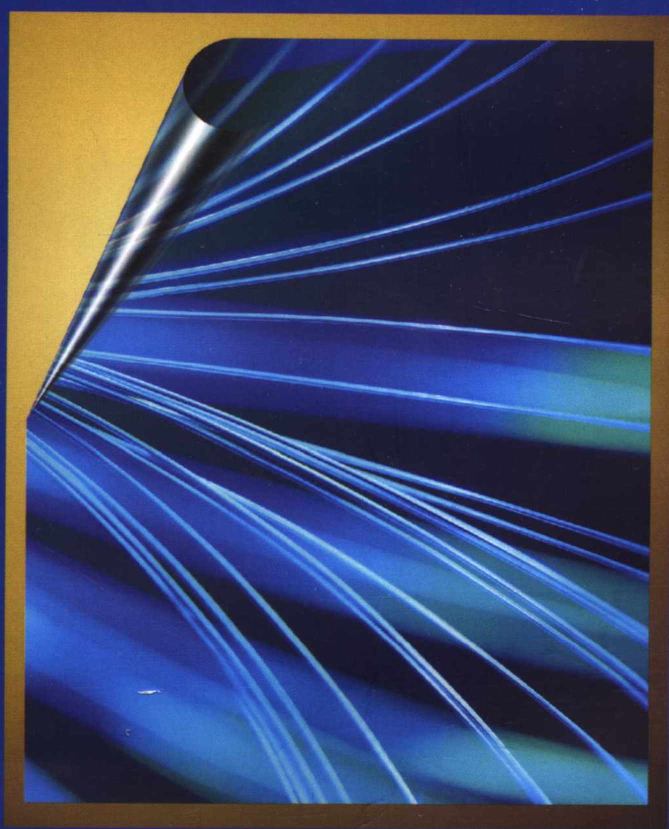
21世纪高等职业教育规划教材

经济应用数学

马 敏 冯 梅 主编



苏州大学出版社

21世纪高等职业教育规划教材

经济应用数学

马 敏 冯 梅 主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/马敏,冯梅主编. —苏州：苏州大学出版社,2007.7
21世纪高等职业教育规划教材
ISBN 978-7-81090-857-3

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①马…②冯… Ⅲ. 经济数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第110666号

经济应用数学
马 敏 冯 梅 主编
责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号 邮编：215021)
丹阳市兴华印刷厂印装
(地址：丹阳市胡桥镇 邮编：212313)

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 15 字数 370千
2007年7月第1版 2007年7月第1次印刷
ISBN 978-7-81090-857-3 定价：24.00元

本书编委会

主　编 马　敏　冯　梅

副主编 管颂东　马　林

编　委（以姓氏笔画为序）

于正权　马　林　马　敏　王开帅

冯　梅　刘　涛　宋然兵　张安宁

俞　宁　黄亚玲　龚汉坤　嵇金山

管颂东

前　言

PREFACE

高等数学是高等职业技术教育的必修课。随着经济、社会和科学技术的高速发展，数学的内容、思想、方法以及语言在科学技术、经济建设及生活实践中得到广泛的应用，并成为现代文化的重要组成部分。

经济应用数学是经济管理中所用的高等数学，它与通常的高等数学相比有其特殊性，因此需要正确认识经济与数学的关系。将数学应用于经济学，可以深入揭示仅靠定性分析难以表达的现代经济错综复杂的相互关系及变化趋势，可以定量分析预测一些决策的直接效果与间接效果，从而正确把握经济决策的方向。但是，数学应用于经济学，并不是取代经济学。因此，本教材力求在把握好经济应用于数学基础课程的定位和科学发展，保持课程学科体系的合理性和教学内容系统性的同时，又不失经济概念的严谨性和时代特征。

我们根据教育部有关文件精神，以"结合实际，深化概念，加强计算，注重应用"为宗旨，以"以应用为目的，以必需够用为度"为原则，编写了本教材。因此，本教材中许多概念、定理采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减小了难度，精简了内容，更适应普通高职高专院校的教学需要。

本书由马敏、冯梅主编，管颂东、马林副主编，参加编写的人员有（按姓氏笔画为序）：马林、马敏、王开帅、冯梅、宋然兵、嵇金山、管颂东。

本教材中不妥之处敬请读者提出批评和建议，以期修正。

编　者

2007 年 7 月

目录 Contents

第一部分　一元微积分

第二部分　概率与统计

第三部分　线性代数

第四部分　附录

第一部分　一元微积分

第一章　函数、极限与连续

函数是数学中最基本的概念之一，是客观世界中变量之间依从关系的反映；极限是高等数学中重要的工具，借助于极限进行推理是这门课程的基本手段；连续则是函数的一个重要的性态.

第一节　函　　数

一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

定义 1　在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于给定的非空数集 D 中的每一个值 x，按照一定的规律，y 总有惟一的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，并且记做 $y=f(x)$. 其中 x 叫做函数的自变量；f 是函数符号，表示 y 与 x 的对应规律；数集 D 叫做函数的定义域，数集 $\{f(x)\,|\,x\in D\}$ 叫做函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 当 $x=a$ 时的对应值，叫做当 $x=a$ 时的函数值，用记号 $f(a)$ 或 $y\Big|_{x=a}$ 表示.

例 1　已知 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-x)$，$f(x+1)$.

解　$f(0)=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$，

$f(2)=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，

$f(-x)=\dfrac{-x-1}{-x+1}=\dfrac{x+1}{x-1}$，

$f(x+1)=\dfrac{x}{x+2}$.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$；

(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$；

(3) $f(x)=\ln(4x-3)$.

解 (1) 分式的分母不能为零，所以 $x^2-4\neq 0$，解得 $x\neq\pm 2$，所以定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 负数不能开偶次方，所以 $9-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，所以定义域为 $[-3,3]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，所以定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有解析法(公式法)、表格法和图象法.

(1) 用数学式子表示自变量与对应函数值的关系的方法叫做解析法，也叫公式法；

(2) 在实际应用中将自变量值与对应函数值的关系列成表格的方法叫做表格法；

(3) 用图象来表示自变量与对应函数值的关系的方法叫做图象法.

在解决实际问题时，应根据问题的特点选用适当的表示法或者结合使用，在理论研究中主要用解析法表示函数，在经济活动中会更多地用表格法和图象法表示函数.需要注意的是，用解析法表示函数时，不一定只用一个式子给出，同一个函数，当自变量在不同的范围内变化时，可以用不同的式子表示，例如

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.像这样，函数在不同范围用不同的式子表示的函数叫分段函数.

例 3 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分，每千克交 0.8 元，超过 50 kg 的部分每千克交费 1 元，求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设 $x$kg 重的物品，应交运费 y 元，根据题意，则有

当 $0<x\leqslant 20$ 时，$y=0$；

$20<x\leqslant 50$ 时，$y=(x-20)\times 0.8$；

$x>50$ 时，$y=30\times 0.8+(x-50)\times 1$.

所以 $$y=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 20, \\ 0.8x-16, & 20<x\leqslant 50, \\ x-26, & x>50. \end{cases}$$

3. 函数的几种特性

(1) 单调性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的.

单调增加的函数与单调减少的函数统称单调函数.

在几何上,单调增加函数的图形是随 x 的增加而上升的曲线;单调减少函数的图形是随 x 的增加而下降的曲线.

(2) 有界性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,若存在正数 M,使得对于一切 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数,否则称为 D 上的无界函数.

例如,$y=\sin x$,对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $\sin x$ 是有界函数.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义,且 D 为关于原点的对称区间,那么:

(i) 若对任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

(ii) 若对任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

在几何上,偶函数图象关于 y 轴对称,奇函数图象关于原点对称. 例如,$y=\cos x$ 在其定义域上是偶函数,因为 $\cos(-x)=\cos x$;$y=\sin x$ 在其定义域上是奇函数,因为 $\sin(-x)=-\sin x$;$y=x^2+x$ 是非奇非偶函数.

(4) 周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的常数 L,使得一切 $x\in D,x+L\in D$,都有 $f(x+L)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 上为周期函数,L 称为这个函数的周期.

通常,我们所说的周期函数的周期是指最小正周期,记为 T. 例如,$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数;$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 是以 $T=\pi$ 为周期的周期函数.

二、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、三角函数和反三角函数. 我们常见的许多函数都有是由基本初等函数作为“元素”组成的.

(1) 常数函数 $y=c$

常数函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值时,都有 $y=c$,所以它的图象是过 $(0,c)$ 平行于 x 轴的一条直线,它是偶函数.

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 为任意实数)

当 α 取不同值时,幂函数的定义域不同,为了便于比较,我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,而 $x<0$ 时的图象可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时,函数的图象通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界;

当 $\alpha<0$ 时,函数的图象不过原点,但仍通过点 $(1,1)$,在 $(0,+\infty)$ 内单调减少且无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

指数函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以它的图象全部在 x 轴上方,且通过点 $(0,1)$,也就是说它的值域为 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴正半轴为渐近线.

(4) 对数函数 $y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，图象全部在 y 轴右方，值域为$(-\infty,+\infty)$，无论 x 取何值，曲线通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴正半轴为渐近线.

对数函数 $y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$与指数函数 $y=a^x\,(a>0, a\neq 1)$互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

(5) 三角函数

三角函数包括：正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$.

正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1,1]$，奇函数，有界，以 2π 为周期；

余弦函数 $y=\cos x$，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1,1]$，偶函数，有界，以 2π 为周期；

正切函数 $y=\tan x$，定义域为$\left\{x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$，奇函数，无界，以 π 为周期；

余切函数 $y=\cot x$，定义域为$\{x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$，奇函数，无界，以 π 为周期；

关于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不做详细讨论，只需知道它们分别为 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数

常用的反三角函数有：反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$和反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$.

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，奇函数，有界，单调增加；

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，有界，单调减少；

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域 $\mathbf{R}$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，奇函数，有界，单调增加；

反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$，定义域 $\mathbf{R}$，值域为$(0,\pi)$，有界，单调减少.

2. 复合函数

定义 5 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 $y=f(u)$的定义域与 $u=\varphi(x)$的值域的交集非空，则 y 通过 u 成为 x 的函数，这个函数称为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

例 4 求 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，得到所求的复合函数为 $y=\cos^2 x$.

例 5 已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

解 将 $v=\cos x$ 代入 $u=4-v^2$，得到 $u=4-\cos^2 x$；

再将 $u=4-\cos^2 x$ 代入 $y=\ln u$，得到复合函数为 $y=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 6 指出下列函数是同哪些函数复合而成：

(1) $y=(3x+1)^6$；(2) $y=e^{\sin x}$；(3) $y=\ln^3(x+1)$.

解　(1) $y=(3x+1)^6$ 由 $y=u^6, u=3x+1$ 复合而成；

(2) $y=e^{\sin x}$ 由 $y=e^u, u=\sin x$ 复合而成；

(3) $y=\ln^3(x+1)$ 由 $y=u^3, u=\ln v, v=x+1$ 复合而成.

3. *初等函数*

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成，并且能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{\ln 5x-3^x+\sin 2x}$，$y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+\cos x}$ 都是初等函数，而函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

就不是初等函数.

三、常用经济函数

在用数学方法解决经济问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型. 下面介绍几种常用的经济函数.

1. *需求函数与供给函数*

(1) 需求函数

一种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 p 密切相关，通常，降低商品价格会使需求量增加，而提高商品价格会使需求量减少. 如果不考虑其他因素的影响，需求量 Q 可以看成是价格 p 的一元函数，称为需求函数，记做 $Q=Q(p)$.

一般地，需求函数 Q 为价格 p 的单调减少函数.

根据市场统计资料，常见的需求函数有以下几种类型：

1) 线性需求函数　$Q=a-bp\ (a>0, b>0)$；

2) 二次需求函数　$Q=a-bp-cp^2\ (a>0, b>0, c>0)$；

3) 指数需求函数　$Q=ap^{-bp}\ (a>0, b>0)$.

(2) 供给函数

一种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少，供给量 S 也可以看成价格 p 的一元函数，称为供给函数，记做 $S=S(p)$.

常见的供给函数有线性函数、幂函数、指数函数等. 其中，线性供给函数为

$$S=-c+dp\ (c>0, d>0).$$

使商品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0 称为均衡价格. 当市场价格 p 高于均衡价格 p_0 时，供给量将增加而需求量相应减少，这时产生的“供大于求”的现象必然使价格 p 下降；当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量将减少而需求量相应增加，这时会产生“供不应求”现象，从而又使价格 p 上升. 市场价格的调节就是这样来实现的.

例 7　当鸡蛋收购价为 4.5 元/kg 时，某收购站每月能收购 5000kg. 若收购价提高 0.1 元/kg，则收购量可增加 400kg，求鸡蛋的线性供给函数.

解　设鸡蛋的线性供给函数为 $S=-c+dp$，由题意有

$$\begin{cases}5000=-c+4.5d,\\5400=-c+4.6d,\end{cases}$$

解得 $d=4000$，$c=13000$，所求的供给函数为

$$S=-13000+4000p.$$

例 8 已知某商品的需求函数与供给函数分别为 $Q=14.5-1.5p$，$S=-7.5+4p$. 求该商品的均衡价格 p_0.

解 由供需均衡的条件：需求量 Q 等于供给量 S，可得

$$14.5-1.5p=-7.5+4p,$$

解之得 $p=4$，故均衡价格 $p_0=4$.

2. *总成本函数、收入函数与利润函数*

在生产和产品的经营活动中，人们总希望尽可能地降低成本，提高收入与利润. 而成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量 q 密切相关，它们可以看做 q 的函数，分别称为总成本函数，记做 $C(q)$；收入函数，记做 $R(q)$；利润函数，记做 $L(q)$.

总成本由固定成本 C_1 与可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成，固定成本与产量 q 无关，如设备维修费、企业管理费等；可变成本随产量 q 的增加而增加，如原材料费、动力费等. 即

$$C(q)=C_1+C_2(q).$$

总成本函数 $C(q)$ 是产量 q 的单调增加函数. 最典型的成本函数是三次函数

$$C(q)=a_0+a_1q+a_2q^2+a_3q^3 \quad (a_i>0, i=0,1,2,3).$$

但有时为了使问题简单化，常常采用线性成本函数 $C=a+bq(a>0,b>0)$ 及二次成本函数.

只给出总成本不能反映企业生产的好坏，为了评价企业的生产状况，需要计算产品的平均成本，即生产 q 件产品时成本平均值，记做 $\overline{C}$，

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q},$$

其中 $\frac{C_2(q)}{q}$ 称为平均可变成本.

如果产品的售价为 p，则收入函数为

$$R(q)=pq.$$

利润等于收入与总成本的差，于是利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

例 9 已知某产品的总成本函数为 $C=2000+\frac{q^2}{8}$，求当生产 200 个该产品时的总成本和平均成本.

解 由题意，产量为 200 时的总成本为

$$C(200)=2000+\frac{200^2}{8}=7000,$$

产量为 200 时的平均成本为

$$\overline{C}(200)=\frac{7000}{200}=35.$$

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x^2+3x-4}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\lg(x^2+2x-3)$；　　(4) $y=\sqrt{16-x^2}+\frac{1}{x-1}$.

2. 设函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，求 $f(-1),f(0),f(1),f(a),f(a+1),f(x+4)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right),f(0),f\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2+\cos x$；　　(2) $y=x^3-\sin x$；

(3) $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$；　　(4) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

5. 如果 $y=u^2,u=\ln x$，将 y 表示成 x 的函数.

6. 如果 $y=\sqrt{u},u=2+v^2,v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

7. 写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt[3]{2x+1}$；　　(2) $y=\sin(4x-3)$；

(3) $y=e^{\cos x}$；　　(4) $y=\ln(x^2-1)$；

(5) $y=\arctan 2^x$；　　(6) $y=\tan^3(2x+1)$.

8. 已知产品价格 p 和需求量 Q 满足关系式 $3p+Q=60$. 试求需求函数 $Q(p)$ 和总收入函数 $R(p)$，并作出它们的图象.

第二节　极限的概念

一、数列的极限

我们先看两个无穷数列：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$.

经观察后容易发现，当项数 n 无限增大时，数列(1)中的项无限趋近于 0，数列(2)中的项无限趋近于 1. 我们用下列的定义来描述数列的这种变化趋势：

定义 1　当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，如果 a_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，则称当 n 趋近于无穷大时，数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，或说数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 记做

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \text{ 或 } a_n\to A(n\to\infty).$$

否则,称该数列没有极限,或说数列是发散的.

二、函数的极限

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 2 如果当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记做

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

例如函数 $y=\frac{1}{x}$,当 $x\to\infty$ 时,$y\to 0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

有时我们还需要注意到 $x\to\infty$ 时 x 的正负情况. 当 $x\to\infty$ 时,如果 $x>0$,则记做 $x\to+\infty$;当 $x\to\infty$ 时,如果 $x<0$,则记做 $x\to-\infty$. 所以,类似可以有如下定义:

定义 2′ 如果当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记做

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例如,函数 $y=\arctan x$ 当 $x\to+\infty$ 时,$y\to\frac{\pi}{2}$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$;函数 $y=e^x$,当 $x\to-\infty$ 时,$y\to 0$,所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

上面我们定义了当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限. 如果当 x 趋近于某一定值 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限地与一个定值 A 接近,这时函数 $f(x)$ 的极限如何定义呢?

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义(在 x_0 处可以没有定义),如果当 x 趋于值 $x_0(x\neq x_0)$ 时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限,记做

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

显然,常数函数 $y=c$ 的极限是它本身,即 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$;而函数 $y=x$ 的极限为 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

对于 $x\to x_0$,有时需要考察 x 仅从 x_0 的左侧($x<x_0$)和仅从 x_0 的右侧($x>x_0$)趋近于 x_0 时,$f(x)$ 的变化趋势. 如果 x 仅从 x_0 的左侧趋近于 x_0,记做 $x\to x_0^-$;如果 x 仅从 x_0 的右侧趋近于 x_0,记做 $x\to x_0^+$. 类似地,可以有如下定义:

定义 3′ 设函数 $f(x)$ 在 x_0 左(右)侧附近有定义,当 $x\to x_0^-$ ($x\to x_0^+$)时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有左(右)极限 A,记做

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)\right).$$

例 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$.

定理 1　函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是函数在该点的左右极限存在并且相等.

例 2　设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x\geqslant 1,\\ 3x, \quad x<1,\end{cases}$ 试判断 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 是否有极限存在.

解　$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x=3$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$,

左右极限存在且相等，所以 $x\to 1$ 时函数 $f(x)$ 极限存在，且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

3. 无穷小量与无穷大量

在有极限的函数中，我们对以零为极限的函数特别关注.

(1) 无穷小量

定义 4　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小量，简称无穷小.

例如，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$ 是无穷小量；

当 $x\to 1$ 时，$x-1$ 是无穷小量；

当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 是无穷小量.

特别要注意，0 是无穷小，并且是惟一的可以作为无穷小的常数.

(2) 无穷小的性质

1) 有限个无穷小之和(差)仍为无穷小；

2) 有限个无穷小之积仍为无穷小；

3) 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.

例 3　求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\sin x)$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，

所以当 $x\to 0$ 时 x^2 和 $\sin x$ 都是无穷小量，

从而得　$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\sin x)=0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，$|\sin x|\leqslant 1$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x=0$.

(3) 无穷小与函数极限的关系

定理 2　函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是：$f(x)$ 可以表示为 A 与一个无穷小量 α 之和. 即

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha，\text{其中}\lim\alpha=0.$$

(4) 无穷大量

定义 5　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大量，简称无穷大.

例如，当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x^2-1}$ 是无穷大；