DuoGongNeng TiDian

GaoZhongShuXue

快速检索：
关键词、知识点、
方法、题型、难度……

多功能题典

高中数学

主编 况亦军

华东师范大学出版社

多功能题典

高中数学

主编 况亦军

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

多功能题典·高中数学/况亦军主编. —上海：华东师范大学出版社，2007.1
ISBN 978-7-5617-5141-1

Ⅰ.多… Ⅱ.况… Ⅲ.数学课-高中-习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 160749 号

多功能题典·高中数学

主　　编/况亦军
项目编辑/应向阳　徐惟简
策划组稿/倪　明　徐惟简
文字编辑/陈信漪　徐　金　等
封面设计/黄惠敏
版式设计/蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021-62450163 转各部　行政传真 021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　上海长阳印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
插　　页　4
印　　张　23.25
字　　数　910 千字
版　　次　2007 年 1 月第一版
印　　次　2007 年 1 月第一次
印　　数　11000
书　　号　ISBN 978-7-5617-5141-1/G·3017
定　　价　33.00 元

出 版 人　朱杰人

致 读 者

亲爱的读者，展现在您面前的这套《多功能题典》是以中小学生、教师为读者对象，主要以中、高考要求与课程标准为依据而编写的系列丛书. 包括高中数学、高中物理、高中化学、初中数学、初中物理、初中化学、小学数学竞赛共 7 册.

题典类图书的重要特征在于将学科知识以题解形式进行科学、系统的归纳整理，并给出解题思路，以提高学生解决问题和分析问题的能力. 本丛书在这一基本特色的基础上，为方便读者使用，更为了提高效率，开发了多项功能，进一步发挥题典类图书的作用.

本丛书有以下特点.

作者权威 编写队伍由各学科考试命题的专家、学者与长期在教学第一线的资深特、高级教师组成. 他们各取所长，各展所能，把自己长期积累、精心筛选的新颖而规范的经典试题共同打造出这一套实践性的丛书.

题目典范 本丛书不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性. 书中每一道试题的编制和确定都经过了多道关卡，从作者的编选和教学使用、主编总纂到编辑审读、专家审定，确保题题经典.

体例新颖 丛书不仅对每一道题提供了精妙的“题解”，更是引导读者“解题”，注重方法、思路的点拨，并对每一道题标出了难度，使读者学有所思、学有所得，不仅能举一反三，更能了解自己的学习水平，把握学习方向.

超强检索 我社配套本书开通了强大的网上检索功能. 当你需要某种检索时，可以方便地进入网站(http://tidian.ecnupress.com.cn)，从难度、题型、知识点、方法技巧等不同维度，及关键字进行组合检索，就像使用 Google 和百度一样方便.

谨以此书献给在求学路上奋力拼搏的学子们，愿你一书在手，不再为茫茫无垠的题海而迷茫，迅速提高学习水平，取得成功. 同样，此书献给为教育事业默默耕耘的广大教师们，愿这本书的使用给您带来诸多的便利，从而提高教学质量.

鉴于本丛书立意新颖，篇幅较大，难免有疏漏之处，敬请不吝指正.

华东师范大学出版社

教辅分社

前　　言

这本高中数学解题辞典，是依据现行高中数学课程标准和原有的教学大纲要求，结合近年高考大纲进行编写. 全书收集了高中数学的各类典型题近2 400道. 目的在于帮助学生遇到困难时方便查阅，丰富教师备课资料.

目前，在市场上已有不少同类书. 在编写的过程中，我们努力在选题的典型性、材料的新颖性、分布的合理性、解题的规范性等方面下功夫. 为了让这本题典发挥更好的作用，我们给每一道题目标注了难度，提供了包含知识点 1、知识点 2、方法与能力、题型的索引，方便读者根据不同的需要进行检索、查询. 尤其是，在出版社编辑的努力下，为这套书设计了多维度、多功能的网上检索系统. 因此，这本题典取名为《多功能题典・高中数学》.

对题目划分难度并非易事，全体作者基于本人经验在共同讨论的基础上趋于基本的一致，将难度分成四个等级. 一星(★)题为基本题，着重考查某一章的基本知识和基本技能；二星(★★)题主要涉及某一章的知识和方法，并结合其他章节的内容；三星(★★★)题的解决一般需要特殊一点的方法，或者需要对过程的结论或最终的结论进行探索；四星(★★★★)题综合性最强，解题的切入点往往并不明晰，需要通过尝试、探索才能解决，也是本书难度的最高级，但一般不超过高考题的难度.

在能力方面，国家课程标准提出了在数学教学过程中要注意培养学生的逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题能力等多个能力目标. 应当认为，基本的逻辑推理能力和运算能力是处理每一个数学问题的基础，而分析问题和解决问题能力则包含了十分丰富的内涵. 在本题典中，我们尝试对能力目标作一些细化，提出了诸如数学发现能力、数学模式识别能力、数学建模能力、学习能力、创新能力等相对而言含义比较单一的能力要求.

而对题型，既采用选择题、填空题、解答题等题型的客观分类，又用证明题、应用题、探索题等的主观分类，以适应教学的习惯和不同需要.

对如此多的题目赋有多种指标，这是困难的工作，也是一个尝试. 虽然许多指标的确定是集体讨论、初步研究的结果，但不一定很成熟，仅供大家参考. 如有不当之处，恳请广大读者批评指正.

参加编写有王永庆(第 1 至第 3 章)、李娜(第 4 章)、葛晨娴(第 5 章)、周珺(第 6 章)、况亦军(第 7 至第 9 章、第 14 章)、王宏(第 10 至第 12 章)、顾滨(第 13 章)、刘丽霞(第 1 5 章)，最后由况亦军统稿、定稿.

作　者

2006 年 12 月

目　　录

前言 ………………………………………………………… 1

第1章　集合与简易逻辑

§1-1　集合 ………………………………………………… 1
　一、集合的概念 ……………………………………… 1
　二、集合的运算 ……………………………………… 6
§1-2　简易逻辑 ……………………………………………… 12
　一、命题 ……………………………………………… 12
　二、充分条件和必要条件 …………………………… 14

第2章　函　　数

§2-1　函数的概念与性质 …………………………………… 19
　一、映射与函数 ……………………………………… 19
　二、函数的单调性和奇偶性 ………………………… 35
　三、反函数 …………………………………………… 48
§2-2　幂函数、指数函数、对数函数 ……………………… 52
　一、幂函数 …………………………………………… 52
　二、指数与指数函数 ………………………………… 57
　三、对数与对数函数 ………………………………… 65
§2-3　函数的应用 …………………………………………… 84
§2-4　指数方程、对数方程 ………………………………… 94
　一、指数方程 ………………………………………… 94
　二、对数方程 ………………………………………… 99

第3章　不 等 式

§3-1　不等式的性质与证明 ………………………………… 107
§3-2　解不等式 ……………………………………………… 123
§3-3　不等式的应用 ………………………………………… 136

第4章 三角函数

§4-1 任意角三角函数 …… 152
一、任意角三角函数 …… 152
二、同角三角函数关系和诱导公式 …… 158
§4-2 两角和与差的三角函数 …… 167
一、两角和与差的正弦、余弦、正切公式 …… 167
二、两倍角的正弦、余弦、正切公式 …… 176
三、积化和差及和差化积公式 …… 187
§4-3 三角函数的图象与性质 …… 192
一、正弦、余弦、正切函数的图象与性质 …… 192
二、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质 …… 206
§4-4 解斜三角形 …… 221
§4-5 反三角函数、三角方程 …… 230
一、反三角函数 …… 230
二、三角方程 …… 235

第5章 数列

§5-1 数列 …… 243
§5-2 等差数列与等比数列 …… 250
一、等差数列 …… 250
二、等比数列 …… 265
§5-3 数列的应用 …… 282
§5-4 数学归纳法 …… 291
§5-5 数列极限 …… 301

第6章 复数

§6-1 复数的概念 …… 311
§6-2 复数的运算 …… 315
§6-3 复数的三角形式 …… 329

第7章 直线方程

§7-1 直线 …… 336
一、直线的方程 …… 336
二、两直线的位置关系 …… 347

§7-2 线性规划 …… 360

第8章 圆锥曲线

§8-1 曲线与方程 …… 366
§8-2 圆 …… 376
一、圆的方程 …… 376
二、直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 381
§8-3 椭圆、双曲线、抛物线 …… 393
一、椭圆 …… 393
二、双曲线 …… 403
三、抛物线 …… 414
四、直线与圆锥曲线 …… 421
§8-4 坐标系平移 …… 438

第9章 参数方程、极坐标

§9-1 参数方程 …… 445
§9-2 极坐标 …… 459

第10章 直线和平面

§10-1 平面 …… 468
§10-2 直线与直线位置关系 …… 471
§10-3 直线与平面位置关系 …… 479
一、直线与平面平行 …… 479
二、直线与平面垂直 …… 483
三、平面的斜线 …… 492
§10-4 平面与平面位置关系 …… 500
一、平面与平面平行 …… 500
二、平面与平面垂直 …… 504
三、二面角 …… 510

第11章 几何体

§11-1 棱柱、棱锥 …… 524
一、棱柱 …… 524
二、棱锥 …… 534
§11-2 球 …… 550

第 12 章 向 量

§12-1 平面向量 …… 555

一、平面向量的概念和运算 …… 555

二、平面向量的坐标表示 …… 564

§12-2 空间向量 …… 569

一、空间向量的概念和运算 …… 569

二、空间向量的坐标表示 …… 575

第 13 章 排列、组合、二项式定理

§13-1 计数原理、排列数和组合数 …… 589

§13-2 排列、组合 …… 594

§13-3 二项式定理 …… 604

第 14 章 概率、统计

§14-1 随机事件的概率 …… 611

§14-2 互斥事件和相互独立事件的概率 …… 618

§14-3 离散型随机变量的概率分布 …… 624

§14-4 基本统计方法 …… 632

第 15 章 导数、积分

§15-1 函数极限、导数 …… 638

§15-2 导数的应用 …… 647

§15-3 不定积分、定积分 …… 664

功能检索 …… 673

第 1 章　集合与简易逻辑

§1-1　集　合

一、集合的概念

1.1.1 ★ 在"① 难解的题目；② 方程 $x^2+1=0$ 在实数集内的解；③ 直角坐标平面上第四象限内的所有点；④ 很多多项式"中，能够组成集合的是(　　).

(A) ②③　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ①②④

解析　由集合中元素的确定性可知只有②和③能组成集合，答案为 A.

1.1.2 ★ 下列集合中，有限集是(　　).

(A) $\{x \mid x<10,\ x\in \mathbf{N}\}$　　(B) $\{x \mid x<10,\ x\in \mathbf{Z}\}$

(C) $\{x \mid x^2<10,\ x\in \mathbf{Q}\}$　　(D) $\{x \mid x=y+10,\ y\in \mathbf{R}\}$

解析　由 $\mathbf{N}$ 表示自然数集得 $\{x|x<10, x\in\mathbf{N}\}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 是有限集，答案为 A.

1.1.3 ★ 若集合 $M=\{x \mid x\leqslant 6\}$，$a=\sqrt{5}$，则下列结论中正确的是(　　).

(A) $\{a\}\subsetneqq M$　　(B) $a\subsetneqq M$　　(C) $\{a\}\in M$　　(D) $a\notin M$

解析　因为 $\sqrt{5}<6$，则 $\sqrt{5}\in M$，$\{a\}\subsetneqq M$，所以，答案为 A.

1.1.4 ★ 数 0 与空集 $\varnothing$ 之间的关系是(　　).

(A) $0\in\varnothing$　　(B) $0\notin\varnothing$　　(C) $0=\varnothing$　　(D) $0\subsetneqq\varnothing$

解析　空集中没有任何元素，所以，$0\notin\varnothing$，答案为 B.

1.1.5 ★ 已知集合 $A=\{0, 1\}$，$B=\{y \mid y^2=1-x^2, x\in A\}$，则 A 与 B 的关系是(　　).

(A) $A=B$　　(B) $A\subsetneqq B$　　(C) $A\in B$　　(D) $A\supsetneqq B$

解析　由已知得集合 $B=\{-1, 0, 1\}$，所以，$A\subsetneqq B$，答案为 B.

1.1.6 ★ 设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P, b\in Q\}$，若 $P=\{0, 2, 5\}$，$Q=\{1, 2, 6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

解析　由集合 $P+Q$ 的定义可得 $P+Q=\{1, 2, 6, 3, 4, 8, 7, 11\}$，其中有 8 个元素，答案为 B.

1.1.7 ★ 用适当的方式写出下列集合：

(1) 组成中国国旗的颜色名称的集合________；

(2) 不大于 6 的非负整数所组成的集合________;

(3) 所有正奇数组成的集合________;

(4) 方程 $x^3+6=0$ 的实数解构成的集合________;

(5) 不等式 $x^2-5x+4<0$ 的解集________;

(6) 直角坐标平面中,第一象限内的所有点组成的集合________;

(7) 直角坐标平面中,直线 $y=2x-1$ 上的所有点组成的集合________.

解 (1) 组成中国国旗的颜色名称的集合是{红,黄}.

(2) 不大于 6 的非负整数所组成的集合是$\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

(3) 所有正奇数组成的集合是$\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{N}\}$.

(4) 方程 $x^3+6=0$ 的实数解构成的集合是$\{x \mid x^3+6=0, x\in\mathbf{R}\}$.

(5) 不等式 $x^2-5x+4<0$ 的解集$\{x \mid x^2-5x+4<0\}$或写成$\{x \mid 1<x<4\}$.

(6) 直角坐标平面中,第一象限内的所有点组成的集合是$\{(x,y) \mid x>0$ 且 $y>0\}$.

(7) 直角坐标平面中,直线 $y=2x-1$ 上的所有点组成的集合是$\{(x,y) \mid y=2x-1\}$.

1.1.8 ★ 已知集合 $A=\{1,3,x\}$,集合 $B=\{1,x^2\}$,若有 $B\subsetneqq A$ 且 $x\notin B$,则 $A=$________.

解析 由 $x^2\in A$ 及 $x\notin B$ 得 $x^2=3$,解得 $x=\pm\sqrt{3}$,经检验此 x 的值符合集合中元素的互异性,所以,集合 $A=\{1,3,\sqrt{3}\}$ 或$\{1,3,-\sqrt{3}\}$.

1.1.9 ★★ 设含有 10 个元素的集合的全部子集的个数为 s,其中由 3 个元素组成的子集的个数为 t,则 $t:s=$________.

解析 含有 n 个元素的集合的所有子集的个数为 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$,由其中 k 个元素组成的子集数的个数为 C_n^k. 于是,$s=2^{10}$,$t=C_{10}^3$,所以,$t:s=15:128$.

1.1.10 ★★ 已知集合 $A=\{x \mid 3-x\geqslant\sqrt{x-1}\}$,$B=\{x \mid x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$,其中 $a\geqslant 1$.

(1) 若 $A=B$,求 a 的值;(2) 若 $A\subsetneqq B$,求 a 的值.

解析 由不等式 $3-x\geqslant\sqrt{x-1}$ 得$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\\ (3-x)^2\geqslant(x-1),\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 2$.

不等式 $x^2-(a+1)x+a\leqslant 0$ 即为$(x-a)(x-1)\leqslant 0$,由 $a\geqslant 1$ 得 $B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant a\}$.

(1) 当 $A=B$ 时,应有 $a=2$;

(2) 当 $A\subsetneqq B$ 时,应有 $a>2$.

1.1.11 ★★ 同时满足$\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,且 A 中所有元素之和为奇数的

集合 A 的个数是(　　).

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

解析　若 A 为二元集，则 A 可为 $\{1,2\}$、$\{1,4\}$；若 A 为三元集，则 A 可为 $\{1,2,4\}$、$\{1,3,5\}$；若 A 为四元集，则 A 可为 $\{1,2,3,5\}$、$\{1,3,4,5\}$；若 A 为五元集，则 A 可为 $\{1,2,3,4,5\}$，所以，共有 7 个符合条件的集合，答案为 C.

1.1.12 ☆☆ 写出集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=2$ 且 $x+y=0\}$ 的所有子集：________.

解析　集合 $A=\{(1,-1),(-1,1)\}$，所以，A 的所有子集是 $\varnothing$，$\{(1,-1)\}$，$\{(-1,1)\}$，$\{(1,-1),(-1,1)\}$.

1.1.13 ☆☆ 用适当的方式写出下列集合并化简：

(1) 方程 $x^2+2=0$ 的全体实数解组成的集合：________；

(2) 函数 $y=3x+2$，$1\leqslant x\leqslant 3$ 的所有因变量组成的集合：________；

(3) 函数 $y=-x^2+4x+3$，$x\in\mathbf{R}$ 的所有因变量组成的集合：________.

解析　(1) 方程 $x^2+2=0$ 的全体实数解组成的集合是 $\{x\mid x^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$；

(2) 函数 $y=3x+2$，$1\leqslant x\leqslant 3$ 的所有因变量组成的集合是 $\{y\mid y=3x+2,1\leqslant x\leqslant 3\}=\{y\mid 5\leqslant y\leqslant 11\}$；

(3) 函数 $y=-x^2+4x+3$，$x\in\mathbf{R}$ 的所有因变量组成的集合是 $\{y\mid y=-x^2+4x+3,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\leqslant 7\}$.

1.1.14 ☆☆ 设集合 $A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且 $A=B$，则实数 $a=$________；$b=$________.

解析　由 $A=B$ 得 $a^2\in A$ 且 $ab\in A$. 若 $\begin{cases}a^2=1,\\ab=b,\end{cases}$ 解得 $a=\pm 1$，但 $a=1$ 时与集合中的元素互异性矛盾，所以，$a=-1$，$b=0$. 经检验，此时 $A=B$. 若 $\begin{cases}a^2=b,\\ab=1,\end{cases}$ 解得 $a=1$，同样有矛盾. 所以，$a=-1$，$b=0$.

1.1.15 ☆☆ 设集合 $P=\{x\mid 2x^2-5x-3=0\}$，$Q=\{x\mid m^2x=1\}$，若 $Q\subsetneqq P$，则复数 m 可取的值是________.

解析　集合 $P=\left\{-\dfrac{1}{2},3\right\}$. 若 $m=0$，则 $Q=\varnothing$，此时 $Q\subsetneqq P$；若 $m\neq 0$，则 $Q=\left\{x\mid x=\dfrac{1}{m^2}\right\}$，于是 $\dfrac{1}{m^2}=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{m^2}=3$，所以，m 的值是 0 或 $\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ 或 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1.1.16 ☆☆ 关于 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 的解集是 A，关于 x 的不等式 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ (其中 $a\in\mathbf{R}$) 的解集是 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

解析 不等式$\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \dfrac{(a-1)^2}{2}$的解集$A=[2a,a^2+1]$，

不等式$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$即为$(x-2)(x-3a-1)\leqslant 0$，

若$a\geqslant \dfrac{1}{3}$，则$B=[2,3a+1]$；若$a<\dfrac{1}{3}$，则$B=[3a+1,2]$.

由$A\subseteq B$得$\begin{cases} a\geqslant \dfrac{1}{3}, \\ 2\leqslant 2a, \\ a^2+1\leqslant 3a+1 \end{cases}$ 或$\begin{cases} a<\dfrac{1}{3}, \\ 3a+1\leqslant 2a, \\ a^2+1\leqslant 2, \end{cases}$解得$1\leqslant a\leqslant 3$或$a=-1$，

所以，a的取值范围是$a=-1$或$1\leqslant a\leqslant 3$.

1.1.17 ☆☆ 已知集合$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x \mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x \mid x^2-bx+2=0, x\in \mathbf{R}\}$，若$B\subseteq A$，$C\subseteq A$，求实数$a$，$b$应满足的条件.

解析 集合$A=\{1,2\}$，而$x^2-ax+(a-1)=0$即为$(x-1)(x-a+1)=0$，则$B=\{1,a-1\}$，由$B\subseteq A$知$a-1=2$，即$a=3$. 对于集合C，由$C\subseteq A$知，若$C=\varnothing$，则$\Delta=(-b)^2-8<0$，解得$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$；若C为单元集，则$\Delta=(-b)^2-8=0$，此时$C=\{\sqrt{2}\}$或$C=\{-\sqrt{2}\}$，与$C\subseteq A$矛盾；若$C=\{1,2\}$，即C中方程两根为1和2，则$b=3$. 所以，a，b应满足的条件是$a=3$而$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$或$b=3$.

1.1.18 ☆☆ 已知集合$A=\{(x, y) \mid y=-x^2+mx-1\}$，$B=\{(x, y) \mid x+y=3, 0\leqslant x\leqslant 3\}$，若有且仅有一个点同时属于集合$A$和$B$，求实数$m$的取值范围.

解析 由已知得抛物线与线段有且仅有一个交点. 由$\begin{cases} y=-x^2+mx-1, \\ x+y=3, \end{cases}$得$x^2-(1+m)x+4=0$，该方程在区间$[0, 3]$上只有一个解.

若$\Delta=(m+1)^2-16=0$，则$m=3$或$m=-5$，如果$m=3$，解得$x=2$；如果$m=-5$，解得$x=-2\notin[0, 3]$，于是$m=-5$舍去.

若$\Delta>0$，则记$f(x)=x^2-(1+m)x+4$，此时，只需$f(3)<0$，即$9-3(m+1)+4<0$，解得$m>\dfrac{10}{3}$.

所以，m的取值范围是$m>\dfrac{10}{3}$或$m=3$.

1.1.19 ☆☆☆ 已知集合$A=\{x \mid x=12a+8b, a,b\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{y \mid y=20c+16d, c,d\in \mathbf{Z}\}$. 判断集合$A$与集合$B$之间存在什么关系，并说明理由.

分析 要判断集合A与集合B的关系，可考虑集合A中的元素是否属于B，集合B中的元素是否属于A.

解 若$y\in B$，即$y=20c+16d=12c+8(c+2d)$，因为$c,d\in \mathbf{Z}$，则有$c+$

$2d\in\mathbf{Z}$,得 $y\in A$,于是 $B\subseteq A$;若 $x\in A$,则 $x=12a+8b=60a-48a+40b-32b=20(3a+2b)+16(-3a-2b)$,因为 $a,b\in\mathbf{Z}$,则有 $3a+2b,-3a-2b\in\mathbf{Z}$,于是 $A\subseteq B$.所以,$A=B$.

1.1.20 ☆☆ 若 $f(x)=x^2+ax+b,a,b\in\mathbf{R},A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\},B=\{x\mid x=f[f(x)],x\in\mathbf{C}\}$.

(1) 写出集合 A 与 B 之间的关系,并证明;(2) 当 $A=\{-1,3\}$时,用列举法表示集合 B.

分析 用一个特殊的二次函数 $f(x)=x^2$ 可得 $A=\{x\mid x=x^2,x\in\mathbf{R}\},B=\{x\mid x=x^4,x\in\mathbf{C}\}$,此时 $A=\{0,1\},B=\{0,1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\}$,由此猜想 $A\subseteq B$.

解 (1) 任取 $x\in A$,则 $f(x)=x$,于是,$f[f(x)]=f(x)=x$,即有 $x\in B$,所以有 $A\subseteq B$,但由于 $x=f[f(x)]$ 必为四次方程,在复数集 $\mathbf{C}$ 上有 4 个根,所以 $A\subsetneq B$.

(2) 当$A=\{-1,3\}$时,即方程 $x^2+ax+b=x$ 的两根为 -1、3,于是 $-1+3=-(a-1),(-1)\times 3=b$,所以 $a=-1,b=-3$,即 $f(x)=x^2-x-3$,此时,集合 B 中的方程为 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$,即 $(x^2-x-3)^2-x^2=0,(x^2-3)(x^2-2x-3)=0$,所以,$B=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

1.1.21 ☆☆ 设集合 $A=\{x\mid x=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 对于 A 中任意两个元素 x_1、x_2,x_1+x_2 与 x_1x_2 是否必为 A 中的元素?证明你的结论;

(2) 对于 A 中的一个非零元素 x,试给出一个 a,b 满足的条件,使得该条件是 $\frac{1}{x}\in A$ 的充分条件;

(3) 对于给定的整数 b,求满足 $0<a+\sqrt{2}b<1$ 的 A 中元素的个数.

分析 由于集合 A 中的数是一种具有特定形式的数,因此,可根据集合中元素的形式特征来判断元素与集合间的关系.

解 (1) 设 $x_1=a+\sqrt{2}b,x_2=c+\sqrt{2}d\ (a,b,c,d\in\mathbf{Z})$,则 $x_1+x_2=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$,由于 $a+c,b+d\in\mathbf{Z}$,所以 $x_1+x_2\in A$.而 $x_1x_2=(a+\sqrt{2}b)(c+\sqrt{2}d)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$,同样 $ac+2bd,ad+bc\in\mathbf{Z}$,所以 $x_1x_2\in\mathbf{Z}$.

(2) 设 $x=a+\sqrt{2}b$,则 $\frac{1}{x}=\frac{1}{a+\sqrt{2}b}=\frac{a-\sqrt{2}b}{a^2-2b^2}$,若 $a^2-2b^2=1$ 或 $a^2-2b^2=-1$,则必有 $\frac{1}{x}\in A$.

(3) 若 $b=0$,则不存在满足 $0<a+\sqrt{2}b<1$ 的元素;若 $b\neq 0$,则 $-\sqrt{2}b<a<1-\sqrt{2}b$,此时,$\sqrt{2}b$ 一定不是整数,则必有一个整数 a 满足该不等式,所以,此时满足

$0<a+\sqrt{2}b<1$ 的元素有1个.

1.1.22 ☆☆ 已知 $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2+4x+4y+7=0, x, y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x, y) \mid xy=-10, x, y\in\mathbf{R}\}$.

(1) 对于直线 m 和直线外的一点 P，用"m 上的点与点 P 距离的最小值"定义点 P 到直线 m 的距离与原有的点线距离概念是等价的. 试以类似的方式给出一个点集 A 与 B 的"距离"的定义；

(2) 依照(1)中的定义求出 A 与 B 的"距离".

分析 问题(1)中给出了点线距离的等价定义，其核心是两个点集中两点间距离最小，而集合 A，B 是直角坐标平面上的两个点集，因此，可以此视角给出集合 A，B 间"距离"的定义.

解 (1) 定义：在点集 A，B 中分别任取一点，所取两点间的距离若有最小值，则此最小值称为点集 A 与 B 的"距离".

(2) 集合 A 中的点构成一个圆，其方程是 $(x+2)^2+(y+2)^2=1$，圆心 $C(-2, -2)$，半径为1，设 $P(x, y)$ 为曲线 $xy=-10$ 上任意一点，则 $|PC|^2=(x+2)^2+(y+2)^2=x^2+y^2+4(x+y)+8=(x+y)^2-2xy+4(x+y)+8=(x+y)^2+4(x+y)+28=(x+y+2)^2+24$，

当且仅当 $\begin{cases}x+y+2=0,\\ xy=-10,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-1+\sqrt{11},\\ y=-1-\sqrt{11},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1-\sqrt{11},\\ y=-1+\sqrt{11},\end{cases}$ 时，

$|PC|^2_{最小值}=24$，$|PC|_{最小值}=2\sqrt{6}$，所以，A 与 B 的"距离"为 $2\sqrt{6}-1$.

二、集合的运算

1.1.23 ★ 已知全集 $I=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$，集合 $A=\{a_1, a_3, a_4, a_5\}$，$B=\{a_1, a_4\}$，则 $A\cap \complement_I B=(\quad)$.

(A) $\{a_1, a_4\}$　　(B) $\{a_2, a_6\}$

(C) $\{a_3, a_5\}$　　(D) $\{a_2, a_3, a_5, a_6\}$

解析 $\complement_I B=\{a_2, a_3, a_5, a_6\}$，所以，$A\cap\complement_I B=\{a_3, a_5\}$，答案为C.

1.1.24 ★ 若集合 $M=\{x \mid |x|\leqslant 2\}$，$N=\{x \mid x^2-3x=0\}$，则 $M\cap N=(\quad)$.

(A) $\{3\}$　　(B) $\{0\}$　　(C) $\{0,2\}$　　(D) $\{0,3\}$

解析 $M=[-2,2]$，$N=\{0,3\}$，所以 $M\cap N=\{0\}$，答案为B.

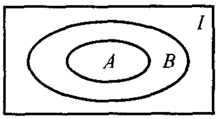
1.1.25 ★ 设 A，B，I 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是(　　).

(A) $(\complement_I A)\cup B=I$

(B) $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

(C) $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

(D) $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=(\complement_I B)$



题 1.1.25

解析　集合 A,B,I 的关系如图所示，可知 $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\complement_I A\neq I$，所以，答案为 B.

1.1.26 ★ 设全集 $I=\{2,3,5\}$，$A=\{|a-5|,2\}$，$\complement_I A=\{5\}$，则 a 的值为(　).

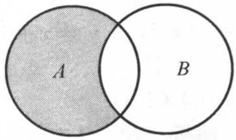
(A) 2　　(B) 8　　(C) 2 或 8　　(D) -2 或 8

解析　由 $A\cup\complement_I A=I$ 得 $|a-5|=3$，所以 $a=2$ 或 8，答案为 C.

1.1.27 ★ 设 A、B 是两个非空集合，定义 A 与 B 的"差集"为 $A-B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\notin B\}$，则 $A-(A-B)=$(　).

(A) B　　(B) $A\cap B$

(C) $A\cup B$　　(D) A



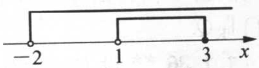
题 1.1.27

解析　由"差集"的定义可知集合 $A-B$ 如图中阴影部分所示，所以，$A-(A-B)=A\cap B$，答案为 B.

1.1.28 ★ 已知 $A=\{x\mid x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，$C=\{x\mid x>5\}$，则 $A\cap B=$________；$A\cup C=$________；$A\cap B\cap C=$________.

解　由已知得 $A\cap B=\{x\mid x<2\}$，$A\cup C=\mathbf{R}$，$A\cap B\cap C=\varnothing$.

1.1.29 ★ 若集合 $A=\{x\mid -2<x<1 \text{ 或 } x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 满足 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，则 $a=$________；$b=$________.



题 1.1.29

解析　在数轴上画出集合 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 可得 $a=1$，$b=3$.

1.1.30 ★ 全集 U 的子集 A、B、C 的关系如图所示：其中三个圆分别表示集合 A、B、C，试用集合 A、B、C 的运算结果表述图中的阴影所代表的集合：________.

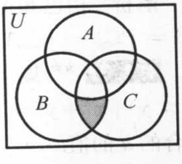


图 1.1.30

解　图中的阴影部分表示集合 $\complement_U A\cap B\cap C$.

1.1.31 ★ 已知集合 $M=\{2,3,m^2+4m+2\}$，$P=\{0,7,m^2+4m-2,2-m\}$ 满足 $M\cap P=\{3,7\}$，则实数 m 的值是________.

解析　由已知得 $7\in M$，则 $m^2+4m+2=7$，解得 $m=1$ 或 $m=-5$. 若 $m=1$，则 $m^2+4m-2=3$，$2-m=1$. 若 $m=-5$，$2-m=7$，与集合中元素的互异性矛盾，所以，m 的值是 1.

1.1.32 ★ 若 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}\leqslant 1\right\}$. 分别求使得 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\subsetneqq B$ 成立的实数 a 的取值范围.

解析　集合 $A=(-1,3)$，集合 $B=[a,+\infty)$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a\geqslant 3$；若 $A\subsetneqq B$，则 $a\leqslant -1$.

1.1.33 ★★ 设全集为 $\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $M=\{x \mid f(x)\neq 0\}$, $N=\{x \mid g(x)\neq 0\}$,则集合 $P=\{x \mid f(x)g(x)=0\}$ 等于(　　).

(A) $\complement_{\mathbf{R}}M\cap\complement_{\mathbf{R}}N$　　(B) $\complement_{\mathbf{R}}M\cup N$　　(C) $M\cup\complement_{\mathbf{R}}N$　　(D) $\complement_{\mathbf{R}}M\cup\complement_{\mathbf{R}}N$

解析　集合 $P=\{x \mid f(x)g(x)=0\}$ 即为方程 $f(x)g(x)=0$ 的解集,则有 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$,所以,$P=\complement_{\mathbf{R}}M\cup\complement_{\mathbf{R}}N$,答案为 D.

1.1.34 ★★ 设全集 $I=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x,y) \mid y\neq x+1\}$,那么$\complement_I(M\cup N)$(　　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$　　(D) $\{(x,y) \mid y=x+1\}$

解析　集合 I 表示平面上所有的点,集合 M 表示直线 $y=x+1$ 上除 $(2,3)$ 外的所有点,集合 N 表示不在直线 $y=x+1$ 上的所有点,所以 $M\cup N$ 表示平面上除 $(2,3)$ 外的所有点,所以,$\complement_I(M\cup N)$ 是集合 $\{(2,3)\}$,答案为 B.

1.1.35 ★★ 若全集 $I=\mathbf{R}$, $f(x)$、$g(x)$ 都是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数,$P=\{x \mid f(x)<0\}$, $Q=\{x \mid g(x)\geqslant 0\}$,则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集用 P,Q 表示为________.

解析　由已知可得不等式 $g(x)<0$ 的解集是$\complement_{\mathbf{R}}Q$,所以,不等式组的解集是 $P\cap\complement_{\mathbf{R}}Q$.

1.1.36 ★★ 设 P 表示$\triangle ABC$ 所在平面上的点,则集合$\{P \mid PA=PB\}\cap\{P \mid PB=PC\}=$________.

解析　由已知得点 P 到$\triangle ABC$ 三顶点等距,所以,$\{P \mid PA=PB\}\cap\{P \mid PB=PC\}=\{\triangle ABC$ 的外心$\}$.

1.1.37 ★★ 集合 $A=\{(x,y) \mid ax+y=1\}$, $B=\{(x,y) \mid x+ay=1\}$, $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$,分别求使得集合$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素和三个元素的集合的 a 的值.

解析　集合 A、B 分别表示过定点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 的两条直线,集合 C 表示单位圆,且 $(0,1)$, $(1,0)\in C$,若 $(A\cup B)\cap C$ 含有两个元素,则两直线重合或同时与圆相切,可得 $a=1$ 或 $a=0$. 若 $(A\cup B)\cap C$ 含有三个元素,即表明两条直线与圆有且仅有三个公共点,由于两直线或同时与圆相切,或同时与圆不相切,则必须有上述两条直线的交点在圆上,两直线的交点是 $\left(\frac{1}{1+a},\frac{1}{1+a}\right)$,则 $\left(\frac{1}{1+a}\right)^2+\left(\frac{1}{1+a}\right)^2=1$,所以,$a=-1\pm\sqrt{2}$.

1.1.38 ★★ 设 $M=\{x \mid x=n, n\in\mathbf{Z}\}$, $N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}, n\in\mathbf{Z}\right\}$, $P=\left\{x\,\middle|\,x=n+\frac{1}{2}, n\in\mathbf{Z}\right\}$,则下列各式正确的是(　　).