这些问题一个共同的特征就是要以“变量”作为其研究对象,于是便产生了变量数学,即从量上描述事物的运动和变化规律的数学部分. 它的分支庞大,如:解析数论、微分几何、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论、级数论、差分学、实变函数论和复变函数论等.

变量数学的产生,使数学自身在思想方法上发生了重大的变革.

1.3.2　随机现象与随机数学

随机现象,也叫或然现象或偶然现象. 比如,已经是大二学生的你,吃完晚饭,

早早地来到公共教室自习,你不知道今天会来多少人,你会认识其中的几个人.又如,你站在马路边观察三十分钟,今天会有几辆奥迪汽车由此经过呢?对随机现象的研究就产生了随机数学.

据报道:1982 年 7 月 4 日,有一位婴儿降生在美国北卡罗来纳州的威尔明市,巧合的是,他的父亲是 1950 年 7 月 4 日出生的,他的祖父是 1920 年 7 月 4 日出生,他的曾祖父同样也是 7 月 4 日出世的,而那天又正好是美国独立一百周年纪念日——1876 年 7 月 4 日,这可谓惊人的巧合.

三百多年前,一些赌徒问著名的数学家伽利略:一次掷三粒骰子并计算总点数,为什么出现总和为 10 的情况比出现总和为 9 的情况要多呢?

平日里摸牌、抓阄、买彩票、投骰子等等都与随机现象密切相关.

总之,随机现象是指事物的变化发展不受单值的确定的因果关系的制约,而是具有几种不同的可能性,究竟何种结果,有随机性、偶然性.

上面提到的美国惊人巧合之事,曾引起了北卡罗来纳大学一位数学家的兴趣,他专门为此进行了计算,最后得出结论:同一家族的四代人在同一日期出生的现象,约 117 亿人中才有一例.对于“巧合之谜”,《科学美国人》杂志的数学专栏编辑马丁·加德纳认为,每天在几十亿人身上发生几千万桩大大小小的事件,因此,时而出现一些令人惊诧的凑巧事件是不可避免的.

由此可见,在纷乱的大量偶然现象背后,往往隐藏着必然的规律.探索这些规律,利用这些规律来为人类服务,正是随机数学的任务.随机数学主要包括概率论、随机过程理论、数理统计学.

1.3.3 模糊现象与模糊数学

1965 年,美国加利福尼亚大学自动控制专家 L. A. 查德(L. A. Zadeh)第一次提出了“模糊集合”的概念,从而为模糊数学的诞生奠定了基础,模糊数学便由此产生了.

模糊现象又称为不分明现象,是指客观事物界限不分明的量和性质.其中最为著名的问题之一就是秃头悖论:人为指定一个自然数 N,当 $n = N$ 时就叫做秃头.若张三正好有 N 根头发,李四正好有 $N+1$ 根头发,仅一根之差,便分楚汉,这难道合理吗?于是约定:若有 N 根头发的人秃,有 $N+1$ 根头发的人亦秃,这时就会导致“秃头悖论”:一切人都是秃头.如果将约定改为:若有 N 根头发者不秃,则有 $N-1$ 根头发者也不秃.可以得出“光头不是秃头”结论.这悖论反映了精确与模糊之间的矛盾,对于模糊的事物,比如秃与不秃,没有绝对的界限.再比如,同样的一个字,由同一个人写上千百次,它们不会绝对相同;天气预报时,在晴天与多云之间不存在明确的界限;在人的思维里,“红色”与“蓝色”、“暖和”与“较冷”、“很高”与“很

矮”、“浓与淡”、“明与暗”、“胖与瘦”、“老年与年轻”、“美与丑” 等，都是没有明确界限的.

如何描述这些模糊现象呢?模糊数学是用数量表示一个事物属于某个模糊概念的程度，即隶属度，以此说明该事物能否包括在那个模糊概念的论域之中. 例如，以年龄为论域，取 $U=[0,100]$. 查德曾给出“年老”Q 与“年轻”y 两个模糊集的隶属函数如下：

$$U_Q(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50\leqslant x\leqslant 100\end{cases}$$

$$U_y(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1}, & 25\leqslant x\leqslant 100\end{cases}$$

从上式可以看出，凡小于 25 岁和大于 75 岁，都分别明晰地属于“年轻” 和“年老”，而大于 25 岁小于 75 岁之间的人都处于“年轻” 到“年老” 的中间过度状态. 如把 55 岁、60 岁、65 岁分别代入 $U_Q(x)$ 分别得：0.5、0.8、0.9，这说明 55 岁、60 岁、65 岁的人属于“年老” 范畴的程度分别为：0.5、0.8、0.9，而 70 岁则达0.97 以上了.

模糊数学在发展过程中，不断提出了新的应用研究课题，如模糊信息、模糊控制、模糊规划与决策、模糊语言、模糊逻辑等. 如今，模糊数学已经越来越广泛地应用到自然科学乃至社会科学的各个领域，如模糊技术可将红绿灯改造得更灵活，可进行计算机图像识别、手书文字自动识别、癌细胞的识别、劳动卫生环境综合评判、天气预报、气象资料分析与决策以及各类信息的分类与评估，等等.

1.3.4　突变现象与突变理论

水的温度不断升高，水的密度便逐渐地变小，在一个标准大气压下，当水温达到 100℃ 时，水的密度突然小到蒸汽出现的程度，于是水沸腾了；两块乌云的电荷不断累积，当到了一定的数量界限时便击穿空气，于是电闪雷鸣发生了；地应力不断增加，当它达到了一定程度时，就会突然地动山摇，地震爆发了. 这些现象都是突变现象.

对这些现象的研究，法国数学家伦尼・托姆(Rene Thom，1923～)做了开创性的工作. 1972 年，他出版了《结构稳定性和形态发生学》一书，系统阐述了突变论. 托姆的突变理论解释了所有不连续的、突变的现象. 有人赞誉它为“数学界的一次智力革命 —— 微积分以后最重要的发现.”

突变以奇点理论为其数学基础，运用拓扑学、结构稳定性等数学工具，以形象而生动的模型来把握事物的量质互变过程.

思考题

1. 简述数学发展的四个阶段.

1.4 社会科学中的数学

数学是人类文化的一个重要组成部分.二次世界大战以后,数学与社会的关系发生了根本性的变化,数学已经深入到自然科学和社会科学的各个领域.著名数学家 A. Kaplan 说:"由于最近 20 年的进步,社会科学的许多领域已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段."数学在文学、语言学、历史学、法学、考古学、美学、体育、艺术等领域都起到令人信服的作用.

1.4.1 文学中的数学

文学意境有着和数学概念相通的地方.徐利治先生曾说,唐诗"孤帆远影碧空尽"正是极限概念的意境.

在中小学,我们经常会看到这样的横幅,"一切为了孩子","为了一切孩子","为了孩子一切",其实这就是数学中的排列与组合,这里只是"一切"、"为了"、"孩子"三个词的三种排列而已.常用汉字有三千多个,一句完整的话就是一些单字的一种排列.英文字母 26 个,每个英文单词就是若干个字母的一种排列.

在一些对联中巧用数字是很常见的事.

郑板桥是清代乾隆年间的文学家和书画家.他在山东潍坊任县令时,有一年春节与朋友外出,在南门外看到一副春联,上联是"二三四五",下联是"六七八九",横批是"南北"二字.他赶紧回衙取了一些粮食和衣物,给这户人家送去.朋友忙问:"你怎么知道他家就没有这些东西?"郑板桥回答:"对联上都写啦.上联缺一(衣),下联少十(食),横批是南北,没有东西."当他们敲开这家门时,果然这一家大小都挤在一张破床上,衣单灶冷,全无一点过年的气氛.见此情景,朋友十分佩服郑板桥的洞察才能和体恤民情的作风.

据说在乾隆五十年(1785)的一次千叟宴上,赴宴的有三千九百多位老人,其中最年长者已有一百四十一岁,仍然精神矍铄.这似乎是国泰民安的象征.乾隆心喜,即以这位老寿星的年龄为题出了一个上联:

花甲重开,又加三七岁月

60 岁为一个花甲,这个上联用算式

$$60 \times 2 + 3 \times 7 = 141$$

点出了老寿星的年龄为 141 岁.大才子纪晓岚也如法炮制,对出的下联为

古稀双庆,更多一度春秋

古稀就是 70 岁，下联以另一个算式

$$70 \times 2 + 1 = 141$$

点出了老寿星年龄为 141 岁. 君臣二人，巧妙地将数学上的四则运算对应在对联中，给千叟宴增添了不少欢乐的气氛.

将数学融于人文，体现出数学旺盛的生命力.

1.4.2　语言中的数学

我们日常使用的语言是生活习俗自然形成的，有很多语言将数学融入其中. “不管三七二十一”涉及乘法口诀，“三下五去二就把它解决了”则是算盘口诀. 再如“万无一失”，在中国语言里比喻“有绝对把握”，但是，这句成语可以联系“小概率事件”进行思考. “十万有一失”在航天器的零件中也是不允许的. 此外，“指数爆炸”“直线上升”等等已经进入日常语言. “事业坐标”“人生轨迹”也已经是人们耳熟能详的词语.

数学也是语言，但它是科学的语言，没有数学语言，大千世界就难以描述. 很多自然规律必须用微分方程来描述，一些庞大系统需要用矩阵去概括，这时日常语言则显得无能为力.

1.4.3　体育中的数学

1973 年，美国的应用数学家 J. B. 开勒发表了赛跑的理论，并用他的理论训练中长跑运动员，取得了很好的成绩. 还有，美国的计算专家艾斯特运用数学、力学，并借助计算机研究了当时铁饼世界冠军的投掷技术，据此提出了改正投掷技术的训练措施，从而使这位世界冠军在短期内将成绩提高了 4 米，在一次奥运会的比赛中创造了连破三次世界纪录的辉煌成绩. 起跳点的选取对跳高运动员尤为重要. 在一次亚运会上，某运动员向 2 米 37 的高度进军. 只见他几个碎步，快速助跑，有力的弹跳，身体腾空而起，他的头部越过了横杆，上身越过了横杆，臀部、大腿、甚至小腿都越过了横杆，可惜，脚跟擦到了横杆，横杆摇晃了几下，掉了下来！问题出在哪里？出在起跳点上. 那么如何选取起跳点呢？可以建立一个数学模型. 其中涉及到，起跳速度，助跑曲线与横杆的夹角，身体重心的运动方向与地面的夹角等诸多因素. 这些例子说明，数学在体育训练中也在发挥着越来越明显的作用.

目前，数学在体育领域主要的研究方向有：赛跑理论，投掷技术，台球的击球方向，跳高的起跳点，足球场上的射门与守门，比赛程序的安排，博奕论与决策.

1.4.4　法学中的数学

法学是社会科学中的一门重要学科，系统科学在运用新的数学方法对社会科

学产生影响时也涉及到法学.

在 17 ～ 18 世纪，许多法律问题都采用数学的方法进行论证. 莱布尼兹(见附录 1) 曾写过一篇题为《选立波兰王的政治证明典范》论文，利用几何学方法以 60 个命题和论证证明了诺依堡君主一定要被选为波兰王. 维柯“用一种严格的数学方法”，即几何学方法，写成了一部名为《普遍法律的唯一原则》的著作. 在中外学术界，曾有不少专著、论文运用新的数学方法进行法学研究. 在国外，尤其是在美国，运用博弈理论来分析特定法律问题的法学家非常多，如杰克逊将囚徒困境应用到破产法的研究中去；2002 年 9 月 19 日《西安商报》报道，荷兰变态女护士德伯克在 4 年多的时间里谋杀了 13 人，尽管在被捕后近 10 个月德伯克都对杀人指控保持沉默，但检方依赖旁证，并请概率专家以小概率事件的不可能性，证明在德伯克当班期间死去 13 人不是偶然事件.

运用模拟等数学方法进行法律推理的人工智能研究也是 20 世纪下半叶中外法学家非常热衷的领域. 另外，系统论、信息论、控制论、混沌理论、模糊理论、随机理论、概率论和数理统计等数学理论也常被用来进行法学研究.

思考题

1. 举例说明数学在社会科学方面的应用.