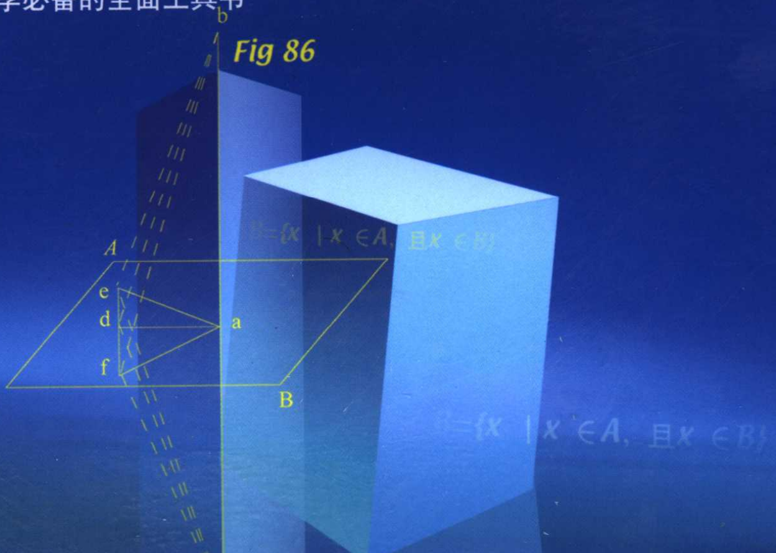
BSK高考命题研究组

超级数学专题题典

函数

- 紧扣大纲 关注高考
- 学习数学必备的全面工具书



世界图书出版公司

封面设计：张艳美 杨恩国

Base · System · Key
BSK

超级数学专题题典

01 函数
02 不等式
03 数列
04 简单几何体
05 直线和圆的方程
06 圆锥曲线
07 直线和平面
08 三角函数
09 排列组合与概率
10 向量
11 复数
12 导数与极限

ISBN 978-7-5062-5580-6

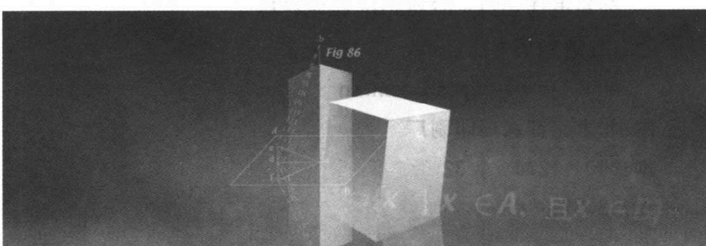
9 787506 255806 >

WS/5580 定价：14.00元

BSK 高考命题研究组

超级数学专题题典

函数



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

第一篇　知识篇

本专题知识结构图

<table>
<tr><td rowspan="14">函数</td><td rowspan="3">集合与简易逻辑</td><td>集合</td></tr>
<tr><td>集合间的关系与运算</td></tr>
<tr><td>简易逻辑</td></tr>
<tr><td rowspan="3">映射与函数</td><td>映射与函数</td></tr>
<tr><td>函数的三要素</td></tr>
<tr><td>函数的图象</td></tr>
<tr><td rowspan="3">函数的性质与反函数</td><td>单调函数与函数的单调性</td></tr>
<tr><td>函数的奇偶性</td></tr>
<tr><td>反函数及其图象</td></tr>
<tr><td rowspan="4">初等函数</td><td>正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数</td></tr>
<tr><td>幂函数</td></tr>
<tr><td>指数与指数函数</td></tr>
<tr><td>对数与对数函数</td></tr>
<tr><td>函数的应用</td><td>函数的应用</td></tr>
</table>

函数是数学问题的重要内容，它是几何问题、应用问题、代数问题的结合点．函数可以将代数问题转化为几何向量，还可将各个变量之间的关系用在坐标轴上，把“数”与“形”联系起来，也可将应用问题转化为代数或几何问题，从而顺利成为连结几何、代数与应用问题的纽带．

本书从集合与简易逻辑讲起，讲到了函数、映射，函数的单调性、奇偶性，函数的图象，以及正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、对数函数、指数函数、幂函数等等，最后是函数的极限与连续性．

原书缺页

原书缺页

解答 (1) 大于 0 的负数是不存在的，故所有大于 0 的负数所构成的集合只可能为空集；

(2) 不等式 $2x-1<0$ 的解为 $x<\frac{1}{2}$，故其解集表示为 $\{x \mid x<\frac{1}{2}\}$；

(3) 所有能被 2 整除的数 $\{n \mid n=2k, k\in \mathbf{Z}\}$；

(4) 所有非负整数 $\{n \mid n\geqslant 0, n\in \mathbf{Z}\}$.

点评 本题考查集合的基本概念、表示方法.

例 2 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1) $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{Q}$，π ________ $\mathbf{Q}$；

(2) 0 ________ $\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{N}^*$；

(3) $2+\sqrt{3}i$ ________ $\mathbf{R}$，$2+\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{R}$；

(4) $3\sqrt{2}$ ________ $\{x \mid x<\sqrt{19}\}$；

(5) $(1,0)$ ________ $\{y \mid y^2-x^2=1\}$.

分析 本题比较简单，只要分清楚集合中的元素是什么即可.

解答 (1) $\sqrt{2}\notin \mathbf{Q}$，$\pi\notin \mathbf{Q}$；

(2) $0\notin \mathbf{N}^*$，$\frac{1}{2}\notin \mathbf{N}^*$；

(3) $2+\sqrt{3}i\notin \mathbf{R}$，$2+\sqrt{3}\in \mathbf{R}$；

(4) $3\sqrt{2}=\sqrt{18}<\sqrt{19}$，$3\sqrt{2}\in\{x \mid x<\sqrt{19}\}$；

(5) $(1,0)\notin (y \mid y^2-x^2=1)$.

因为 $(1,0)$ 表示一个点，而 $\{y \mid y^2-x^2=1\}$ 表示的是一个数.

若改为 $(1,0)\in\{(y,x) \mid y^2-x^2=1\}$ 才可.

点评 本题考查集合与元素的关系.

例 3 设 $A=\{x \mid x=a^2+b^2, a,b\in \mathbf{Z}\}$，$x_1, x_2\in A$，求证：$x_1\cdot x_2\in A$.

分析 集合 A 是一切可表示为两整数平方和的整数全体，故只要证明 $x_1\cdot x_2$ 可以表示成两个整数的平方和即可.

证明 设 $x_1=a^2+b^2$，$x_2=c^2+d^2$ $(a,b,c,d\in \mathbf{Z})$，则

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2 \\ &= (a^2c^2+b^2d^2+2acbd)+(b^2c^2+a^2d^2-2bad) \\ &= (ac+bd)^2+(bc-ad)^2 \end{aligned}$$

又 $(a,b,c,d\in \mathbf{Z})$，故 $ac+bc$，$bc-ad\in \mathbf{Z}$，即 $x_1\cdot x_2\in A$.

点评 本题考查集合与元素的关系.

例 4 以某些整数为元素的集合 P 具有以下性质：

①P 中的元素有正数，也有负数；②P 中的元素有奇数也有偶数；

③ $-1\notin P$；④ 若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$；试判断数 0，2 与集合 P 的关系.

分析 按照元素的特点分别检验 0，2 是否属于该集合.

解答 由 ① 可知，若 $x\in P$，则 $kx\in P(K\in \mathbf{N})$，由 ① 可设 $x,y\in P$，且 $x>0$，$y>0$，则 $xy\in P$，$-yx\in P(m,n\in \mathbf{N})$，故 $0\in P$，由 ② 可知 P 中必有负奇数，

不妨设 $1-2n \in P(n \in \mathbf{N})$,假设 $2 \in P$,则 $2k \in P(k \in \mathbf{N})$,

所以 $2k+1-2n \in P$,即 $2k-2(n-1)+1-2 \in P$,

当 $k=n-1$ 时(当 $n=1$ 时,$k=0$,但 $0 \in P$),$-1 \in P$,矛盾.故 $2 \notin P$.

综上,$0 \in P$,$2 \notin P$.

点评 考查集合及其元素的关系.

例5 方程 $ax+b=0$,当 a,b 满足什么条件时,解集是有限集;当 a,b 满足什么条件时;解集时无限集,当满足什么条件时,解集是空集.

分析 根据方程的解的性质来解题.

解答 方程 $ax+b=0$,

当 $a \neq 0$ 时,方程有唯一解,此时解集为有限集;

当 $a=0$ 且 $b=0$ 时,方程有无穷多解,此时解集为无限集;

当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时,方程无解,此时解集为空集.

点评 本题蕴含了分类讨论的思想,同学们要注意掌握.

例6 已知集合 $A=\{x \mid ax^2+bx+1=0, a,b \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$,

(1) 若 A 中只有一个元素,求 a 与 b 的关系;

(2) 若 A 中至少有一个元素,求 a 与 b 的关系;

(3) 若 A 为空集,求 a 与 b 的关系.

分析 集合元素的情况对应着方程解的情况.

解答 (1)A 中只有一个元素,即一元二次方程只有一个解或有两个相等的解.

当 $a=0$ 时,方程退化为一次方程,此时要求 $b \neq 0$;

当 $a \neq 0$ 时,需 $\Delta=b^2-4a=0$,$a=\dfrac{b^2}{4}$.

(2)A 中至少有一个元素,即在(1)的基础上加上方程有两个不同的解的情况,

当 $a=0$ 时,方程退化为一次方程,此时要求 $b \neq 0$;

当 $a \neq 0$ 时,需 $\Delta=b^2-4a \geqslant 0$,$a \leqslant \dfrac{b^2}{4}$.

(3)A 为空集,当 $a=0$,$b=0$ 时,方程无解;

当 $a \neq 0$ 时,需 $\Delta=b^2-4a<0$,$a>\dfrac{b^2}{4}$.

点评 本题考查集合和元素的相关知识,关键在于将集合问题转化为方程的解的问题.

基础练习题

1. 已知集合 $A=\{x \mid x \leqslant 3\sqrt{2}\}$,$m=3\sqrt{2}$,则下列关系正确的是________.

A. $\{m\} \notin A$　　B. $m \notin A$　　C. $\{m\} \in A$　　D. $m \in A$

2. 下列表示同一个集合的是________.

A. $A=\{(3,2)\}$,$B=\{(2,3)\}$

B. $A=\{2,3\}$,$B=\{3,2\}$

C. $A=\{(x,y)\mid x-y=1\}, B=\{x\mid x-y=1\}$

D. $A=\{(3,2)\}, B=\{3,2\}$

3. 设集合 $M=\{$直角三角形$\}$,$N=\{$小于 6 的整数$\}$,$P=\{$比 -1 大 5 的数$\}$,$Q=\{$大于 0 且小于 1 的有理数$\}$,其中无限集是________.

A. M,N,P　　B. M,N,Q　　C. M,P,Q　　D. N,P,Q

4. 集合 $A=\{(x,y)\mid xy\leqslant 0, x,y\in\mathbf{R}\}$ 表示坐标平面上________.

A. 第二象限的点组成的集合

B. 第四象限的点组成的集合

C. 第二以及第四象限的点组成的集合

D. 第二、四象限以及 x 轴、y 轴上的点组成的集合

5. 用适当的符号填空:

(1) $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{Q}$;　　(2) $\sqrt{2}-3$ ________ $\mathbf{Q}$;

(3) $\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{N}$;　　(4) 0 ________ $\mathbf{N}^*$;

(5) -2 ________ $\mathbf{Z}$;　　(6) $2+\sqrt{5}$ ________ $\mathbf{R}$;

(7) $3+2i$ ________ $\overline{\mathbf{R}}$;　　(8) $\varnothing$ ________ $\{\varnothing\}$.

6. 设有命题 P:"若 $x\in A$,则 $5-x\in\mathbf{N}^*$",在由正整数组成的集合中:

(1) 满足命题 P 的一元集 A 有______个,是______;

(2) 满足命题 P 的二元集 A 有______个,是______;

(3) 满足命题 P 的集合 A 共有______个.

7. $\{x\mid x=\frac{m}{n}, m\in\mathbf{Z}, |m|<2, n\in\mathbf{N}^*, n\leqslant 3\}=$ __________.

8. 用列举法表示集合:

(1) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid (x-1)(x+2)(x^2-1)(x^3-8)=0\}$;

(2) $B=\{(x,y)\mid x+y=3, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$;

(3) $C=\{y\mid x+y=3, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$;

(4) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases} y=x, \\ y=-x \end{cases}\right\}$;

(5) $M=\left\{x\ \middle|\ \begin{cases} y=x, \\ y=-x \end{cases}\right\}$;

(6) $P=\{x\mid x(x-a)=0, a\in\mathbf{R}\}$.

9. 设 $a=\frac{y-1}{y}$ 且 $a\in\{x\mid 1<x<3\}$,求 y 的取值范围.

(参考答案见 P198)

高屋建瓴

1. 对集合概念的理解

集合的概念是一个重要的基本概念,对集合概念的理解既是重点也是难点,必须牢牢把握集合元素的性质,元素与集合的关系,并学会灵活运用.

例 7 如果已知集合 $M=\{y \mid y=x^2+1, x\in \mathbf{R}\}$,$N=\{y \mid y=x+1, x\in \mathbf{R}\}$,那么 $M\cap N=$ ________.

A. $(0,1),(1,2)$　　B. $\{(0,1),(1,2)\}$

C. $\{y \mid y=1$ 或 $y=2\}$　　D. $\{y \mid y\geqslant 1\}$

分析 集合 M,N 是用描述法表示的,元素是实数 y 而不是实数对 (x,y),因此 M,N 分别表示函数 $y=x^2+1(x\in \mathbf{R})$ 和 $y=x+1(x\in \mathbf{R})$ 的值域,求 $M\cap N$ 即求两函数值域的交集.

解答 由题意有 $M=\{y \mid y=x^2+1, x\in \mathbf{R}\}=\{y \mid y\geqslant 1\}$,

$N=\{y \mid y=x+1, x\in \mathbf{R}\}=\{y \mid y\in \mathbf{R}\}$,

$\therefore M\cap N=\{y \mid y\geqslant 1\}\cap\{y \mid y\in \mathbf{R}\}=\{y \mid y\geqslant 1\}$,$\therefore$ 应选 D.

点评 ① 本题求 $M\cap N$,经常发生解方程组 $\begin{cases} y=x^2+1, \\ y=x+1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 从而选 B 的错误,这是由于在集合概念的理解上,仅注意了集合元素的共同属性,而忽视了元素本身是什么.事实上 M,N 的元素是数而不是点,因此它们是数集而不是点集.

② 集合是由元素构成的,认识集合要从认识元素开始,要注意区分 $\{x \mid y=x^2+1\}$,$\{y \mid y=x^2+1\}$,$\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$,$(x\in \mathbf{R})$ 这三个集合是不同的.

例 8 给出下面各种关系:

①$0\not\subset\{0\}$　②$0\in\{0\}$　③$\varnothing\in\{\varnothing\}$　④$a\in\{a\}$

⑤$\varnothing=\{0\}$　⑥$\{0\}\in\varnothing$　⑦$\varnothing\in\{0\}$　⑧$\varnothing\subset\{0\}$

其中正确的是________.

A. ②③④⑧　B. ①②④⑤　C. ①②④⑥　D. ②③④⑦

分析 依次判断每个关系是否正确,可运用排除法筛选.

解答 ① 应为 $0\in\{0\}$;②③④ 正确,排除 B,再看 ⑥⑦⑧ 哪个正确,由于 $\varnothing$ 是 $\{0\}$ 的真子集,因此 ⑧ 正确.所以应选 A.

点评 (1)0 与 $\{0\}$ 只有一种关系:$0\in\{0\}$;a 与 $\{a\}$ 也只有一种关系:$a\in\{a\}$,$\varnothing$ 与 $\{0\}$ 也只有一种关系:$\varnothing\subset\{0\}$.

(2) 准确地理解,正确地运用集合概念是解好此题的前提.

2. 注意空集的特殊性和特殊作用.

空集是一个特殊的重要集合,它不含任何元素,并且是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.显然,空集与任何集合的交集为空集,与任何集合的并集仍等于这个集合.当题设中隐含有空集参与的集合关系时,其特殊性很容易被忽视,以而引发

解题失误.

3. 注意集合语言与其它数学语言互译的准确性

事实上，各种数学语言形态间的互译，可为我们在更广阔的思维领域里寻找问题的解决途径，因而这种互译是我们在解题过程中常常必须做的事情.

对于用集合语言叙述的问题，求解时往往需要转译成一般的代数语言或几何语言.

例9 已知集合 $B=\{x\mid \frac{x+a}{x^2-2}=1\}$ 有唯一元素，用列举法表示由 a 的值构成的集合 A.

分析 本题很容易出错，很多同学将题目转化为求方程 $x^2-x-a-2=0$ 有等根时 a 的取值集合，但这样就忽略了 $x^2-2\neq 0$，即 $|x|\neq\sqrt{2}$ 这一隐含条件.

解答 集合 A 表示方程 $\frac{x+a}{x^2-1}=1$， ①

即方程 $x^2-x-a-2=0$， ②

有等根时 a 的取值集合，而方程 ② 有等根的条件是 $\Delta=(-1)^2-4(-a-2)=0$，解得 $a=-\frac{9}{4}$，因此 $A=\{-\frac{9}{4}\}$. 以上解法对吗？不难看出，将 B 译为方程 ② 有等根时 a 的取值集合是不准确的. 它忽视了 $x^2-2\neq 0$，即 $|x|\neq\sqrt{2}$ 这一隐含条件.

可见，与方程 ① 等价的应是混合组：$\begin{cases}x^2-x-a-2=0,\\x^2-2\neq 0,\end{cases}$ 因此，在讨论方程 ② 有唯一实根时，须照顾到 ③，即 $|x|\neq\sqrt{2}$. 由于方程 ① 为分式方程，可能有增根，当条件 ② 的二实根中有一个是方程 ① 的增根 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$ 时，方程 ① 也只有一个实根，正确的解法是：

方程 ① 等价于混合组：$\begin{cases}x^2-x-a-2=0, & ②\\x^2-2\neq 0, & ③\end{cases}$

(1) 当 ② 有等根时，同上解得 $a=-\frac{9}{4}$，此时 $x=\frac{1}{2}$，适合 ③；

(2) 当 ② 有两个不等的实根时，由 $\Delta>0$ 可得 $a>-\frac{9}{4}$.

当 $x=-\sqrt{2}$ 为 ① 的增根时，由 ② 得 $a=\sqrt{2}$，

当 $x=\sqrt{2}$ 为 ① 的增根时，由 ② 得 $a=-\sqrt{2}$.

$\because \sqrt{2}>-\frac{9}{4}$，$\therefore$ 由(1)、(2) 得 $A=\{-\frac{9}{4},-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

点评 ① 集合语言转译成其它语言，转译得准确与否直接关系到解题的成功与否.

② 集合语言与其它语言转译过程中，根据问题的需要也可能转译成图形语言，利用数形结合解题. 根据解题需要，有时也可能将其它语言转译为集合语言.

例 10 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，
$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3(m^2+5),m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点集，问是否存在实数 a 和 b 使得(1)$A\cap B\neq\varnothing$，(2)$(a,b)\in C$ 同时成立？

分析 解决此题的关键是集合语言向非集合语言转化，将隐晦的数学含义显露出来.

解答 由 $A\cap B\neq\varnothing$,可得$\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15\end{cases}$成立,即 $na+b=2n^2+15$,　①

又$(a,b)\in C$,$\therefore a^2+b^2\leqslant 144$,　②

若满足 ① 和 ② 的 a,b 存在,则关于 a,b 的方程组$\begin{cases}na+b=3(n^2+5),\\ a^2+b^2\leqslant 144\end{cases}$有解,从而在直角坐标系 $aO'b$ 中,直线 $l: na+b-3(n^2+5)=0$ 与 $a^2+b^2\leqslant 144$ 表示的区域应有公共点.

于是圆心 $O'(0,0)$ 到直线 l 的距离不大于半径 12,即$\dfrac{3(n^2+5)}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12$,$\therefore (n^2-3)^2\leqslant 0$,

即 $n^2=3$ 而 $n\in\mathbf{Z}$,这是不可能的,故满足 ① 和 ② 的不存在.

点评 ① 进行各种语言形态间的互译,不仅有利于对数学知识的理解和运用,还可以有利于用数学知识解答问题.

② 本题是一个探索性问题,要注意积累探索性问题的解法经验.

③ 本题可在学完直线及圆的有关知识后回过头来再次仔细体会.

能力练习题

1. 集合 $M=\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\}$,$N=\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\}(k\in\mathbf{N})$,则________.

A. $M=N$　B. $M\supseteq N$　C. $M\subseteq N$　D. $M\cap N=\varnothing$

2. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,集合 $A=\{2,3,5,6\}$,$B=\{4,7\}$,那么集合 $C=\{1,9\}=$________.

A. $A\cup B$　B. $A\cap B$　C. $(C_IA)\cup(C_IB)$　D. $(C_IA)\cap(C_IB)$

3. 设 $A=\{(x,y)\mid x>0$,且 $y<0\}$,$B=\{(x,y)\mid x-y>0$,且 $xy<0\}$,则______.

A. $A\subseteq B$　B. $A\supseteq B$　C. $A=B$　D. $A\cap B=\varnothing$

4. 下列结论中不正确的是________.

A. 若 $a\in\mathbf{N}$,则 $-a\in\mathbf{N}$　B. 若 $a\in\mathbf{Z}$,则 $a^2\in\mathbf{Z}$

C. 若 $a\in\mathbf{Q}$,则 $|a|\in\mathbf{Q}$　D. 若 $a\in\mathbf{R}$,则$\sqrt[3]{a}\in\mathbf{R}$

5. 下列各题中的 M 与 P 表示同一集合的是______.

A. $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+0.01=0\}$,$P=\{x\mid x^2=0\}$

B. $M=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$P=\{(x,y)\mid x=y^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

C. $M=\{y\mid y=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$,$P=\{t\mid t=(y-1)^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

D. $M=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x\mid x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$

6. 已知集合 $A=\{y\mid y=|x-\dfrac{1}{3}|+\sqrt{x^2-x+\dfrac{1}{4}},x\in\mathbf{R}\}$,$y\in A$,则有______.

A. $y\in\mathbf{Q}$　B. $y\in\mathbf{Q}^-$　C. $y\in\mathbf{R}^+$　D. $y\in\mathbf{R}^-$

7. 集合$\{x\mid x=a-1,a\in\mathbf{Z},a\neq 1\}$,若 $x\in A$,则 ①$x\in\mathbf{N}^*$;②$x\in\mathbf{Z}$;③$x\in\mathbf{Q}$;④$x\in\mathbf{R}$,其中正确的有________.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

8. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$,

(1) 若 A 只有一个元素,试求 a 的值并求出这个元素;

(2) 若 A 是空集,求 a 的取值范围;

(3) 若 A 中至多有一个元素,求 a 的取值范围.

9. 设集合 A、B 分别是方程 $2x^2 + px + q = 0$ 与 $6x^2 + (2-p)x + 5 + q = 0$ 的解集,如果 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$,求 $A \cup B$.

(参考答案见 $P199$)

第二节　集合间的关系与运算

高考考点和趋势分析

集合间的运算是高考的必考内容,主要以考查基本的运算并以选择、填空的小综合形式出现,内容多为交、并、补的运算以及集合知识的应用.集合知识应用多为和其他知识的综合应用,题目一般给定一个固定集合和非固定的集合满足某种集合的关系,来明确其中的参数的值,如求方程组、不等式组或者是混合联立组的解集,以及设计、使用集合解决实际问题.

目标 1:理解子集、交集、并集和补集的概念和运算法则.

目标 2:能够运用集合语言和集合思想解决有关问题.

知识点讲解与应用

1. 集合与集合的关系(考频 38 次,其中,选择题 30 次,填空题 6 次,解答或证明题 2 次)

若 A 中元素都是 B 中元素,称 A 为 B 的子集,记做 $A \subseteq B$.

若 $A \subseteq B$,且 B 中至少有一个元素 $b \notin A$,则称 A 为 B 的真子集,记做 $A \subset B$.

若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则 $A = B$,即 A,B 两集合的元素完全一样.

集合与集合的关系,有如下性质:

①$A \subseteq B$,$\varnothing \subseteq A$,$\varnothing \subset B(B \neq \varnothing)$.

②$A \subseteq B$,$B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

③$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$;$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$;$\overline{A} \cap B = I \Leftrightarrow A \subseteq B$.

④ 若 A 中元素有 n 个,则 A 的子集共有 2^n 个,真子集有 $2^n - 1$ 个.

2. 集合间的运算(考频 20 次,其中,选择题 19 次,填空题 0 次,解答或证明题 1 次)

(1) 交集:$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$.

① 若集合 A 与 B 无公共元素,不能说 A 与 B 无交集,而是 $A \cap B = \varnothing$,

② 交集的一些性质：

$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B, A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap B=B\cap A.$

(2) 并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

并集的一些性质和结论：

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B, A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B, A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup B=B\cap A.$

若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$；

若 $A\cup B=A$ 且 $A\cup B=B$，则 $A=B$.

(3) 补集 $\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\neq A\}$.

补集的概念是相对全集而言的，所谓全集是指所有研究问题涉及到的相关集合的并集. 而补集 $\overline{A}$ 是由属于全集 I 但不属于集合 A 的元素构成的集合. 在进行补集运算时一定要搞清全集是什么，弄清全集的范围.

补集的相关性质及结论：$A\cup\overline{A}=I, A\cap\overline{A}=\varnothing, \overline{\overline{A}}=A, A\cap I=A, A\cup I=I.$

例 1　写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集.

分析　按照集合的子集的性质写出即可. 集合 A 中元素 n 个，所有子集的个数为 2^n 个，代入此题正好可以做一个检验子集数是否为 8 个.

解答　集合 $\{0,1,2\}$ 的子集：$\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$.

点评　考查集合及其子集的概念和性质.

例 2　若 $M=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=4p\pm1,p\in\mathbf{Z}\}$，则 M,N 之间的关系是什么？

分析　考查两个集合之间的关系，无非 $M\subseteq N$、$N\subseteq M$、$M=N$ 几种，只要考查一个集合中的元素是否属于另一个集合.

解答　由已知，M 为所有奇数的集合，当 $p\in\mathbf{Z}$ 时，$4p\pm1$ 也为奇数，故 $N\subseteq M$，

又考虑到当 k 偶数时，$2k-1=2(2p)-1=4p-1$；

当 k 奇数时，$2k+1=2(2p+1)+1=4p+3=4(p+1)-1$.

所以不论 k 为何整数，$2k-1\in\mathbf{N}$，$\therefore M\subseteq N$，因此 $M=N$.

点评　判断两集合的相等一定要满足：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 否则两集合就不是相等关系.

例 3　非空数集 $S\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$，那么符合条件"若 $a\in S$，则 $6-a\in S$"的集合 S 有多少个.

分析　$a\in S$，a 可取 1,2,3,4,5 五个数值，分别计算出相应的 $6-a$ 为 5,4,3,2,1，都符合 $6-a\in S$ 的条件，而当 a 取 6,7 时，$6-a\notin S$，则 S 可为集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 的任一子集，注意除去空集.

解答　符合条件的集合 S 有 31 个.

点评　本题考查元素是否属于集合这一知识点.

例 4　已知集合 $A=\{x\mid x^2+5x+6\leqslant0\}$，$B=\{x\mid 4m+1\leqslant x\leqslant 3m\}$ 若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

分析　$B\subseteq A$ 须进行分类讨论，对 $B\neq\varnothing$、$B=\varnothing$ 进行讨论.

解答　由得 $A=\{x\mid x^2+5x+6\leqslant0\}$ 得 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2\}$

对 $B=\{x\mid 4m+1\leqslant x\leqslant 3m\}$，$B\subseteq A$ 须进行分类讨论.

(1) 若$B \neq \varnothing$，则$4m+1 \leqslant 3m \Rightarrow m \leqslant -1$，由$B \subseteq A$得$\begin{cases} m \leqslant -1, \\ 4m+1 \geqslant -3, \\ 3m \leqslant -2, \end{cases}$解得$m=-1$；

(2) 若$B=\varnothing$，则$3m<4m+1 \Rightarrow m>-1$，此时仍有$B \subseteq A$.

综合(1)、(2)可得m的取值范围为$\{m \mid m \geqslant -1\}$.

点评 本题考查集合与集合之间的关系.

例5 已知全集I为整数集$\mathbf{Z}$，$M=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{Z}\}$，$S=\{x \mid x=3n, n \in \mathbf{Z}\}$，则$M \cap \overline{S}$ = ________.

A. $\{x \mid x=6n \pm 2, n \in \mathbf{Z}\}$　　B. $\{x \mid x=6n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{x \mid x=4n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$　　D. $\{x \mid x=3n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$

分析 S表示能被3整除的数，$\overline{S}$则表示不能被3整除的数，而$M \cap \overline{S}$表示能被2整除但不能被3整除的数，即不能被$2 \times 3=6$整除的偶数，因此只能从A、B两项中选择，因为$6n(n \in \mathbf{Z})$为偶数，所以排除B.

解答 选A

点评 本题考查集合的运算关系.

例6 集合$M=\{y \mid y=\sqrt{9-x^2}, |x| \leqslant 3\}$，$S=\{y \mid y=\sqrt{x(x-1)}, x>1\}$，求$M \cap S$.

分析 分别给出了M，S两个集合的表达形式，注意这里的元素是y，也就是说这两个集合分别是这两个函数的值域，然后再求交集.

解答 $\because M=\{y \mid y=\sqrt{9-x^2}, |x| \leqslant 3\}=\{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 3\}$，

$S=\{y \mid y=\sqrt{x(x-1)}, x>1\}=\{y \mid y>0\}$，

$\therefore M \cap S=\{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 3\} \cap \{y \mid y>0\}=\{y \mid 0<y \leqslant 3\}$.

点评 本题考查集合的运算关系.

例7 已知$A=\{x \mid x^2+(p+2)x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$，且$A \cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数$p$的取值范围是________.

A. $p \geqslant -2$　　B. $p \geqslant 0$　　C. $-4<p<0$　　D. $p>-4$

分析 集合A与正实数集交集为空，可知A是非正实数的子集，分类讨论.

解答 由已知$A=\{x \mid x^2+(p+2)x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$，$A \cap \mathbf{R}^+=\varnothing$有，

方程$x^2+(p+2)x+1=0$无实根或只有非正实根：

(1) $A=\varnothing$，即$\Delta=(p+2)^2-4<0$，解得$-4<p<0$；

(2) 方程$x^2+(p+2)x+1=0$只有非正实根，$\therefore \begin{cases} \Delta=(p+2)^2-4 \geqslant 0, \\ -(p+2) \leqslant 0. \end{cases}$

解得$p \geqslant 0$，综合(1)(2)得$p>-4$，选D.

点评 本题为集合与方程根的综合题，这种题目经常在高考中出现，同学需要熟练掌握，注意A为空集的情况. 同时请读者自己思考，为什么第(2)问方程只有非正根的时候只需要满足判别式和两根和为正这两个条件就行了？

例8 设集合$A=\{x \mid x^2-mx+m^2-19=0\}$，$B=\{x \mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$

$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 m 的值.

分析　先解出 B 和 C，由 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$ 可知 A 必然包含 B 和 C 的非共同元素，找到这个元素之后代入 A 集合的对应方程，解出 m 的值.

解答　先解方程 $\log_2(x^2-5x+8)=1$ 得 $x=2$ 或 $x=3$，于是 $B=\{2,3\}$，

再解方程 $x^2+2x-8=0$，得 $x=-4$ 或 $x=2$，即 $C=\{2,-4\}$

由 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\cap C=\varnothing$ 可知 $3\in A$，

将 3 代入方程 $x^2-mx+m^2-19=0$ 得，$3^2-3m+m^2-19=0$，

解得 $m=5$ 或 $m=-2$，经检验得 $m=-2$.

点评　本题和上一题类似，注意解题的最后需要检验，将解得的两个 m 的值代入方程，看方程的解构成的集合 A 与集合 B、C 的交集情况是否与题意相符.

例 9　若 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x \mid ax-2=0\}$ 且 $A\cup B=A$，求由实数 a 组成的集合 C.

分析　由题意 $A=\{1,2\}$，已知 $A\cup B=A$，则 B 有三种可能 $\{1\}$，$\{2\}$，$\varnothing$，分别讨论即可.

解答　由 $x^2-3x+2=0$ 可得 $x=1$ 或 $x=2$，于是 $A=\{1,2\}$，

已知 $A\cup B$，则 B 有三种可能 $\{1\}$，$\{2\}$，$\varnothing$，

当 $B=\{1\}$ 时，$a-2=0$，$a=2$，

当 $B=\{2\}$ 时，$2a-2=0$，$a=1$，

当 $B=\varnothing$ 时，方程 $ax-2=0$ 无解，此时 $a=0$，

故集合 C 为 $\{0,1,2\}$.

点评　本题考查集合与集合之间的关系.

例 10　$A=\{x \mid |2x-x^2|\leqslant x\}$，$B=\{x \mid \left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\}$，$C=\{x \mid ax^2+x+b<0\}$，

若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，且 $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求 a，b 的值.

分析　解绝对值不等式分别解出 A、B，然后可得出 $A\cup B=(0,3)$，由 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 和 $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$ 可得到 C 中方程的两个根为 0，3 且 $a>0$，代入可解出 a、b 值.

解答　先解不等式 $|2x-x^2|\leqslant x$，得 $A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3$ 或 $x=0\}$；

再解不等式 $\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}$，得 $0\leqslant x<1$，故 $B=\{x \mid 0\leqslant x<1\}$，

$\therefore A\cup B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$.

而 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，且 $(A\cup B)\cup C=R$，故 $C=\overline{A\cup B}=\{x \mid x<0$ 或 $x>3\}$，

由根与系数的关系：$ax^2+x+b=a(x-0)(x-3)<0$ 且 $a<0$ 有 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$.

点评　本题考查了绝对值不等式的解法和集合之间的关系，注意这里如果只有 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，那么得到的是不等条件，即 C 对应方程的两个根一个大于 3，一个小于 0，如果只有 $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，两根则必须满足 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 3$，两个条件合在一起表明这两个条件有交集，即方程两个根正好为 0 和 3.

基础练习题

1. 已知集合 $A=\{(x,y) \mid x+y=2\}$，$B=\{(x,y) \mid x-y=4\}$，那么 $A\cap B=$ ______.

A. $\{x=3, y=-1\}$　　B. $\{(3,-1)\}$

C. $\{|3,-1|\}$　　D. $\{(x,y)\mid(3,-1)\}$

2. 已知全集为 P，集合 $M, N\subseteq P$，若 $M\cap N=N$，则______.

A. $C_PM\supseteq C_PN$　　B. $M\subseteq C_PN$，

C. $C_PM\subseteq C_PN$　　D. $M\supseteq C_PN$

3. 已知 I 是全集，集合 A、B 满足 $A\subseteq B$，那么下列结论错误的是______.

A. $A\cap C_IB=\varnothing$　　B. $C_IA\cup B=I$

C. $C_IA\cap C_IB=\varnothing$　　D. $B\cap C_IA=C_BA$

4. 设 $a=\{(x,y)\mid x>0$，且 $y<0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y<0\}$，则______.

A. $A\subseteq B$　　B. $A\supseteq B$　　C. $a=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

5. U 为全集，若 $(C_UB)\subseteq A$，下列关系正确的是_______.

A. $B\subseteq C_UA$　　B. $A\cap B=\varnothing$

C. $(C_UA)\subseteq B$　　D. $(C_UA)\cap(C_UB)=U$

6. 已知 $M\cap\{-1,0,1\}=\{0,1\}$，$M\cup\{-2,0,2\}=\{-2,0,1,2\}$，则符合条件的 M 一共有______个.

7. 下列关系：(1)$a\in(A\cup B)\Rightarrow a\in A$；(2)$a\in(A\cap B)\Rightarrow a\in(A\cup B)$；(3)$a\subseteq B\Rightarrow a\cup B=B$；(4)$a\cup B=A\Rightarrow a\cap B=B$. 其中正确命题的个数为______个.

8. 全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$，$g(x)$ 都是二次函数，集合 $A=\{x\mid f(x)<0\}$，$B\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0,\\ g(c)<0\end{cases}$ 的解集用 P、Q 表示为______.

9. 设全集是 I，$A\subseteq B\subseteq I$，A、B 都是非空集合，写出一个结果为空集的集合运算表达式______.（只写出一个即可）

10. 已知 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值集合.

11. 设集合 $M=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$N=\{x\mid x^2+4x+p<0\}$，若 $N\subseteq M$，求实数 p 的取值范围.

（参考答案见 P200）

高屋建瓴

1. 数形结合解集合问题

集合问题大都比较抽象，解题时要尽可能借助文氏图，数轴或直角坐标系等工具将抽象问题直观化，形象化，明朗化，然后利用数形结合的思想方法使问题灵活直观地得到解决.

例 11 设全集 $U=\{x\mid 0<x<10, x\in\mathbf{N}^*\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，$A\cap\overline{B}=\{1,5,7\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{9\}$，求 A，B.

分析 本题用直接推理的方法求解不如先画出文氏图，用填图的方法来的简捷，由图 1-1-1 不难看出答案.