全国高等学校管理科学与工程类专业规划教材

管理运筹学教程

宁宣熙 主 编
王可定 党耀国 副主编

Management Operation Research

清华大学出版社

全国高等学校管理科学与工程类专业规划教材

管理运筹学教程

宁宣熙　主　编
王可定　党耀国　副主编

Management
Operation Research

清华大学出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学教程/宁宣熙主编．—北京：清华大学出版社，2007.8
（全国高等学校管理科学与工程类专业规划教材）
ISBN 978-7-302-15710-6

Ⅰ．管…　Ⅱ．宁…　Ⅲ．管理学：运筹学—高等学校—教材　Ⅳ．C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 107803 号

责任编辑：高晓蔚
责任校对：王凤芝
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：26.25　**插页**：1　**字　数**：543 千字
版　　次：2007 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：38.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：（010）62770177 转 3103　　产品编号：019384-01

前言 PREFACE

在钱颂迪教授的建议和倡导下，由江苏省系统工程学会组织江苏省系统工程、运筹学理论教学与应用研究领域的教师们，合作撰写了两本有关运筹学的教科书，以推动系统工程教学和应用研究活动的展开，满足培养系统工程工作者的需要。本书就是其中的一本，是运筹学的基础理论及其应用部分。

据不完全统计，到目前为止，已出版的有关运筹学的教科书已不下数百种，各有特色，适用于各种不同的教学层次。这种百花齐放的态势正说明运筹学已经成为管理类专业教学中十分重要的内容。在学科分类上，有人认为运筹学属于数学，但它不是纯数学。实质上，它是一种从实际问题抽象而来的模型化手段，是一种解决实际问题的系统化思想，是一种系统分析中定性与定量相结合的优化方法。因此它是培养学生从实践中发现和提出问题，然后进行定性与定量分析，通过建模、求解，寻求最优解决方案的一种系统的科学方法。

本书的读者对象不是准备从事运筹学学科教学和研究的在校学生或研究者，而是正在从事或未来面向实际工作的各类管理者。对于他们来说，最重要的不是数学方法本身，而是通过本门课程的学习，培养一种系统解决问题的思路和方法、运用模型研究问题的习惯以及建模与求解的技巧和技术。为此，编者在撰写本书时特别注意用实践中得到的理念和悟性，深入浅出地讲解各种模型的基本概念和求解的基本思路，尽力避免纯粹数学上的推导与证明。讲究用实例去说明各种模型抽象出的实质内容，并给出模型的各种典型例子，供学生通过"照猫画虎"来熟悉和掌握建模、求解的思路和方法。当然，本书是否能够达到这个目标，最终要看读者是否真正喜欢它。本书取名为"管理运筹学教程"，并不意味着它只是为高等院校管理科学与工程及工商管理各专业教学用的教科书，凡是面向实际应用的工程类、管理类、各专业的研究生、MBA、高年级本科生和各类管理干部进修班都可以选作教材或自学优化方法的参考用书。

参加本书编写的有：南京航空航天大学党耀国(第 1 章)和朱金福(第 2 章)，南京大学周献中(第 5 章)和肖条军(第 6 章)，解放军理工大学王可定(第 7 章)。南京航空航天大学宁宣熙编写了第 5 章的 5.6 和 5.8 节及其余各章，并负责总纂。

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中肯定存在不少错误和需要改进的地方，敬请各位专家和广大读者批评指正。

本书的出版一直得到钱颂迪教授的关心、支持和指导，在此对钱教授表示衷心的谢意！

编　者

2007 年 5 月

目 录 CONTENTS

第 1 章　线性规划 …… 1

1.1　线性规划问题及其数学模型 …… 1
1.2　线性规划问题的图解法及几何意义 …… 5
　1.2.1　线性规划问题的解的概念 …… 5
　1.2.2　线性规划问题的图解法 …… 6
　1.2.3　基本定理 …… 8
1.3　单纯形算法 …… 9
1.4　单纯形算法的进一步讨论 …… 18
　1.4.1　初始基本可行解的确定 …… 18
　1.4.2　人工变量法(大 M 法) …… 18
　1.4.3　两阶段法 …… 20
　1.4.4　检验数的几种表示方法 …… 23
1.5　应用举例 …… 23
1.6　线性规划的对偶理论与灵敏度分析 …… 29
　1.6.1　对偶问题的提出 …… 29
　1.6.2　对偶理论 …… 30
　1.6.3　对偶问题的经济解释——影子价格 …… 36
　1.6.4　对偶单纯形法 …… 37
　1.6.5　灵敏度分析 …… 42
1.7　运输问题 …… 49
　1.7.1　运输问题的数学模型 …… 49
　1.7.2　表上作业法 …… 51
　1.7.3　产销不平衡的运输问题及其求解方法 …… 61
1.8　整数规划 …… 66
　1.8.1　整数规划问题的提出 …… 66
　1.8.2　分支定界法 …… 69
　1.8.3　0-1 型整数规划 …… 72

1.8.4 指派问题 …… 77
1.9 案例分析 …… 84
1.9.1 人力资源分配问题 …… 84
1.9.2 北方化工厂月生产计划安排 …… 84
1.9.3 某印染公司应如何合理使用技术培训费 …… 86
1.9.4 报刊征订、推广费用的节省问题 …… 88
1.9.5 关于北京福达食品有限公司直销系统的设计 …… 90
第 1 章习题 …… 91

第 2 章 目标规划 …… 96

2.1 问题的提出 …… 96
2.1.1 几个例子 …… 96
2.1.2 多目标优化问题处理方法的一般讨论 …… 100
2.2 目标规划的数学模型 …… 102
2.2.1 多目标优化问题的处理 …… 102
2.2.2 目标约束的处理 …… 103
2.2.3 带有优先级的目标规划 …… 104
2.3 目标规划的图解法 …… 107
2.4 目标规划的算法 …… 110
2.4.1 单纯形法 …… 111
2.4.2 序列解法 …… 116
2.5 应用举例 …… 120
2.6 案例分析 …… 124
2.6.1 案例背景知识介绍 …… 125
2.6.2 模型变量和参数描述 …… 125
2.6.3 目标规划模型 …… 126
2.6.4 实例分析 …… 128
2.6.5 讨论 …… 131
第 2 章习题 …… 131

第 3 章 动态规划 …… 135

3.1 动态规划的基本概念与方法 …… 135
3.1.1 基本概念与名词解释 …… 135
3.1.2 最优化原理和动态规划的基本方法 …… 137

3.2 动态规划模型的建立与求解步骤 …… 141
3.2.1 建立动态规划模型的基本要求 …… 141
3.2.2 动态规划的求解步骤 …… 142
3.3 动态规划的应用举例 …… 142
3.3.1 定价问题 …… 142
3.3.2 资源分配问题 …… 145
3.3.3 生产存储问题 …… 149
3.3.4 背包问题 …… 153
3.3.5 设备更新问题 …… 155
3.3.6 可靠性问题 …… 157
3.4 案例分析 …… 161
第 3 章习题 …… 163

第 4 章 图论与网络分析 …… 165

4.1 图的基本概念及图的模型 …… 165
4.1.1 图的基本概念及图的模型 …… 165
4.1.2 图模型示例 …… 166
4.2 图论中常用的名词 …… 168
4.2.1 图 …… 168
4.2.2 子图和生成子图 …… 169
4.2.3 链、路、圈和回路 …… 169
4.2.4 连通图和简单图 …… 170
4.2.5 网络图 …… 170
4.2.6 图的矩阵表示法 …… 170
4.3 路径问题 …… 171
4.3.1 什么是路径问题 …… 171
4.3.2 路径问题的解法原理 …… 172
4.4 最小生成树问题 …… 173
4.4.1 什么是树 …… 174
4.4.2 构造生成树的方法 …… 174
4.4.3 最小生成树问题 …… 175
4.5 最短路问题 …… 177
4.5.1 什么是最短路问题 …… 177
4.5.2 求解最短路问题的基本思路 …… 178

4.5.3 狄克斯托算法 …… 178
4.5.4 福特算法 …… 179
4.5.5 寻找最短路径的方法 …… 181
4.6 最大流问题 …… 182
4.6.1 网络流的基本概念 …… 182
4.6.2 求解网络最大流的基本原理 …… 183
4.6.3 寻求网络最大流的标号法 …… 183
4.6.4 确定网络中最大流的方法 …… 185
4.7 最小费用流问题 …… 186
4.7.1 什么是最小费用流问题 …… 186
4.7.2 求解最小费用流的赋权图法 …… 187
4.7.3 求解最小费用流的复合标号法 …… 189
4.8 中国邮递员问题 …… 194
4.8.1 哥尼斯堡七桥问题与欧拉图 …… 194
4.8.2 中国邮递员问题 …… 195
4.8.3 求解中国邮递员问题的奇偶点图作业法 …… 195
4.8.4 奇偶点图作业法的改进方法 …… 196
4.9 网络计划技术 …… 197
4.9.1 网络计划技术的基本概念 …… 197
4.9.2 网络图的绘制 …… 198
4.9.3 网络图的时间参数计算 …… 205
4.9.4 网络优化 …… 214
4.10 案例分析 …… 222
第 4 章习题 …… 224

第 5 章 决策分析与方法 …… 229

5.1 决策的基本概念 …… 229
5.1.1 “决策”与“决策分析”的定义 …… 229
5.1.2 决策论发展简史 …… 230
5.1.3 决策的基本原则 …… 230
5.1.4 决策的特点 …… 232
5.2 决策的分类 …… 233
5.2.1 按决策的作用范围分类 …… 233
5.2.2 按决策问题的不同性质或决策的重复程度分类 …… 233

5.2.3 按决策问题所处的条件分类 …… 234
5.2.4 按决策主体分类 …… 235
5.3 决策步骤与决策要素 …… 236
5.3.1 决策的一般过程 …… 236
5.3.2 决策要素 …… 238
5.4 不确定型决策方法 …… 240
5.4.1 问题提出 …… 240
5.4.2 问题的决策分析方法 …… 240
5.5 风险型决策方法 …… 243
5.5.1 问题提出[21] …… 243
5.5.2 问题的解决方法 …… 243
5.5.3 单级决策与多级决策 …… 247
5.6 贝叶斯分析方法 …… 249
5.6.1 决策前获得新情报的意义 …… 249
5.6.2 贝叶斯定理与贝叶斯分析方法 …… 250
5.6.3 补充情报价值与后验预分析 …… 252
5.7 多属性决策方法 …… 252
5.7.1 多准则决策的基本概念 …… 253
5.7.2 多属性决策 …… 253
5.8 效用理论及其在决策中的应用 …… 264
5.8.1 问题的提出 …… 264
5.8.2 效用的基本理论 …… 265
5.8.3 效用理论在决策中的应用 …… 268
5.9 案例分析 …… 269
第5章习题 …… 273

第6章 对策论 …… 275

6.1 引言 …… 275
6.1.1 对策与对策论 …… 275
6.1.2 对策论的基本概念 …… 275
6.1.3 对策论的基本假设 …… 276
6.2 完全信息静态对策 …… 277
6.2.1 零和对策和鞍点 …… 277
6.2.2 变和对策和纳什均衡 …… 282

6.3 完全信息动态对策 …… 288
6.4 不完全信息静态对策 …… 292
6.5 不完全信息动态对策 …… 294
6.6 合作对策 …… 295
6.7 案例分析 …… 299
第6章习题 …… 301

第7章 存贮论 …… 304

7.1 存贮问题及其基本概念 …… 304
7.1.1 存贮问题概述 …… 304
7.1.2 存贮模型中的基本概念 …… 305
7.1.3 存贮模型的类别 …… 309
7.1.4 ABC库存管理技术 …… 310
7.2 确定型存贮模型 …… 311
7.2.1 模型1：经济订购批量存贮模型—不允许缺货而备货时间极短 …… 311
7.2.2 模型2：允许缺货的经济生产批量模型—允许缺货而备货需一定时间 …… 313
7.2.3 模型3：经济生产批量模型—不允许缺货且备货需一定时间 …… 316
7.2.4 模型4：允许缺货的经济订购批量模型—允许缺货而备货时间极短 …… 317
7.2.5 模型5：经济订货批量折扣模型—货价与订货批量有关 …… 318
7.3 单周期的随机型存贮模型 …… 320
7.3.1 模型6：离散随机需求存贮模型——需求是离散的随机变量 …… 320
7.3.2 模型7：连续随机需求存贮模型——需求是连续的随机变量 …… 324
7.4 多周期的随机型存贮模型 …… 326
7.4.1 模型8：需求r为连续随机变量的(s,S)存贮策略 …… 326
7.4.2 模型9：需求r为离散随机变量的(s,S)存贮策略 …… 328
7.5 存贮论基本模型的推广与应用研究 …… 331
7.5.1 需求与备货时间均为随机离散变量的存贮模型 …… 331
7.5.2 易腐物品库存管理 …… 335
7.5.3 有概率约束的库存管理 …… 335
7.5.4 多品种多级库存系统的控制 …… 336
7.5.5 现金管理中的库存模型 …… 337
7.5.6 物流系统存储控制 …… 337

7.5.7 库容有限制的存贮问题 …… 338
7.6 存贮论的综合应用示例 …… 338
第7章习题 …… 341

第8章 排队论 …… 345

8.1 服务系统的基本概念 …… 345
8.1.1 服务系统的构成 …… 345
8.1.2 服务系统的主要分类 …… 346
8.1.3 服务系统的运行指标 …… 347
8.1.4 服务系统的决策变量 …… 348
8.1.5 服务系统模型的符号表示法 …… 349
8.2 服务系统的基本数学模型——生灭过程 …… 350
8.2.1 马尔可夫(Markov)随机过程 …… 350
8.2.2 生灭过程的假设条件 …… 351
8.2.3 生灭过程的状态转移图 …… 351
8.2.4 生灭过程的稳态方程 …… 352
8.2.5 李太勒(Little)公式 …… 354
8.3 单通道服务系统[$M/M/1$] …… 356
8.3.1 顾客源和系统空间都是无限的单通道服务系统[$M/M/1$]：[∞/∞/FCFS] …… 357
8.3.2 系统容量有限制的情况[$M/M/1$]：[N/∞/FCFS] …… 359
8.3.3 顾客源有限的情况[$M/M/1$]：[m/m/FCFS] …… 362
8.3.4 单通道服务系统公式小结 …… 365
8.4 多通道服务系统 …… 365
8.4.1 [$M/M/C$]：[∞/∞/FCFS]系统 …… 366
8.4.2 [$M/M/C$]：[N/∞/FCFS]系统 …… 369
8.4.3 [$M/M/C$]：[m/m/FCFS]系统 …… 371
8.4.4 多通道服务系统公式小结 …… 371
8.5 其他类型的服务系统 …… 373
8.5.1 服务规则对系统运行指标的影响 …… 373
8.5.2 一般服务时间[$M/G/1$]模型 …… 373
8.5.3 爱尔朗服务时间[$M/E_k/1$]模型 …… 375
8.6 服务系统的优化问题 …… 376
8.6.1 [$M/M/1$]：[$\infty/\infty/G$]系统中服务速率μ的优化问题 …… 376

8.6.2 [$M/M/C$]模型中的最佳服务台数 …… 377
8.7 服务系统案例分析 …… 378
8.7.1 社区医院服务水平与成本分析问题 …… 378
8.7.2 银行服务系统设计决策问题 …… 379
8.7.3 人事雇用决策 …… 382
8.8 排队系统的图表求解法 …… 385
8.8.1 查表求解法 …… 386
8.8.2 案例分析：医院病房服务水平问题 …… 387
第8章习题 …… 388

附录 A 顾客源无限,服务通道数为 1～15 情况下的排队长度表 …… 391

附录 B 顾客源有限情况下的排队长度表 …… 393

参考文献 …… 406

CHAPTER 1 第1章 线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支。自 1947 年美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)提出了求解线性规划问题的方法——单纯形法之后,线性规划在理论上趋于成熟,在实际中的应用日益广泛与深入。特别是在能用计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后,它的适用领域更加广泛。从解决技术问题中的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划与管理、决策等各个领域均可发挥重要作用。从范围来看,小到一个小组的日常工作和计划安排,大到整个部门以至国民经济计划的最优方案的提出,都有其用武之地。它具有适应性强、应用广泛、计算技术比较简单的特点,是现代管理科学的重要基础和手段之一。

1.1 线性规划问题及其数学模型

1. 线性规划问题的数学模型

线性规划问题主要解决以下两类问题:

(1) 任务确定后,如何统筹安排,做到应用尽量少的人力和物力资源来完成任务;

(2) 在一定量的人力、物力资源条件下,如何安排、使用它们,使完成的任务最多。

在生产管理和经济活动中,经常会遇到线性规划问题,如何利用线性规划的方法来进行分析,下面举例来加以说明。

例 1-1 (计划安排问题)某工厂在计划期内安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品,已知生产单位产品所占用的设备 A、B 的台时,原材料的消耗及两种产品每件可获利润,如表 1-1 所示。

表 1-1

项目	产品Ⅰ	产品Ⅱ	资源总量	项目	产品Ⅰ	产品Ⅱ	资源总量
设备 A/h	0	3	15	原材料/kg	2	2	14
设备 B/h	4	0	12	每件利润/元	2	3	

问:如何安排计划使该工厂获利最多?

解 假设 x_1, x_2 分别表示在计划期内生产产品Ⅰ、Ⅱ的件数,因为设备 A 的有效台时是 15,所以在确定产品Ⅰ、Ⅱ的产量时,可用不等式表示为

$$3x_2 \leqslant 15$$

同理，因设备 B 的限制，有不等式

$$4x_1 \leqslant 12$$

因原材料的限制，有不等式

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 14$$

若用 Z 表示利润，则该工厂的利润值为

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad (\text{元})$$

综上所述，该工厂的计划问题可用数学模型表示为

目标函数 $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件 $\begin{cases} 3x_2 \leqslant 15 \\ 4x_1 \leqslant 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

例 1-2 （成本问题）某炼油厂每季度需供应给合同单位汽油 15 万 t、煤油 12 万 t、重油 12 万 t。该厂计划从 A、B 两处运回原油提炼，已知两处的原油成分含量见表 1-2；又已知从 A 处采购的原油价格为（包括运费）200 元/t，B 处采购的原油价格为（包括运费）290 元/t。问：该炼油厂该如何从 A、B 两处采购原油，在满足供应合同的条件下，使购买成本最小。

表 1-2 %

产品来源 \ 份额	A	B	产品来源 \ 份额	A	B
汽油	15	50	重油	50	15
煤油	20	30	其他	15	5

分析 很明显，该厂可以有多种不同的方案从 A、B 两处采购原油，但最优方案应是在满足供应合同单位的前提下，使采购成本最小的方案。

解 设 x_1, x_2 分别表示从 A、B 两处采购的原油量（单位：万 t），则所有的采购方案均应同时满足

$$\begin{cases} 0.15x_1 + 0.50x_2 \geqslant 15 \\ 0.20x_1 + 0.30x_2 \geqslant 12 \\ 0.50x_1 + 0.15x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

采购成本为 x_1, x_2 的函数，即

$$S = 200x_1 + 290x_2 \quad (\text{万元})$$

而最终目标是求满足约束条件和使采购成本最小时的解。由此,建立的数学模型为

$$\min S = 200x_1 + 290x_2$$

$$\text{s. t}\begin{cases}0.15x_1 + 0.50x_2 \geqslant 15\\0.20x_1 + 0.30x_2 \geqslant 12\\0.50x_1 + 0.15x_2 \geqslant 12\\x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

通过以上两个例子,从数学上来讲,此数学模型具有如下特点。

(1) 有一组非负的决策变量(decision or control variable)。

(2) 有一组约束条件:含有决策变量的线性不等式(或等式)组(linear function constraints)。

(3) 有一个含有决策变量的线性目标函数(objective linear function),按研究问题的不同,要求目标函数实现最大化或最小化。

把满足上述 3 个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。其一般形式如下:

$$(\min)\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.1}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m\\x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0\end{cases} \quad \begin{matrix}\\ \\(1.2)\\ \\(1.3)\end{matrix}$$

在该数学模型中,方程(1.1)称为目标函数;式(1.2)称为约束条件;式(1.3)称为变量的非负约束条件。

2. 线性规划问题的标准型

由前面所举的例子可知,线性规划问题可能有各种不同的形式。目标函数有实现最大化也有实现最小化的;约束条件可以是"≤"形式、"≥"形式的不等式,也可以是等式。决策变量有时有非负限制,有时没有。这种多样性给讨论问题带来了不便。为了便于今后讨论,规定线性规划问题的标准型为

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\\qquad\cdots\\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\\x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0\end{cases} \tag{1.4}$$

这里假设 $b_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，否则两端同时乘以“$-1$”。用矩阵向量描述就是

$$\max Z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1.5}$$

其中：$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$(j=1,2,\cdots,n)$。

称 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组的系数矩阵($m\times n$ 阶)，一般情况下 $m<n$，m,n 为正整数，分别表示约束条件的个数和决策变量的个数，$\boldsymbol{C}$ 为价值向量，$\boldsymbol{X}$ 为决策向量，通常 $a_{ij},b_i,c_j(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 为已知常数。

实际上，具体问题的线性规划数学模型是各式各样的，需要把它们化成标准型，并借助于标准型的求解方法进行求解。

下面就具体讨论如何把一般的线性规划模型化成标准型。

(1) 若要求目标函数实现最小化，即此时的目标函数是：$\min Z=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，这时只需要将目标函数的最小值变换为求目标函数的最大值，即 $\min Z=\max(-Z)$。令 $Z'=-Z$，于是就得到：$\max Z'=-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$。

(2) 若约束方程组为不等式。这时有两种情况：一是约束条件为“$\leqslant$”形式的不等式，则在“$\leqslant$”号的左边加入非负的松弛变量，把原“$\leqslant$”形式的不等式变为等式；另一种是约束条件为“$\geqslant$”形式的不等式，则可在“$\geqslant$”的左端减去一个非负的剩余变量，把不等式变为等式。相应的松弛变量或剩余变量在目标函数中的价值系数取值为 0。

(3) 若存在无非负要求的变量，即有某一个变量 x_j 取正值或负值都可以。这时为了满足标准型对变量的非负要求，可令 $x_j=x_j'-x_j''$，其中：$x_j',x_j''\geqslant 0$，由于 x_j' 可能大于也可能小于 x_j''，故 x_j 可以为正也可以为负。

上述标准型具有如下特点：

(1) 目标函数求最大值；

(2) 所求的变量都要求是非负的；

(3) 所有的约束条件都是等式；

(4) 常数项非负。

综合以上讨论可以说明，任何形式的线性规划问题都可以通过上述手段把非标准型的线性规划问题化成标准型。现举例如下。

例 1-3 将例 1-1 的数学模型化为标准型。

解 引进 3 个新的非负变量 x_3,x_4,x_5 使不等式变为等式，标准型为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$
$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$