高等数学的基本概念与方法

邓乐斌 编

GAODENGSHUXUE DE JIBENGAINIAN YU FANGFA

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高等数学的
基本概念与方法

邓乐斌　编

华中科技大学出版社
（中国·武汉）

图书在版编目(CIP)数据

高等数学的基本概念与方法/邓乐斌　编. —武汉:华中科技大学出版社,2004年6月
ISBN 978-7-5609-3138-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 邓…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第129794号

高等数学的基本概念与方法　　邓乐斌　编

责任编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任校对:吴　晗　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国・武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印　刷:荆州市今印印务有限公司

开本:850mm×1168mm　1/32　印张:13.75　字数:331 000
版次:2004年6月第1版　印次:2007年8月第2次印刷　定价:19.80元
ISBN 978-7-5609-3138-8/O・315

内 容 简 介

本书以高等数学的基本内容为素材，着重分析解题思路，探究解题规律，总结解题方法，其中有不少的解题思路和方法具有很强的引导性和启迪性.

本书主要包括极限、连续、微分学、积分学、级数理论、解析几何与常微分方程初步等内容，可作为理工科学生学习高等数学的辅导书，也可供从事高等数学教学的同仁们参考.

前　言

本书是在作者使用多年的教学讲义基础上修改而成的. 本书着重分析解题思路，总结解题方法，探究解题规律，力求使读者能在短时间内尽快掌握一些有价值、有规律的解题方法和技巧，将所学知识融会贯通，达到举一反三、触类旁通的目的.

本书以章节为序，共分十三章，内容包括极限、连续、微分学、积分学、级数理论、解析几何和微分方程初步等. 每节分为教学要求、内容提要、典型例题解析（有些章节增加了疑难解析）、练习题等部分. “教学要求”旨在让读者了解所要达到的目标；“内容提要”集中介绍了必须掌握的定义、定理和公式，可节省读者查阅资料的时间；“典型例题解析”针对一些常见的、有代表性的、有一定难度的问题进行解剖分析，希望以此帮助读者掌握基本的理论、方法和技巧；“练习题”希望读者能独立完成，这对深入理解基本理论、巩固所学的解题方法是大有裨益的.

在本书的编写过程中，校长李生德副教授、副校长杨立志教授始终给予了热情的关怀与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于水平有限，加之时间仓促，本书的缺点和疏漏在所难免，恳请读者不吝赐教，批评指正.

编　者

2004.2

目　录

第一章 函　　数

第一节　函数概念

一、教学要求

函数是高等数学研究的主要对象，是高等数学中最重要、最基础的概念之一，要求：

(1)深刻理解函数的概念；

(2)掌握函数的四则运算法则；

(3)会描绘简单函数的图形.

二、内容提要

1. 函数定义

设 D 是非空的实数集合，如果 $\forall\ x\in D$，按照对应规律 f，都对应唯一一个 $y\in \mathbf{R}$，则称对应规律 f 是定义在 D 上的函数，记为

$$f:D\to\mathbf{R}\quad 或\quad x\mapsto y.$$

数集 D 称为函数 f 的定义域；数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，记为 $y=f(x)$；函数值的全体集合称为函数 f 的值域，记为 $f(D)$. 即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}\subset\mathbf{R},$$

称 x 为自变量，y 为因变量.

2. 函数定义剖析

(1)f 与 $f(x)$的区别　f 是对应规律，是函数；$f(x)$是函数值，它是一个实数.

不妨把对应规律 f 当做一台加工机（如面粉加工机）；投进原

料 x(如麦子),经过加工,得到产品 $f(x)$(如面粉),如图 1-1 所示.

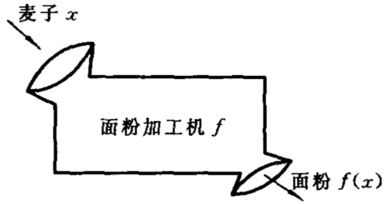

图 1-1

又如图 1-2 所示,对应规律( )×2+1 是一台数字加工机,投进原料 x,得到产品 $2x+1$.

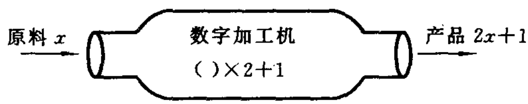

图 1-2

从以上两图可以清楚地看到:f 与 $f(x)$ 显然是不能混为一谈的. 但是习惯上又说"y 是 x 的函数"或"$f(x)$ 是 x 的函数",这只是为了方便所作的一种约定,表明 y 与 x 之间有一种函数关系而已.

(2)函数的两要素

1)定义域和对应规律是构成函数的两要素,于是,可以将定义在 D 上的函数 f 简记为 $y=f(x), x\in D$.

2)自变量和因变量选用何种记号无关紧要,如"$y=f(x), x\in D$","$u=f(t), t\in D$","$w=f(s), s\in D$"都表示同一个函数.

3)如果两个函数的定义域相同,对应规律也相同,则称两个函数相等,否则不等.

3. 函数表示法

表示函数的方法主要有解析法、图像法、列表法.

解析法又叫公式法,是用解析表达式表示函数的方法. 如果对应规律是由表格或图像表示出来的方法,则称之为列表法或图像法.

注意 表示函数的方式没有任何限制,不要以为函数就是公

式. 公式只是表示函数的一种形式，而且即使采用公式来表示函数，也不见得非用一个公式不可. 可以同时用几个公式表示同一个函数，例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

诸如此类函数，在其定义域的不同部分用不同的公式表达，我们常称之为分段函数.

有些函数无法用解析法、列表法或图像法表示，只能用语言来描述，这种表示函数的方法称为描述法. 例如，定义在整个实数轴上的狄利克雷(Dirichlet)函数为

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

三、典型例题解析

例1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(1-2\cos x)$；(2) $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解 (1)当 $1-2\cos x>0$ 时，函数才有意义，于是有 $\cos x<1/2$. 解之，得定义域为满足不等式

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的集合 D，记为

$$D=\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}.$$

(2)求 $\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域相当于解不等式

$$x^2-x-6\geqslant 0, \quad \text{即} \quad (x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

而 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即

$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得 $$-3\leqslant x\leqslant 4.$$
两部分在数轴上的公共部分是
$$-3\leqslant x\leqslant -2 \quad 或 \quad 3\leqslant x\leqslant 4,$$
即所求函数的定义域为$[-3,-2]\cup[3,4]$.

注意 求函数的定义域的原则如下：

1)偶次根式的函数,其根号下的值要大于或等于零；

2)分式函数,其分母不能是零；

3)奇函数或偶函数的定义域是关于原点对称的数集；

4)函数$y=f(x)$的值域是其反函数$x=f^{-1}(y)$的定义域；

5)有限个函数的四则运算得到的函数的定义域是这有限个函数定义域的交集；

6)对数函数的真数必须是大于零的数；

7)具有物理、几何等实际意义的函数,它的定义域总是解析式表示该函数定义域的子集,该子集由实际意义确定.

例2 设$f(x)$的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域：

(1)$h(x)=f(4x^2)$； (2)$g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

解 (1)令$t=4x^2$,则$f(4x^2)=f(t)$.

其定义域为$0\leqslant t\leqslant 1$,故$-1/2\leqslant x\leqslant 1/2$. 所以$h(x)$的定义域为$[-1/2,1/2]$.

(2)为使$g(x)$有意义,$f(x+a)$与$f(x-a)$必须均有意义,因此应有
$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$$
即$x\in[-a,1-a]$和$x\in[a,1+a]$应同时成立,即$g(x)$的定义域是$[-a,1-a]$与$[a,1+a]$的公共部分. 讨论如下：

当$a\leqslant 1-a$ 即 $0<a\leqslant 1/2$ 时,$g(x)$定义域为$[a,1-a]$；

当$a>1-a$ 即 $a>1/2$ 时,$[-a,1-a]$与$[a,1+a]$无公共部分,所以$g(x)$的定义域为空集.

例3 下列各组函数是否为同一函数？为什么？

(1)$f(x)=\sqrt{x^2}$，　$g(x)=x$；　(2)$f(x)=x^2/x$，　$g(x)=x$；

(3)$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$，　$g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$.

解　(1)$f(x)$与$g(x)$的定义域虽然相同，均为$(-\infty,+\infty)$，但是由于

$$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

在$x<0$时，$f(x)=-x$，而$g(x)=x$，显然，它们的对应规律不同，所以它们不是同一函数.

(2)$f(x)$的定义域为$x\neq 0$的实数，而$g(x)$的定义域为全体实数，所以$f(x)$与$g(x)$不是同一函数.

(3)易求出$f(x)$与$g(x)$的定义域都是$[1,2)$，$\forall\ x\in[1,2)$都是

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}=g(x),$$

所以它们的对应规律也相同，故$f(x)$与$g(x)$为同一函数.

第二节　几种特殊类型的函数

一、教学要求

周期函数、单调函数、奇函数和偶函数、有界函数是今后学习中经常用到的函数，要求：

(1)理解它们的概念，了解它们的几何意义；

(2)会应用这些函数的概念证明某些问题.

二、内容提要

1. 周期函数

定义1.1　设函数的定义域是数集D，若存在常数$k>0$，对于D

中任意的 x，且 $x\pm k\in D$ 有 $f(x\pm k)=f(x)$，则称函数 f 是周期函数，k 称为 f 的周期.

注意 1)由定义可知：若 $k(k>0)$ 是 $f(x)$ 的周期，则 $2k,3k,\cdots,nk,\cdots$ 也是它的周期. 若在周期函数的所有周期中有一个最小的周期，则称这个周期为基本周期. 一般地说，函数的周期专指它的基本周期.

2)条件"对于 D 中的任意的 x，且 $x\pm k\in D$"表明，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有 $x\pm 2k\in D,x\pm 3k\in D,\cdots,x\pm nk\in D,\cdots$，即定义域 D 是既无上界又无下界的数集，否则一个函数就不可能是周期函数.

3)并不是所有的周期函数都有基本周期，例如狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

可以证明，任何正有理数都是它的周期. 证明如下：

设 $r\in\mathbf{Q}$，且 $r>0$，那么 $\forall\ x\in\mathbf{R}$ 有

$$D(x\pm r)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

即
$$D(x\pm r)=D(x),$$
所以 $r>0$ 为 $D(x)$ 的周期.

但是，因为正有理数集没有最小的数，所以狄利克雷函数是没有最小正周期的非常值的周期函数.

又如：$f(x)=c$ (c 为常数)也是周期函数，且任何大于零的实数都是它的周期，但它同样不存在最小周期(读者自己可以证明这一结论).

什么样的周期函数一定有基本周期呢？一般有如下定理.

定理1.1 设异于常数的周期函数 f 是连续的，那么 f 有基本周期.

定理1.2 设 f 是异于常数的周期函数，且 f 在 x_0 点连续，则 f 有基本周期.

4)两个周期函数的和或积不一定是周期函数. 例如，函数

$$f(x)=\sin x \quad 与 \quad g(x)=\sin \mathrm{e} x$$

分别是以 2π 与 $2\pi/\mathrm{e}$ 为周期的周期函数，但是，函数

$$f(x)+g(x)=\sin x+\sin \mathrm{e} x$$

却不是周期函数. 用反证法证明如下：

假设它是以 k $(k>0)$ 为周期的函数，则对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有

$$\sin(x+k)+\sin(\mathrm{e}x+k\mathrm{e})=\sin x+\sin \mathrm{e}x,$$

即
$$\sin(x+k)-\sin x=-[\sin(\mathrm{e}x+k\mathrm{e})-\sin \mathrm{e}x],$$

$$\cos(x+k/2)\sin(k/2)=-\cos(\mathrm{e}x+k\mathrm{e}/2)\sin(k\mathrm{e}/2).$$

设 $x+k/2=y\in\mathbf{R}$，有

$$\cos y\sin(k/2)=-\cos \mathrm{e}y\sin(k\mathrm{e}/2), \tag{①}$$

令 $y=\pi/2$，由式①可得

$$0=-\cos(\pi\mathrm{e}/2)\sin(k\mathrm{e}/2),$$

由此得 $\sin(k\mathrm{e}/2)=0$，因此 $k\mathrm{e}$ 必是 2π 的整数倍. 设 $k\mathrm{e}=2n\pi, n\in\mathbf{N}$，又令 $\mathrm{e}y=\pi/2$，由式①又可得

$$\cos(\pi\mathrm{e}/2)\sin(k\mathrm{e}/2)=0.$$

因此 $\sin(k\mathrm{e}/2)=0$，且 k 必是 2π 的整数倍. 设 $k=2m\pi, m\in\mathbf{N}$，从而

$$\mathrm{e}=\frac{2n\pi}{2m\pi}=\frac{n}{m}.$$

这与 e 是无理数矛盾，从而证明了 $\sin x+\sin \mathrm{e}x$ 不是周期函数.

那么在什么条件下，两个周期函数的和或积仍是周期函数呢？有如下定理：

定理 1.3 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别有最小正周期 T_1 和 T_2，则 $f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 为周期函数的充要条件为 T_1/T_2 是有理数.

2. 单调函数

定义 1.2 设函数在数集 D 上有定义，如果 $\forall\ x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 在 D 上单调增加(或单调减少). 如果将上述不等式改

写为

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 f 在 D 上严格单调增加(或严格单调减少).

上述四种函数统称为单调函数.

严格单调增加函数和严格单调减少函数统称为严格单调函数,单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

若数集 D 为区间,则称此区间为单调区间.

注意 说函数单调,必须指明所在的数集. 如 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数,但在 $(-\infty,0)$ 或 $[0,+\infty)$ 上都是单调的.

3. 奇函数与偶函数

定义 1.3 设 D 为对称于原点的数集,f 是定义在 D 上的函数,若对于每一个 $x\in D$(这时也有 $-x\in D$)都有

$$f(-x)=-f(x)\quad (\text{或} f(-x)=f(x)),$$

则称 f 为定义在 D 上的奇函数(或偶函数).

注意 1)奇、偶函数的几何特征是:奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

2)如果函数的定义域不是关于原点对称的,就不能言及它的奇偶性. 因为对于定义域中的 x,$-x$ 不一定也在定义域中,如 $y=\sin x$, $x\in[-\pi,2\pi]$,对于 $x=2\pi$, $-x=-2\pi$ 就不在定义域 $[-\pi,2\pi]$ 中,所以此时根本就不能满足奇、偶函数的定义.

4. 有界函数

定义 1.4 设 f 为定义在 D 上的函数,若存在数 M(或 L),$\forall x\in D$,有

$$f(x)\leqslant M\quad (\text{或} f(x)\geqslant L),$$

则称 f 在 D 上有上界(或有下界)函数,M(或 L)称为 f 的一个上界(或下界).

定义 1.5 设 f 为定义在 D 上的函数,若存在正数 M,$\forall x\in D$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 f 为在 D 上有界函数.

例如 $f(x)=\sin x$ 为 $\mathbf{R}$ 上有界函数，因为 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$.

注意 1)若 M 为 f 的一个上界，则任何大于 M 的数都是 f 的上界.

2) f 是有界函数，意味着 f 既有上界又有下界.

3)讨论函数的有界性，一定要指明在什么数集上. 如 $f(x)=1/x$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，但在 $(0,1)$ 内却无界.

4)函数的有界性从几何意义上来说，即是存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$，函数的图像位于以这两条直线为边界的带形区域内(见图1-3).

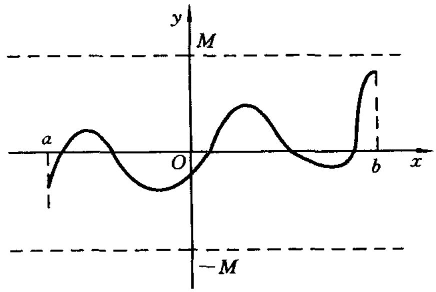

图 1-3

所谓函数 f 为数集 D 上无上界(无下界，无界)函数，是指它不满足上述相应的定义，但也可以像有上界函数那样给出正面陈述.

定义 1.6 设 f 为定义在 D 上的函数，若对任意大的正数 M，都存在 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)>M$，则称 f 为 D 上无上界函数.

比较无上界函数定义与有上界函数定义，可以发现，两个定义的主要差别在于把一个定义中的“存在”改为“任意”. 把“任意”改为“存在”，就得到与其概念相反的另一个定义.

表1-1 给出函数有上(下)界的肯定、否定的定义.