工科数学基础

# 概率统计教程

姚孟臣　编著

清华大学出版社

工科数学基础

# 概率统计教程

姚孟臣　编著

清华大学出版社
北京

## 内容简介

本书是按照《全国硕士研究生入学考试数学考试大纲》及《工科本科数学基础课教学基本要求》，并结合编者多年的教学经验而编写的.具体内容为随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验，共8章，并附常用分布表.

本书结构清晰、逻辑严谨、讲述详细、通俗易懂、例题多样、习题丰富，既便于学生自学，也易于教学，可供高等院校工科类各专业的学生使用.



**图书在版编目(CIP)数据**

概率统计教程/姚孟臣编著.—北京：清华大学出版社，2007.8

(工科数学基础)

ISBN 978-7-302-15293-4

Ⅰ.概…　Ⅱ.姚…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材

Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第073860号

**责任编辑**：刘　颖　王海燕
**责任校对**：赵丽敏
**责任印制**：何　芊
**出版发行**：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**社 总 机**：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
**投稿咨询**：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
**印 装 者**：北京市清华园胶印厂
**经　销**：全国新华书店
**开　本**：185×230　**印　张**：12.75　**字　数**：251千字
**版　次**：2007年8月第1版　　**印　次**：2007年8月第1次印刷
**印　数**：1～4000
**定　价**：18.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：020966-01

# 丛书序

随着我国社会和经济建设的高速发展，全国高等教育规模日益扩大，工科院校各专业对公共数学课的课程建设、教学内容的更新和教材建设提出了新的要求. 与此同时，全国硕士研究生入学统一招生考试的规模也在不断扩大，其中数学考试对于高等院校工科类专业的公共数学课的影响也愈来愈大. 为适应这个变化，许多学校工科类专业的数学基础课，经过多年调整，实际教学大纲已经与工科类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容逐步协调一致. "工科数学基础"正是适应我国高校工科类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材. 全套教材包括《高等数学教程》(上册、下册)、《线性代数教程》、《概率统计教程》，以及相应的学习指导用书.

本套教材是参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求(修改稿)》和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的. 突出了对这两个大纲所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练，内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求.

本套教材针对主教材配套推出了《高等数学教程学习指导》、《线性代数教程学习指导》、《概率统计教程学习指导》这三本相应的学习指导用书. 主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结，说明重点难点，进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，便于学生自学. 此外，还着重对教材中的题目类型作必要的补充，增加了相当数量的研究生入学统一考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力方面，帮助学生实现跨越，达到全国硕士研究生入学统一考试对数学(一)、(二)的要求. 因此，这三本学习指导用书完全可以实现全国硕士研究生入学统一考试数学考试复习参考书的功能，在日后报考研究生时发挥积极作用.

参加《工科数学基础》的编写人员大多具有 30 年以上从事公共数学基础课程的教学研究、教材研究和教学实践的经历，其中很多教师还多年从事研究生入学统一考试数学考试考前辅导工作，有相当高的知名度. 因此，作者在把握工科类公共数学基础课程的教学内容和要求、时数安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这对于本套教材的编写质量是一个可靠的保障.

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨炼和广大读者的支持与帮助. 欢迎广大读者对本套教材的不足提出批评和建议.

《工科数学基础》作者

2007 年 3 月

# 目　　录

# 第1章

# 随机事件及其概率

本章将介绍概率论中的一些基本概念，随机事件的基本关系与基本运算，概率的性质及其计算方法等.

通过本章的学习，使读者能够达到以下学习目标：

1. 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯（Bayes）公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

## 1.1 随机事件

### 1.1.1 随机现象与随机试验

在自然界及各种社会活动中，人们所观察到的现象大致可分为两类：一类称为**确定性现象**，另一类称为**随机现象**.

我们把在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象称为**确定性现象**. 例如，在一个标准大气压下，纯净的水加热到100℃时必然会沸腾；从10件产品（其中2件是次品，8件是正品）中，任意地抽取3件进行检验，这3件产品绝不会全是次品；向上抛掷一枚硬币必然下落，等等. 这类现象的一个共同点是事先可以断定其结果.

我们把在一定的条件下，具有多种可能发生的结果的现象称为**随机现象**. 例如，从10件产品（其中2件是次品，8件是正品）中，任取1件出来，可能是正品，也可能是次品；向上抛掷一枚硬币，落下以后可能是正面朝上，也可能是反面朝上；将要出生的婴儿可能是男性，也可能是女性. 这类现象的一个共同点是事先不能预知多种可能结果中究竟出现

哪一种.

人们在研究客观现象时都离不开对其进行观察(测)或进行实验.为了简便起见,我们把对某现象或对某事物的某个特征的观察(测),以及各种各样的科学实验,统称为**试验**.为了研究随机现象,同样需要进行试验.人们经过长期实践和深入研究以后发现,对于随机现象来说,尽管就个别的实验或观测而言,究竟会出现什么样的结果不能事先断定,即随机现象有不确定性的一面,但是当我们对随机现象进行大量重复实验或观测时就会发现,各种结果的出现都具有某种固有的规律性.例如,在相同的条件下,多次抛掷同一枚硬币,就会发现“出现正面”和“出现反面”的次数大约各占总抛掷次数的 1/2 左右.又如掷一枚骰子可能出现 1 点,2 点,…,6 点,掷一次时不能预先断定出现几点,但多次重复后就会发现它的规律性,即出现 1,2,…,6 点的次数大约各占 1/6 左右.

由以上的例子可以看出,随机现象具有两重性:表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性.随机现象的偶然性又称为它的随机性.在一次实验或观察中,结果的不确定性就是随机现象随机性的一面;在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面,称随机现象的必然性为**统计规律性**.概率论就是从数量上研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

为了获得随机现象的统计规律,必须在相同的条件下,大量重复地做试验.在概率统计中,我们把具有下述三点特性的试验称为**随机试验**:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果在试验前是明确的,而每次试验必有其中的一个结果出现,并且也仅有一个结果出现;

(3) 每次试验的可能结果不止一个,而究竟会出现哪一个结果,在试验前不能准确地预知.

随机试验也简称**试验**,一般用字母 $E$ 或 $E_1$,$E_2$ 等表示.

### 1.1.2 样本空间

在随机试验中,每一个可能出现的不再分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件或样本点**,用 $\omega$ 表示;而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间或样本空间**,记为 $\Omega$.

**例 1** 设 $E_1$ 为掷一枚骰子,观察出现的点数.记 $\omega_i$ 为出现 $i(i=1,2,\cdots,6)$ 个点.于是,有 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

**例 2** 设 $E_2$ 为从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)之中任取 3 件,观察其中次品的件数.记 $\omega_i$ 为恰有 $i(i=0,1,2)$件次品,于是,$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

**例 3** 设 $E_3$ 为在相同条件下接连不断地向同一个目标射击,直到第一次击中目标为

止,观察射击的次数.记 $\omega_i$ 为射击 $i$ 次($i=1,2,\cdots$),于是,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

**例 4** 设 $E_4$ 为某地铁站每隔 5 min 有一列车通过,乘客对于列车通过该站的时间完全不知道,观察乘客候车的时间.记乘客的候车时间为 $\omega$.显然有 $\omega\in[0,5)$,即 $\Omega=[0,5)$.

通过上面的几个例子可以看出,随机试验可以分成只有有限个可能结果(如 $E_1$,$E_2$),有可列个可能结果(如 $E_3$)和有不可列个可能结果(如 $E_4$)这三种情况.

### 1.1.3 随机事件

所谓**随机事件**是指样本空间 $\Omega$ 的一个子集,在随机试验中,它有可能发生也可能不发生.随机事件简称为**事件**,用字母 $A,B,C$ 等表示.因此,某个事件 $A$ 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 $\omega$ 发生,记为 $\omega\in A$.

在例 1 中,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,而 $E_1$ 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合.例如,设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$,$B=\{$出现的点数大于 4$\}$,$C=\{$出现 3 点$\}$,可见它们都是 $\Omega$ 的子集.显然,如果事件 $A$ 发生,那么子集 $\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ 中的一个样本点一定发生,反之亦然,故有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$;事件 $B$ 发生就是指出现了样本点 $\omega_5$ 或 $\omega_6$,否则我们就说事件 $B$ 没有发生,故 $B=\{\omega_5,\omega_6\}$;类似地,有 $C=\{\omega_3\}$.一般而言,在 $E_1$ 中,任意一个由样本点组成的 $\Omega$ 的子集也都是随机事件.这里需要特别指出的是,我们把样本空间 $\Omega$ 也作为一个事件.因为在每次试验中,必定有 $\Omega$ 中的某个样本点发生,即事件 $\Omega$ 在每次试验中必定发生,所以 $\Omega$ 是一个必定发生的事件.在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,记作 $U$.在例 1 中{点数小于等于 6}就是一个必然事件.在例 2 中{至少有一件正品}也是一个必然事件.任何随机试验的样本空间 $\Omega$ 都是必然事件.类似地,我们把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 也作为一个事件.显然,它在每次试验中都不发生,所以 $\varnothing$ 是一个不可能发生的事件.在每次试验中都必定不会发生的事件称为**不可能事件**,记为 $V$.在例 1 中{点数等于 7},{点数小于 1}等都是不可能事件.在例 2 中{不出现正品}也是不可能事件.我们知道,必然事件 $U$ 与不可能事件 $V$ 都不是随机事件.因为作为试验的结果,它们都是确定的.但是,为了今后讨论问题方便起见,我们也将它们视为随机事件来处理.

### 1.1.4 随机事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集,因此可以将事件间的关系及运算归结为集合之间的关系和运算,这不仅对研究事件的关系和运算是方便的,而且对研究随机发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的.需要指出的是,虽然事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算完全类似,但要注意其特有的事件意义.

设 $\Omega$ 是给定的一个随机试验的样本空间,事件 $A,B,C$, $A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是 $\Omega$ 的

子集.

1. 包含关系

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生,则称事件 $B$ **包含**事件 $A$,或称 $A$ 是 $B$ 的**子事件**,记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

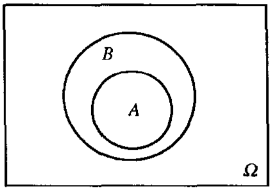


图 1-1 $A\subset B$

在这种情况下,组成事件 $A$ 的样本点都是组成 $B$ 的样本点.这种包含关系的几何直观图如图 1-1 所示.

例如,在例 1 中,若 $A$ 表示{出现奇数点},即事件{1,3,5},若 $B$ 表示{出现的点数不超过 5},即事件{1,2,3,4,5},显然 $B\supset A$.

2. 相等关系

若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$,则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**或**等价**,记为 $A=B$.其直观意义是事件 $A$ 与 $B$ 的样本点完全相同.这就是说,在一次试验中,等价的两个事件同时发生或同时不发生,因此可以把它们看成是一样的.

在例 2 中,设 $A$={至少有一件次品},$B$={至多有两件正品},显然有 $A=B$.

3. 事件的并

{事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生}称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**并**或**和**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.事件 $A\cup B$ 是属于 $A$ 或属于 $B$ 的样本点组成的集合,其几何直观图如图 1-2 所示(见阴影部分).

例如,在例 1 中,设 $A$ 表示{出现偶数点},即 $A=\{2,4,6\}$,$B$ 表示{出现的点数大于 4},即 $B=\{5,6\}$,则 $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

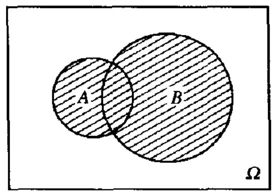


图 1-2 $A\cup B$

一般地,把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生}称为 $n$ 个事件的并,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地,把{可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生}称为可列个事件的并,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$,或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如,在 $E_3$ 中记 $B_i=\{\omega_i\}(i=1,2,\cdots)$,$A$={至少射击 4 次},则

$$A=\bigcup_{i=4}^{\infty}B_i.$$

4. 事件的交

{事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生}称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**交**或**积**,记为 $A\cap B$ 或 $AB$.事件 $A\cap B$ 是由既属于事件 $A$ 又属于事件 $B$ 的样本点组成的集合,其几何直观图如图 1-3 所示(见阴影部分).

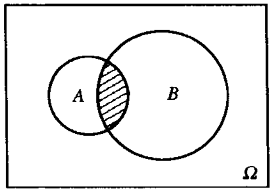

图 1-3 $A\cap B$

例如，在例 2 中，设 $A$ 表示{取出的 3 件中最多有一件次品}，即 $A=\{\omega_0,\omega_1\}$；$B$ 表示{取出的 3 件中至少有一件次品}，即 $B=\{\omega_1,\omega_2\}$，则 $A\cap B=\{\omega_1\}$，即 $A\cap B$ 表示{取出的 3 件产品中恰有一件次品}. 它是由既属于事件 $A$ 又属于事件 $B$ 的样本点组成的子集.

一般地，把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生}称为 $n$ 个事件的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地，把{可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生}称为可列个事件的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$，或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. *互不相容（或互斥）关系*

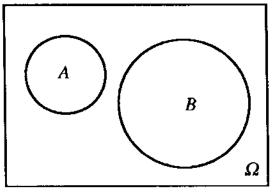

图 1-4 $AB=\varnothing$

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称这两个事件是**互不相容（或互斥）**的. 显然，互不相容的事件 $A$ 与事件 $B$ 没有公共的样本点，几何直观图如图 1-4 所示.

例如，在例 2 中，若设 $A$ 表示{取出的 3 件都是正品}，即 $A=\{\omega_0\}$；$B$ 表示{取出的 3 件中有两件是次品}，即 $B=\{\omega_2\}$. 显然事件 $A$ 与 $B$ 没有公共的样本点，因此它们不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$.

一般地，我们把几个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容称为这几个事件是互不相容的.

6. *事件的逆*

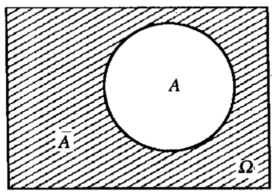

图 1-5 $\overline{A}$

对于事件 $A$，我们把不包含在 $A$ 中的所有样本点构成的集合称为事件 $A$ 的**逆**（或称为 $A$ 的**对立事件**），记为 $\overline{A}$. 这就是说，事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 $A$ 不发生. 于是，我们有

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega.$$

由于 $A$ 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，故 $\overline{A}$ 与 $A$ 又称为**相互对立（或互逆）**事件，其几何直观图如图 1-5 所示.

例如，在 $E_1$ 中，设 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现奇数点$\}$，显然事件 $A$ 与 $B$ 是互逆的，即 $B=\overline{A}$. 由定义可知 $\overline{\overline{A}}=A$，即 $A$ 是 $\overline{A}$ 的逆.

与集合的运算一样，事件间的基本运算（并、交、逆）满足下述运算规律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$，$A(B\cup C)=AB\cup AC$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算规律都可以仿照证明集合相等的方法加以证明，这里仅用事件运算的意义给出对偶律的证明：

$$\overline{A\cup B}=\overline{\{A\text{ 与 }B\text{ 中至少有一个发生}\}}=\{A\text{ 与 }B\text{ 都不发生}\}$$
$$=\{\overline{A}\text{ 与}\overline{B}\text{ 同时发生}\}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

又因为

$$AB=\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}=\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})},$$

所以

$$\overline{AB}=\overline{\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

交换律、结合律、分配律、对偶律都可以推广到任意多个事件的情形. 但要注意这些运算规律不是从初等代数运算移过来的，因此不能简单套用代数运算规律，必须通过事件运算的含义来理解. 例如，对偶律推广到有限个和可列个的情况是

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i,$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

利用事件运算的含义及上述运算规律还可以得到一些运算规律：

$$A\cup A=A,\quad AA=A;\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\Omega=A;$$
$$A\cup\varnothing=A,\quad A\varnothing=\varnothing;$$

特别是，若 $A\subset B$，则

$$A\cup B=B,\quad AB=A.$$

这些规律的正确性都要通过相应运算的含义来理解.

7. **事件的差**

{事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生}称为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A-B$(或 $A\backslash B$). 事件 $A-B$ 是由属于事件 $A$ 但不属于事件 $B$ 的样本点组成的子集，其几何直观图如图 1-6 所示(见阴影部分)，并注意 $A-B=A-AB$.

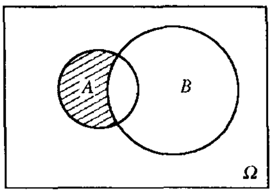


图 1-6 A—B

需要指出的是，事件的差不是事件的基本运算，也不满足上面的运算规律. 因此，在进行事件的运算时，先将 $A-B$ 用 $A\overline{B}$ 来表示.

8. 样本空间的划分(或完备事件组)

为了研究某些较复杂的事件，常常需要把试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 按样本点的某些属性，划分成若干个事件. 一般地，设 $\Omega$ 被

划分成 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们满足

(1) 互斥性：$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，

(2) 完全性：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称这 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成样本空间 $\Omega$ 的一个**划分**(或构成一个**完备事件组**).

显然，对任一试验相应的样本空间 $\Omega$，若 $A\subset\Omega$，则由 $A$ 与 $\overline{A}$ 构成 $\Omega$ 的一个划分(这时完备事件组由两个事件构成). 例如，在例 2 中，若将 $\Omega$ 的样本点按所含次品的数量分成三类事件：$A_i=\{$取出的 3 件产品中恰有 $i$ 件次品$\}$，$i=0,1,2$，则事件 $A_0,A_1,A_2$ 构成 $\Omega$ 的一个划分；若设事件 $A=\{$取出的 3 件中有两件是次品$\}$，则由事件 $A$ 与 $\overline{A}$ 构成 $\Omega$ 的另一个划分.

**例 5** 设 $A_1,A_2,A_3$ 为三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) $A=\{A_1$ 发生而 $A_2$ 与 $A_3$ 均不发生$\}$；

(2) $B=\{$三个事件中恰有两个发生$\}$；

(3) $C=\{$三个事件中至少有两个发生$\}$；

(4) $D=\{$三个事件中最多有两个发生$\}$.

**解** (1) $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A=A_1-A_2-A_3$ 或 $A=A_1-(A_2\cup A_3)$.

(2) $B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$ 或 $B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $C=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$ 或 $C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

(4) $D=\overline{A_1A_2A_3}$ 或

$$D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3.$$

**例 6** 化简下列各式：

(1) $(A\cup B)-(A-B)$； (2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$；

(3) $(A-\overline{B})(\overline{\overline{A}\cup B})$.

**解** (1) 
$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A-B)&=(A\cup B)\overline{(A-B)}\\&=(A\cup B)\overline{(A\overline{B})}=(A\cup B)(\overline{A}\cup B)\\&=A\overline{A}\cup B\overline{A}\cup AB\cup B=B\overline{A}\cup AB\cup B=B.\end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\overline{B})&=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}\\&=A\cup A(B\cup\overline{B})\cup\varnothing=A\cup A\Omega=A.\end{aligned}$$

(3) $(A-\overline{B})\overline{(\overline{A}\cup B)}=(A\overline{\overline{B}})(\overline{\overline{A}}\,\overline{B})=(AB)(A\overline{B})=(A\overline{A})(B\overline{B})=\varnothing$.

通过上例可见，进行事件运算时，运算的先后顺序是先求逆运算(即求对立事件)，再求积运算，最后再进行和的运算；若有括号，则括号内运算优先.

## 1.2 随机事件的概率

对于一般的随机事件来说，虽然在一次试验中是否发生我们不能预先知道，但是如果我们独立地重复进行这一试验就会发现不同的事件发生的可能性是有大小之分的. 这种可能性的大小是事件本身固有的一种属性，这是不以人们的意志为转移的. 为了定量地描述随机事件的这种属性，我们先介绍频率的概念.

### 1.2.1 概率的统计定义

在一组不变的条件 $S$ 下，独立地重复 $n$ 次试验 $E$. 如果事件 $A$ 在 $n$ 次试验中出现了 $\mu$ 次，则称比值 $\mu/n$ 为在 $n$ 次试验中事件 $A$ 出现的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{\mu}{n},$$

其中，$\mu$ 称为事件 $A$ 发生的**频数**.

例如，在抛掷一枚硬币时，我们规定条件组 $S$ 为：硬币是匀称的，放在手心上，用一定的动作垂直上抛，让硬币落在一个有弹性的平面上，等等. 当条件组 $S$ 大量重复实现时，事件 $A=\{$出现正面$\}$发生的次数 $\mu$ 能够体现出一定的规律性. 例如，进行 50 次试验出现了 24 次正面，这时

$$n = 50, \quad \mu = 24, \quad f_{50}(A) = 24/50 = 0.48.$$

一般来说，随着试验次数的增加，事件 $A$ 出现的次数 $\mu$ 约占总试验次数的一半，换句话说，事件 $A$ 的频率接近于 1/2.

历史上，不少统计学家，例如皮尔逊(Pearson)等人，做过成千上万次抛掷硬币的试验，其试验记录如表 1-1 所示.

**表 1-1**

| 实 验 者 | 抛掷次数 $n$ | $A$ 出现的次数 $\mu$ | $f_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| 德摩根(De Morgan) | 2 048 | 1 061 | 0.518 |
| 比丰(Buffon) | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊(Pearson) | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

可以看出，当抛掷硬币的次数 $n$ 较大时，频率 $f_n(A)$ 总在常数 0.5 附近波动，并且呈现出逐渐稳定于 0.5 的倾向. 频率的这种逐渐的“稳定性”就是所谓的统计规律性，它揭示了随机现象内部隐藏着的必然规律. 这里的常数 $p=0.5$ 称为频率 $f_n(A)$ 的稳定值，它

能反映事件 $A$ 发生的可能性大小.一般地,每个随机事件都有相应的常数 $p$ 与之对应,因此,我们可以用频率的稳定值定量地描述随机事件发生的可能性大小.

**定义 1.1** 在一组不变的条件 $S$ 下,独立地重复 $n$ 次试验 $E$.如果事件 $A$ 发生的频率 $f_n(A)$ 总在区间 $[0,1]$ 上的一个确定的常数 $p$ 附近做微小摆动,而且一般来说,随着 $n$ 的增加,这种摆动的幅度越来越小,则称常数 $p$ 为事件 $A$ 发生的**概率**,记为 $P(A)$,即

$$P(A)=p.$$

概率的统计定义肯定了随机事件的概率存在,但在实际问题中,数 $p$ 往往是未知的.尽管如此,该定义提供了估算概率的方法,即只要试验次数足够大,可以用事件 $A$ 发生的频率 $f_n(A)$ 近似代替概率 $P(A)$.这种方法简便且实用,因而应用广泛.例如,在一定的条件下,100 颗种子中平均来说大约有 90 颗发芽,则我们说种子的发芽率为 90%;又如某工厂平均来说每 2 000 件产品中大约有 20 件废品,则我们说该工厂的废品率为 1%.

虽然概率的统计定义有它的简便之处,但若试验具有破坏性,不可能进行大量重复试验时,就限制了它的应用.而对某些特殊类型的随机试验,要确定事件的概率,并不需做重复试验,而是根据人类长期积累的关于"对称性"的实际经验,提出数学模型,直接计算出来,从而给出概率相应的定义.这类试验称为**等可能概型试验**.根据其样本空间 $\Omega$ 是有限集还是无限集,可将相应的数学模型分为**古典概型**和**几何概型**.

### 1.2.2 概率的古典定义

在等可能试验中,若试验具有下列两个特征:

(1) 试验的结果为有限个,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$(**有限性**);

(2) 每个结果出现的可能性是相同的,即

$$P(\omega_i)=P(\omega_j)=\frac{1}{n}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\ (\textbf{等概性}),$$

则称此试验为**古典型随机试验**.由于这类试验曾是概率论发展初期研究的主要对象,因此称之为古典型试验.

**定义 1.2** 设古典型试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 有 $n$ 个样本点,如果事件 $A$ 是由其中的 $m$ 个样本点组成,则事件 $A$ 发生的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

并把利用上述关系式来讨论事件的概率的数学模型称为**古典概型**.

由古典概型的"有限性"及"等可能性"两个特征,不难看出由上述关系式给出的定义的合理性.在一次试验中,每个样本点出现的可能性大小均为 $\frac{1}{n}$,而事件 $A$ 包含了 $m$ 个