



# 数学符号 理解手册

Comprehensive Handbook of Mathematics Symbols

[日] 黑木哲德 著  
赵雪梅 译

学林出版社

听说在中国古代，人们曾经用 $+$ 和 $-$ 这两个符号来表示加和减。在现代人的眼中，这两个符号就像两个毫不起眼的图钉。历史上有记载的第一个使用“+”“-”这两个人符号的人是德国人约翰内斯·韦德曼（Johannes Widmann）。他在1489年出版的名为“便捷商业计算法”（Behende und husche Rechnung auf allen kauffmannschaft）的书中首次使用了这两个符号。



# 数学符号 理解手册

Comprehensive Handbook of Mathematics Symbols

[日] 黑木哲德 著  
赵雪梅 译

学林出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学符号理解手册 / [日] 黑木哲德著; 赵雪梅译. —上海: 学林出版社, 2007. 5

ISBN 978 - 7 - 80730 - 352 - 7

I. 数… II. ①黑…②赵… III. 数学-符号-手册  
IV. 01 - 62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 045116 号

NATTOKUSURU SUGAKUKIGOU

© Tetsunori Kurogi, 2001

All rights reserved.

Original Japanese edition published by KODANSHA LTD.

### 数学符号理解手册



作 者—— [日] 黑木哲德

翻 译—— 赵雪梅

责任编辑—— 吴耀根 齐 力

特约编辑—— 苏希常

插 图—— 舒 樱

封面设计—— 舒 樱

出 版—— 上海世纪出版股份有限公司

学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)

电话: 64515005 传真: 64515005

发 行—— 新华书店上海发行所

学林图书发行部(上海钦州南路 81 号 1 楼)

电话: 64515012 传真: 64844088

印 刷—— 上海港东印刷厂

开 本—— 889×1194 1/32

印 张—— 9

字 数—— 22 万

版 次—— 2007 年 5 月第 1 版

2007 年 5 月第 1 次印刷

印 数—— 4 000 册

书 号—— ISBN 978 - 7 - 80730 - 352 - 7/G · 91

定 价—— 18.00 元

(如发生印刷、装订质量问题,读者可向工厂调换。)

## 内容简介

+、-、 $\times$ 、 $\div$ 是什么时候、在哪儿诞生的？ $\int$ 为什么长成钩子的模样？ $\log$ 的词源是什么？诞生虚数  $i$  的真实理由是什么？大数学家莱布尼兹在哪儿出错了？什么情况下，三角形内角和不是  $180^\circ$ ？四维空间在哪里？有没有长着四个角的圆？ $\epsilon - \delta$  语言是浪漫的异性相吸？ $\nabla$  不是三角形的符号，那么它又是什么形状的信号呢？

这一个个疑问在《数学符号理解手册》这本书中能找到答案。本书生动地描述了符号们的成长历程，由浅入深地概括了数学公式，呈现了数学结构。不知不觉中，枯燥的数学公式深深地印入你的脑海之中。这一篇篇的小故事幽默地囊括了从小学算术到大学微积分的一系列的数学基础知识，使你在轻松阅读的同时，大大地提高了数学综合应用的能力。读完这本书，你会发现数学并不可怕，数学公式不比娱乐头条难记。

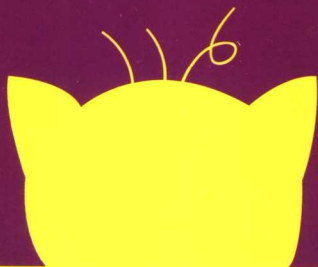


## 黑木哲德

1944年生于日本的宫崎县。

日本九州大学理学硕士，名古屋大学理学博士。专业研究领域是拓扑几何和微分几何。现任国立福井大学教育地域科学部数学系教授，兼任福井大学教育地域科学部的学部长、日本数学学会教育委员会委员长、日本综合学习学会副会长等职务，是上海师范大学客座教授。

著有大学本科的《线性代数》、家长一读的《算数学》、通俗易懂的《微积分》。工作繁忙，每天是咕噜咕噜连轴转。



## 序

人类之所以超脱了动物而成为地球的圣灵,是因为人发明了自己的语言和文字,而数学的符号则是语言文字范畴中最原始而又最精华的部分,它构成了人类逻辑思维、科技进步的基础。

数字是数学符号的基础,不同地域不同种族不同文化的人群几乎选用了相同的数字系统.十进制数字,它与人的十个手指——人类赖以工作的最重要器官——密切相关.而表示数的形式又有如此的相似,不同地域不同种族不同文化的人群表示数的符号都直接和量相关,你看:1,2,3...,一、二、三...和Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ...多么相似。

数学符号的演变和进化是人类智慧积累和进步的集中体现.如果说四则运算的+、-、×、÷是人类记录自然的开始,则∠、⊙、□等开始了人类对空间描述的历史;而 $\int, \frac{\partial}{\partial x}, \lim$ 实现了人类的思维从有限运算向无限运算的飞跃,那么数学符号的组合使用则构成了人类思维与创造的美妙图案.你再看:描绘数列极限的过程奇妙地表示成:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \triangleq \forall \epsilon > 0, \exists N \quad \exists n > N \Rightarrow |x_n - A| < \epsilon.$$

有人说,逻辑是人类思维的顶峰,那表示逻辑的数学符号则是逻辑的天书,U、∩、⊂、⊃、⊕等集合运算的符号把人类的智慧引到了登峰造极的殿堂。

数学的符号,人类智慧的结晶,人类攀登科学高峰的阶梯。

项家祥

## 译者序

埃及金字塔、中国万里长城、科潘玛雅遗址、日本京都清水寺、法国沙特尔大教堂……这些雄伟壮观的世界遗产不仅见证了人类文明的发展，而且蕴含了丰富的数学知识。伴随着人类在地球上的出现，数学诞生了。

数学可不是个老古董。它像个赶潮流的人似的，紧紧地追随着时代的节奏，不断地发展着，使它在自然科学和社会科学中具有不可动摇的地位。而且，它又不像通天塔上的宝物那样遥遥不可及。它离我们这么近，以至于我们还在牙牙学语时就结识了它。数数、算术、代数、平面几何、立体几何、微积分……这些称呼的变化就是我们长大的标志。这样，数学成了每次升学考中必不可少的科目。

总会从某个学校、某个角落传出诸如此类的话：

“你看呀，这么多奇形怪状的符号，这么多我不认识它而它认识我的公式，记也记不住，烦死人啦……”

“就是嘛，数学怎么这么难。不想学了。”

“可是我觉得数学蛮好玩的嘛。特别是找到解题方法时，好有成就感。”

“文科还要学高等数学，我还以为进了大学就可以把讨厌的数学丢了昵。”

“公式并不要全部背出来的，它们之间是有联系的。像我，就只记住主要的。到时候，灵活运用就可以了。”

学生时代的我们对数学的评价可谓五花八门、有人欢喜有人忧。我记得自己就抱怨过数学。某些对数学怀有严重抵触情绪的同学还将这种情绪引申为对数学老师的反感呢。如今，我却有这

么一本好书,让我安安静静地复习了一次数学基础知识.这本书就是黑木哲德教授的《数学符号理解手册》.

黑木哲德教授的《数学符号理解手册》以幽默的文笔、精彩的故事和生动的插图,向我们展现了一个趣味盎然的数学王国.他带领我们从 $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ 开始走访了数学符号家族,作了一次短暂的时间旅行.在这期间,我们不仅了解了每个符号成员的成长故事,而且通过横向联系、纵向延伸,系统地整理了从小学到大学的数学基础知识.在轻松的阅读过程中,孩子们增长了学习数学的兴趣,记住了烦人的数学公式,提高了综合思维的能力;父母们既回味了自己的学生时代,也温故而知新了.

学生们都喜欢阅读课外读物,选择怎样的读物很重要.一本趣味读物可以满足好奇心,提高求知欲.一本好的趣味读物,可以改变学生的好恶.记得上小学时,我读过一本记述大数学家高斯小时候的故事的书,书中介绍了高斯对各种数学题目的解法,譬如说如何巧妙计算1到100的和.那时候,父母建议我不要单纯地看,而要拿出纸和笔,写写做做,再和书上说的对比一下.当我的解法和高斯的不谋而合时,不用父母表扬,自己都会有种自豪感和成就感.《数学符号理解手册》就是一本有益的读物.尽管它不是习题集,可是它帮助你掌握和懂得运用数学公式,这才是解题的关键.

本书作者黑木哲德从事教育工作37年.他在日本著名的名古屋大学理学部取得理学博士学位,现在除了担任日本国立福井大学教育地域科学部的学部长外,还担任日本数学会教育委员会委员长、日本综合学习学会副会长和日本数学协会干事等职务.他虽然潜心研究拓扑几何和微分几何,但始终没有放弃对数学教学工作的研究.他经常到小学、初中和高中去讲课,激发学生学习数学的热情,训练并提高他们的数学综合运用能力.他不仅在日本国内举行讲座,而且还作为日本文部省的使者多次到海外讲学,交流教学经验,促进数学教学兴趣化、轻松化.最近,他作为上



海师范大学客座教授活跃在上海数学教学研究领域. 为了让更多的人分享数学的乐趣, 喜欢这门“枯燥”的学问, 他在百忙中抽空写了这本书. 《数学符号理解手册》这本书出版后, 深受读者喜爱, 再版数次, 还进入过日本图书销售排行榜, 并且连续获得亚马逊五星. 作者的另一本书《入门算数学》也享有同样的殊荣. 这次, 通过《数学符号理解手册》的中译本, 作者表达了他的心愿:

Mathematics has no passport, as he is ours-human being's. In fact, there have been many Chinese mathematicians left their names in the history of mathematics. We respected their achievement. I would like to share my enjoyment at mathematics with Chinese readers. I hope some one of you could solve those unproved theorems and hypotheses in the future.

(数学作为全人类的财产, 是没有国界的. 许许多多的中国数学家将他们的姓名铭刻在数学历史的长河中, 受世人敬仰. 能够和中国的读者们分享数学的乐趣是我的荣幸. 希望在将来, 你们中的成员能够为那些尚未证明的定理和猜想找到答案.)

《数学符号理解手册》的中译本始终得到黑木哲德教授的支持和鼓励. 舒樱为中译本所作的插图生动活泼, 富有创意, 有助于我们理解基本的数学概念. 刘培建承担了有关集合内容的初译, 而且为中译本汇编了数学家们的简短生平介绍, 方便读者阅读. 在此感谢他们的支持和协助.

## 作者原序

人们常说：社会的进步，只会产生需要渊博知识的脑力劳动和单纯的体力劳动的两极分化。也有人说：单纯的体力劳动迟早会被电脑和机器人取代……你看，这么一来就找不到回避数学的理由了。为什么这么说呢？那是因为无论何种形式的渊博知识都离不开数学及其思维方法。

数学因为它的抽象性，使得众多符号纷纷登场。也由此，让人觉得数学好难学。尤其是在更深奥的领域内，使用符号的场合也就更多。

回顾悠悠的人类历史长河，不难发现，为了更简洁、为了更容易书写、为了解决更多的问题，经过一代人接着一代人的钻研，数学符号相继诞生了。

同时，通过符号化，数学不再是属于数学家的专利，而成为平凡的我们也能接触的学科。符号的使用和发展可以说体现了知识的平等化过程。

21世纪将不可避免地沉浸在符号的海洋中。习惯了一些符号化的我们只要作些小小的努力，理解数学就不是一件难事了。这时，再添上一点点耐心的倾听就更理想了。

本书是一本通过数学符号来对从小学算术到大学微积分的内容作解说的书。原则上，每一讲都是独立的，所包含的内容也是形形色色的。有的讲座连躺着都能阅读，而有的讲座则需要点纸和笔做帮手。出于大众化的考虑，我尽量留意不使用数学公式，而采用通俗易懂的说明方法。为此，数学的严密性作出了牺牲。当然，有的讲座中会出现不得不使用的专门知识或者数学公式；并且，还会出现重复说明的情况。

如果这本书能够成为想重温数学以及更进一步了解数学的人的领航员的话,我深感荣幸。另外,新时代是终身学习的时代,大家能够从与习惯不同的层面出发接触数学,从而对数学产生更大的兴趣,那我会更加喜悦。

我还有一个奢望,那就是:本书能够成为高中生一窥数学的魔镜;能够成为大学生学习的好帮手;能够成为爱好数学、希望深入了解数学的朋友的密友。如果本书有幸得到各位宠爱,使各位爱不释手的话,那将是我莫大的幸福。

写完整本书,发现在个别内容上稍有操之过急、流于形式,整体上,我的想法是以符号的观点为出发点,为了更加浅显易懂和更加趣味化,对已经熟知的内容多下了点功夫,多少做到使其色香味俱全。

最后,为了轻松阅读,还添加了漫画。负责漫画插图的是数学教师高塚直子。她的画可以使人心情轻松,希望这些漫画能够给各位带来快乐。

本书的策划意向来自编辑部的大塚记央,没有他的大力协助本书是完不成的。在此对他的坚持不懈的耐心等待表示感谢。

本书是我敬献给大家的一份舒心的礼物,衷心希望大家能够喜欢它。

写于2001年8月吉日



# 目 录

序 .....	项家祥	1
译者序 .....		1
作者原序 .....		1

## 第 I 部 出现在小学、初中和高中的数学符号

第 1 讲	$+$ , $-$ 为什么 $-(-1)=1$ .....	3
第 2 讲	$\times$ , $\div$ $0.999\cdots$ 是个闷闷不乐的数字 .....	7
第 3 讲	$\infty$ 无限的魔力 .....	12
第 4 讲	$\%$ 没人赢你 .....	15
第 5 讲	$\sqrt{\quad}$ 为什么它的形状奇特? .....	17
第 6 讲	$\pi$ 用 $\pi$ 赚大笔大笔的钱 .....	22
第 7 讲	$\sin$ , $\cos$ , $\tan$ 仙女下凡 .....	26
第 8 讲	$\ln$ , $\log$ 天文学上的魔术 .....	31
第 9 讲	$e$ 伟人的结晶 .....	35
第 10 讲	$e^x$ , $\exp$ 数学的超人 .....	37
第 11 讲	$i$ 真实的虚幻 .....	40
第 12 讲	$\sum$ 懒人的符号 .....	46
第 13 讲	$\lim$ 与爱挑剔的恋人相处 .....	51
第 14 讲	$dx/dy$ 微分学的成长过程 .....	54
第 15 讲	$\int$ 堆积成山 .....	59
第 16 讲	$i$ , $j$ , $k$ 实数、虚数后面会是谁? .....	63
第 17 讲	$\Delta$ , $\nabla$ , $\angle$ 符号代表形体 .....	66
第 18 讲	$\infty$ , $\infty$ 相似是不断的重复 .....	68
第 19 讲	$\perp$ , $\angle$ , $\parallel$ 三角形内角和是 $180^\circ$ 吗? .....	71

第 20 讲	$\therefore, \because, \text{iff}, \Leftrightarrow$	种瓜得瓜, 种豆得豆	74
第 21 讲	$( ), \{ \}, [ ]$	400 年历史的数学三明治	76
第 22 讲	G. C. M, L. C. M	不是 Giants, Carp 和 Marines	80
第 23 讲	$!, C_n^m, P_n^m$	瞬间长大的数字	84
第 24 讲	$P(A), E(X)$	赌博上的数学	89

## 第 II 部 大学的数学文化、集合

第 25 讲	$\sinh, \cosh, \tanh$	符号的兄弟情义	95
第 26 讲	$=, \infty, \equiv$	看似相同, 其实不同	98
第 27 讲	$\leq (\leq, \leq), <$	数学不平等起源论	102
第 28 讲	$\subset, \subseteq$	数学的传说从这儿开始	106
第 29 讲	$\cup, \cap$	女歌手的交集	108
第 30 讲	$\in, \forall, \exists$	浜崎步 $\in X$	111
第 31 讲	$\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{C}$	数的缝隙在哪里?	113
第 32 讲	$\{ \}$	数学的相扑比赛场	116
第 33 讲	$\times$	看似神秘的符号	119
第 34 讲	$f: X \rightarrow Y$	什么是一一对应?	122
第 35 讲	$\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$	教教哈姆雷特学数学	126
第 36 讲	$\epsilon, \delta$	让人头疼的“ $\epsilon - \delta$ ”语言	129
第 37 讲	$\max, \sup, \min, \inf$	大大小小、各不相同	133
第 38 讲	$O, o$	“大鸥”和“小鸥”的区别	137
第 39 讲	$\overline{\lim}, \underline{\lim}$	上下收敛的话题	140

## 第 III 部 矩阵、矢量、线性代数

第 40 讲	$\text{sgn}$	由搭桥到行列式	147
第 41 讲	$\delta_{ij}$	数学上的节约开支	151
第 42 讲	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	方程组的一次性解法	154

第 43 讲	rank 在数学中也有贵贱之分吗? .....	158
第 44 讲	dim 探索 4 维 .....	163
第 45 讲	Im, Ker 全部由 0 支配 .....	166
第 46 讲	'A, A*, trA 外形亮丽且相当贵重 .....	170
第 47 讲	$\rightarrow, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 矢量是何方人物? .....	175
第 48 讲	$ x ,   x  $ 圆难道不是球形的? .....	178
第 49 讲	$\oplus$ 新的空间的诞生 .....	181
第 50 讲	$W^\perp, W^*$ 也是向量空间哟 .....	184

#### 第 IV 部 你也是数学超人, 攻陷微积分及其同盟

第 51 讲	$d(P, Q)$ 不局限于长短的距离 .....	189
第 52 讲	$\bar{A}, \dot{A}, \partial A$ 现代数学的入口 .....	192
第 53 讲	$\delta_x$ 难以置信的函数 .....	195
第 54 讲	$\cdot$ 内积——内在的积? .....	198
第 55 讲	$\times$ 外积——外部的积? .....	202
第 56 讲	$\partial/\partial x$ 偏微商并不可怕 .....	207
第 57 讲	$\partial(f, g)/\partial(x, y)$ 多变量函数的积分的诀窍 .....	212
第 58 讲	$\int_c$ 线积分是什么样的积分? .....	217
第 59 讲	$\iint$ 二重积分是 .....	223
第 60 讲	grad, $\nabla$ 日本的经济陷入无底的泥沼中? .....	229
第 61 讲	div 用数学语言描述流动 .....	235
第 62 讲	rot, curl 地球的旋转 .....	239
第 63 讲	$\Gamma(s)$ $n!$ 的扩展 .....	244
希腊字母表及其惯用方法 .....		248
参考文献 .....		250
数学家 .....		251
索引 .....		268

# 第 I 部

---

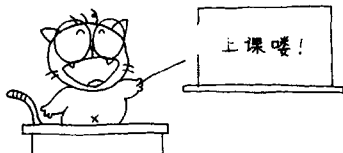
出现在小学、初中和  
高中的数学符号





# 第 1 讲 +, -

## 为什么 $-(-1)=1$



传说在中国古代,人们用 $+$ 和 $-$ 这两个符号来表示加和减。但是,在现代人的眼中,这两个符号就像两个毫不起眼的图钉。

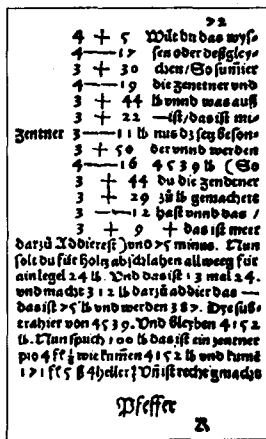
第一个使用 $+$ 和 $-$ 这两个符号的人是德国人约翰内斯·韦德曼(Widmann, J.)。他在 1489 年出版的《适合所有商业的漂亮敏捷的算法》中首次使用了这两个符号。起初,这两个符号并不是表示运算符号的加号( $+$ )和减号( $-$ ),而是用来表示量的多少,比如 $+1$ 表示多 1 个, $-2$ 表示少 2 个。

$+$ 和 $-$ 这两个符号具有两种不同的含义。一种是像 $+7$ 的 $+$ 、 $-8$ 的 $-$ ,表示数字的正值和负值。另一种是作为运算符号在计算中使用。

在 $2+3$ 中, $+$ 是表示“2 和 3 相加”的运算符号。在 $9-5$ 中, $-$ 是表示“从 9 中减去 5”的运算符号。

但是,在像 $2-5=-3$ 这样的算式中就不那么简单了。等号左边的一是运算符号的减号,等号右边的一是代表负值的符号。

一般情况下,正数前的“ $+$ ”号是被省略的。例如正 7,写成 7 而不是 $+7$ ,也不会写成 $2+5=+7$ 。由于数学基本上是以“简单最好”为原则的(the simple is the best),在不造成混淆的前提下,能省略的部分都可以被省略,因此,只要能够明确表明正数和负数的区别,写上一号作为负数的符号,也就没有必要再一个一个地写上 $+$



(韦德曼所写的书中的一页,摘自《数学史》,大竹出版)