现代数学基础丛书 107

正规族理论及其应用

顾永兴 庞学诚 方明亮 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书以亚纯函数值分布理论为基础，系统地介绍了近十多年来在亚纯函数正规族理论方面的研究成果，主要包括 Navanlinna 的两个基本定理，一些 Picard 型定理，一些正规定则，Zalcman 引理等.

本书适合高等院校数学系高年级大学生、研究生以及相关的教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

正规族理论及其应用/顾永兴，庞学诚，方明亮著. —北京：科学出版社，2007

(现代数学基础丛书；107)

ISBN 978-7-03-018692-8

I. 正… II. ① 顾… ② 庞… ③ 方… III. 半纯函数-研究 IV. O174.52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 032244 号

责任编辑：张 扬／责任校对：林青梅

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 4 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2007 年 4 月第一次印刷 印张：11 1/4

印数：1—4 000 字数：206 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

20 世纪初 P.Montel 引入了正规族概念, 他把具有某种列紧性的函数族称为正规族. 正规族理论的研究既有重要的理论意义, 也有重要的应用价值. 例如, 近年来十分活跃的复解析动力系统中的基本概念 Julia 集与 Fatou 集就是由正规性引出的. 自 P.Montel 引入正规族的概念到现在, 正规族理论有了长足的发展, 特别是在我国, 从熊庆来、庄圻泰到杨乐、张广厚等, 他们所作的奠基性工作使我国在正规族理论的研究方面处于国际前沿地位.

正规族理论的发展可分为三个阶段:

第一阶段即从 20 世纪 20 年代 Nevanlinna 值分布理论的产生到 20 世纪五六十年代. 正规族理论的核心就是正规定则的研究, P.Montel 首先把函数族的正规性与函数的取值问题联系了起来, 这就是经典的 Montel 正规定则. P.Montel 是用模函数证明的, 但使用这种超越的方法似乎难以更深入地研究正规族理论. Nevanlinna 值分布理论的产生不仅使函数族的正规性与函数导数的取值问题联系起来成为可能, 也使上述 Montel 正规定则的证明变得初等和简单. 在 20 世纪 30 年代, 应用 Nevanlinna 理论使正规族理论的研究达到了高峰, 涉及亚纯函数族情形出现了著名的 Marty 正规定则, 涉及全纯函数族情形相继出现了 Miranda、Valiron 以及庄圻泰正规定则. 在这个阶段, 人们对正规定则的研究主要集中在全纯函数族情形, 而对亚纯函数族情形除 Marty 定则外实质性的研究成果并不多.

第二阶段是从 20 世纪五六十年代到 80 年代. 1959 年, W.K.Hayman 建立的著名不等式启示人们提出如下问题: 一个亚纯函数族在 Miranda 定则的条件保持不变的情形下是否仍保持其正规性? 不久, W.K.Hayman 把它作为猜想正式提出. 1979 年, 我们证实了这个猜想. 需要指出的是: 我们的工作是以杨乐、张广厚于 20 世纪 60 年代在亚纯函数正规族理论研究方面所取得的开创性成果为基础的. 这段时期以 W.K.Hayman 所提出的几个猜想为主线获得了一系列新的正规定则, 其中大部分是我国数学工作者完成的. 到 20 世纪 80 年代中期, W.K.Hayman 所提出的猜想全部被证实, 这标志着正规族理论的研究达到了一个新的阶段.

在上述两个阶段中, 人们对正规定则的研究绝大部分采用的是 Miranda 的方法, 即消去原始值的方法, 它根据 Nevanlinna 值分布理论首先建立关于特征函数的界囿不等式, 再设法消去原始值. 而在消去原始值时, 往往由于需要高度的技巧而使某些正规定则的证明变得相当复杂.

第三个阶段应该追溯到以色列数学家 L.Zalcman 在 1975 年的一篇短小论文. 他在该文中另僻蹊径, 从 Marty 正规定则出发给出了一族亚纯函数不正规的充要条

件, 由此导出一个有趣的正规定则并应用它证明了一些正规定则. 然而他的这个结果没有能够被广泛和深入地应用, 一直到 20 世纪 80 年代末我国年轻的数学工作者创造性地改进了 L.Zalcman 的工作, 他们把 L.Zalcman 的结果与函数导数联系了起来. 这种方法使正规族理论的研究进入了一个新的天地, 它被称为 Zalcman-Pang 方法. 这种方法不仅使以往许多使用消去原始值的方法所得到的正规定则的证明变得相当简单, 而且又建立了一系列新的正规定则. 这段时期正规定则的研究主要围绕两方面的内容展开. 一方面是对上述 Hayman 猜想的深化, 这包括国内数学工作者的一些重要结果. 另一方面是 W.Schwick 在 20 世纪 90 年代初率先提出的把正规族和唯一性联系起来考虑, 这方面的成果主要是以色列和我国数学工作者所取得的.

本书主要介绍 20 世纪 90 年代以来即正规族理论发展的第三阶段的研究成果, 可以看作是《亚纯函数的正规族》一书的延续. 本书第 1 章介绍我们要用到的基础知识即亚纯函数 Nevanlinna 理论; 第 2 章介绍亚纯函数正规族理论的基本概念与性质; 第 3 章介绍 Bloch 原理和几个由 W.K.Hayman 提出的亚纯函数正规族问题, 其中主要介绍庞学诚和 L.Zalcman 等人获得的推广的 Zalcman 引理以及用 Zalcman 引理证明把 Miranda 正规定则推广到亚纯函数族情形的著名结果; 第 4 章介绍涉及例外函数的正规定则, 主要介绍杨乐获得的函数族中每个函数不取零值, 它的 k 阶导数不取一不恒为零的全纯函数的正规定则以及庞学诚和 L.Zalcman 等人获得的改进形式: 函数族中每个函数的零点重数不小于 $k+2$, 它的 k 阶导数不取一不恒为零的全纯函数的正规定则; 第 5 章介绍与分担值相关的正规定则, 主要介绍庞学诚和 L.Zalcman, 刘晓军和庞学诚获得的亚纯函数族中任意函数与其导函数分担两个有穷值及一个三元素集合的正规定则, 方明亮和 L.Zalcman 等人获得的几个与分担值相关的正规定则以及常建明和方明亮获得的全纯函数族中每个函数与它的一阶和二阶导数分担不动点的正规定则; 第 6 章介绍几个其他方面的正规定则, 主要介绍 M.Essén 和伍胜建、常建明和方明亮获得的涉及迭代与不动点的正规定则, 方明亮和袁文俊、J.D.Hinchliffe、W.Bergweiler 等人获得的涉及复合与例外函数的正规定则以及 W. Schwick、W.Bergweiler、W.Bergweiler 和 J.K.Langley 获得的涉及函数及它的 k 阶导数不取零点的正规定则; 第 7 章介绍正规族的应用, 主要介绍 W.Schwick、W.Bergweiler、方明亮和 L.Zalcman 等人获得的正规族在复动力系统、复方程、整函数的唯一性以及亚纯函数模分布方面的应用; 第 8 章介绍关于拟正规的几个结果. 本书的第 3、8 章由庞学诚撰写, 第 4、5、6、7 章由方明亮撰写.

本书得到了杨乐院士和王跃飞教授的热情支持与帮助, 在此表示衷心的感谢.

顾永兴

2006 年 9 月

符号说明

$\mathbb{C}$ 表示复平面.

$\overline{\mathbb{C}}$ 表示扩充复平面.

$\Delta(z_0)$ 表示以 z_0 为圆心的开圆, 也称为 z_0 的邻域.

$\overline{\Delta}(z_0)$ 表示以 z_0 为圆心的闭圆.

$\Delta(z_0, r)$ 表示以 z_0 为圆心 r 为半径的开圆, 也称为 z_0 的邻域.

$\Delta'(z_0, r)$ 表示以 z_0 为圆心 r 为半径的去心开圆.

$\overline{\Delta}(z_0, r)$ 表示以 z_0 为圆心 r 为半径的闭圆.

$\overline{\Delta}'(z_0, r)$ 表示以 z_0 为圆心 r 为半径的去心闭圆.

目　录

第 1 章　亚纯函数值分布理论的基础知识

正规族理论以 R.Nevanlinna 所建立的亚纯函数值分布理论为基础. 本章扼要叙述 Nevanlinna 基本理论, 其中一部分内容将予以简略的论述, 对某些性质不加证明, 只指出可参阅的文献.

1.1　Poisson-Jensen 公式与特征函数

定理 1.1.1　设 $f(z)$ 为圆 $|z| < R(0 < R \leqslant \infty)$ 内的亚纯函数且不恒为零, 设 $f(z)$ 在 $|z| < \rho(0 < \rho < R)$ 内的零点为 $a_\lambda(\lambda = 1, 2, 3, \cdots, h)$, 极点为 $b_\mu(\mu = 1, 2, 3, \cdots, k)$, 其中每一零点或极点出现的次数与其级相同, 则当 $|z| < \rho$ 时有

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi\\&+\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}\right|-\sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}\right|.\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

证明　我们区分两种情形.

情形 1　在圆周 $|z| = \rho$ 上 $f(z)$ 没有零点和极点. 置

$$F(z) = f(z)\cdot\frac{Q(z)}{P(z)},\tag{1.1.2}$$

其中

$$P(z) = \prod_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}, Q(z) = \prod_{\mu=1}^{k}\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}.\tag{1.1.3}$$

显然, $F(z)$ 在 $|z| < R$ 内亚纯而在圆 $|z| \leqslant \rho$ 上 $F(z) \neq 0, \infty$, 且当 $|z| = \rho$ 时,

$$|F(z)| = |f(z)|.\tag{1.1.4}$$

于是, $\log|F(z)|$ 在圆 $|z| \leqslant \rho$ 上调和, 根据 Poisson 公式, 当 $|z| < \rho$ 时,

$$\log|F(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|F(\rho e^{i\varphi})\right|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi.\tag{1.1.5}$$

由 (1.1.4), (1.1.2) 及 (1.1.5) 式, 即得 (1.1.1) 式.

情形 2　在圆周 $|z|=\rho$ 上 $f(z)$ 有零点或极点. 任取定点 $z:|z|<\rho$ 且 $z\neq a_\lambda, b_\mu$, 再任取 $r<\rho$, 使 $|z|$, $|a_\lambda|$ 及 $|b_\mu|$ 均小于 r. 根据情形 1, 有

$$\begin{aligned}\log|f(z)|=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\right)\mathrm{d}\varphi\\&+\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{r(z-a_\lambda)}{r^2-\overline{a_\lambda}z}\right|-\sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{r(z-b_\mu)}{r^2-\overline{b_\mu}z}\right|.\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

另外, 从明显的不等式

$$\left|\log|te^{i\theta}-1|\right|<\log 2+\log\frac{1}{|\theta|}\ \left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3},0<t\leqslant 1\right).$$

我们可知广义积分 $\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)\mathrm{d}\varphi$ 存在且

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\rho}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\right)\mathrm{d}\varphi\\=&\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

于是在 (1.1.6) 式中令 $r\to\rho$ 就得 (1.1.1) 式. 至此定理证毕. □

当 $f(0)\neq 0,\infty$ 时在 (1.1.1) 式中令 $z=0$ 就得

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}+\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}.\tag{1.1.7}$$

(1.1.7) 式称为 Jensen 公式.

为了对 Jensen 公式进行变形, 我们引进一些记号.

定义 1.1.1

$$\log^+x=\begin{cases}\log x, & x\geqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

我们称 $\log^+x$ 为 x 的正对数. 显然当 $x>0$ 时有 $\log x=\log^+x-\log^+\frac{1}{x}$.

$n(r,f)$ 表示 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 上的极点个数 (一个 m 级极点算作 m 个极点). 这样, $n\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 就表示 $f(z)$ 在圆 $|z|<r$ 上的零点个数 (一个 m 级零点算作 m 个零点).

以下, 我们指出 (1.1.7) 式右边第三项

$$\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}=\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t.$$

事实上, 不妨设 $|z|<\rho$ 内的所有极点所位于的以原点为心的圆周的半径依次记为 $r_1<r_2<\cdots<r_l, m_1, m_2, \cdots, m_l$ 为相应的圆周上极点的个数 (计重数), 于是

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|} &= m_1\log\frac{\rho}{r_1}+\cdots+m_l\log\frac{\rho}{r_l}\\ &= m_1\int_{r_1}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+m_2\int_{r_2}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+m_l\int_{r_l}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= m_1\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}t}{t}+(m_1+m_2)\int_{r_2}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+m_3\int_{r_3}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+m_l\int_{r_l}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= m_1\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}t}{t}+(m_1+m_2)\int_{r_2}^{r_3}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+(m_l+\cdots+m_l)\int_{r_l}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t+\int_{r_2}^{r_3}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t+\cdots+\int_{r_l}^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

同理, (1.1.7) 式右边第二项

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_0^\rho\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)}{t}\mathrm{d}t,$$

于是 (1.1.7) 式可改写成

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^\rho\frac{n(t,f)}{t}\,\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\right|\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^\rho\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)}{t}\,\mathrm{d}t+\log|f(0)|.\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

在 (1.1.8) 式中我们假定了 $f(0)\neq 0,\infty$. 若在 $z=0$ 的某邻域内, 令 $f(z)=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots(c_s\neq 0)$, 应用 (1.1.8) 于 $g(z)=z^{-s}f(z)$ 即可得到 Jensen 公式的一般形式.

定理 1.1.2(Jensen 公式) 设 $f(z)$ 为圆 $|z|<R\,(0<R\leqslant\infty)$ 内的亚纯函数且不恒为零, 则当 $|z|<\rho\,(0<\rho<R)$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^\rho\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,\mathrm{d}t+n(0,f)\log\rho\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\right|\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^\rho\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)-n\left(0,\dfrac{1}{f}\right)}{t}\,\mathrm{d}t+n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log\rho+\log|c_s|,\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

其中 c_s 为 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内展开式的第一个不为零的系数.

Nevanlinna 理论可以说是从 Jensen 公式的一般形式 (1.1.9) 展开的. 以下再引进一些记号.

定义 1.1.2

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

$m(r,f)$ 也记为 $m(r,\infty)$, $m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $m(r,a)$.

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt+n(0,f)\log r,$$

$N(r,f)$ 称为 $f(z)$ 的极点的密指量 (或计数函数), 记为 $N(r,\infty)$. $N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 称为 $f(z)$ 的 a 值点密指量, 记为 $N(r,a)$.

这样, Jensen 公式 (1.1.9) 可写为

$$m(r,f)+N(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \tag{1.1.10}$$

有时还需用到如下形式:

$$\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi=N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N(r,f)+\log|c_s|. \tag{1.1.11}$$

定义 1.1.3

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

R. Nevanlinna 称 $T(r,f)$ 为亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数.

于是 Jensen 公式又可写为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \tag{1.1.12}$$

特征函数 $T(r,f)$ 是 Nevanlinna 理论中最基本的概念, 我们给出如下性质但不加证明.

定理 1.1.3　设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯, 则 $f(z)$ 的特征函数 $T(r,f)$ 为 $r\,(0<r<R)$ 的非减连续函数, 且为 $\log r$ 的凸函数.

该定理的证明见文献 [91], [207] 等.

另外, 根据正对数的性质, 容易推得关于特征函数的如下性质.

定理 1.1.4　设 $f_j(z)(j=1,\cdots,p)$ 为圆 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内 p 个亚纯函数, $f_j(0)\neq\infty(j=1,\cdots,p)$, 则

$$T(r, f_1 f_2 \cdots f_p) \leqslant \sum_{j=1}^{p} T(r, f_j) \qquad (0 < r < R), \tag{1.1.13}$$

$$T(r, f_1 + \cdots + f_p) \leqslant \sum_{j=1}^{p} T(r, f_j) + \log p \qquad (0 < r < R). \tag{1.1.14}$$

注 在上述定理中若去掉 $f_j(0) \neq \infty$ 的限制, 则从 $N(r, f_j)$ 的意义可看出 (1.1.13) 与 (1.1.14) 式于 $1 \leqslant r < R$ 也成立.

当 $f(z)$ 为全纯函数时, 利用定理 1.1.1(Poisson-Jensen 公式), 易推出其特征函数与其最大模 $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ 之间的相互制约关系.

定理 1.1.5 设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内全纯, 则

$$T(r, f) \leqslant \log^+ M(r, f) \leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r} T(\rho, f) \qquad (0 < r < \rho < R). \tag{1.1.15}$$

1.2 Nevanlinna 第一基本定理

根据正对数性质以及 Jensen 公式 (1.1.12) , 我们立即有

定理 1.2.1(Nevanlinna 第一基本定理) 设 $f(z)$ 为 $|z| < R(0 < R \leqslant \infty)$ 内的一非常数亚纯函数. 若 a 为任一有穷值, 则当 $0 < r < R$ 时有

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + h(a, r), \tag{1.2.1}$$

其中

$$|h(a,r)| \leqslant \big|\log|c_s|\big| + \log^+|a| + \log 2,$$

$$f(z) - a = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \cdots \quad (c_s \neq 0).$$

由于一个非退化的分式线性变换可分解成线性变换与反演变换的复合, 故有如下推论.

推论 设 $f(z)$ 为 $|z| < R$ 内的一非常数亚纯函数, 又设 $F(z) = \dfrac{af(z)+b}{cf(z)+d}$, 其中 a,b,c,d 为常数且 $ad - bc \neq 0$, 则

$$T(r, F) = T(r, f) + O(1) \qquad (0 < r < R). \tag{1.2.2}$$

下面我们再给出关于平面上亚纯函数的特征函数 $T(r,f)$ 的两个性质.

定理 1.2.2 设 $f(z)$ 为平面上的一非常数亚纯函数, 则

$$\lim_{r \to \infty} T(r, f) = \infty. \tag{1.2.3}$$

事实上当 $f(0) = \infty$ 时根据 $T(r,f) \geqslant N(r,f)$ 立即可证得. 当 $f(0) = a \neq \infty$ 时应用 Nevanlinna 第一基本定理 (定理 1.2.1) 于 $\dfrac{1}{f-a}$ 即可证得.

定理 1.2.3　设 $f(z)$ 为平面上一超越亚纯函数, 则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty. \tag{1.2.4}$$

证明　区分三种情形.

情形 1　$f(z)$ 没有极点. 这时 $f(z)$ 为超越整函数, 因此, 在展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

中有无穷多个系数不为零, 根据 Cauchy 不等式, 有

$$|a_n|r^n\leqslant M(r,f)\quad(r>0,n=0,1,\cdots), \tag{1.2.5}$$

故对每个正整数 p, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,f)}{r^p}=\infty,$$

从而

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log r}=\infty.$$

再在 (1.1.15) 式中取 $\rho=2r$, 得

$$\log^+M(r,f)\leqslant 3T(2r,f).$$

由此可得 (1.2.4) 式.

情形 2　$f(z)$ 有无穷多个极点. 根据 $N(r,f)$ 的定义, 当 $r\geqslant 1$ 时, 有

$$N(r^2,f)\geqslant N(r^2,f)-N(r,f)\geqslant n(r,f)\log r,$$

因此

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,f)}{\log r}=\infty.$$

故也有 (1.2.4) 式.

情形 3　$f(z)$ 有有穷多个极点 $b_j(j=1,2,\cdots,k)$, 它们出现的次数与其级相同. 置

$$P(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-b_j),\quad g(z)=P(z)f(z).$$

显然 $g(z)$ 为整函数, 又因 $f(z)$ 为超越亚纯函数, 故 $g(z)$ 为超越整函数. 根据情形 1, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,g)}{\log r}=+\infty.$$

另外, 由 (1.1.13) 式, 当 $r\geqslant 1$ 时,

$$T(r,g)\leqslant T(r,P)+T(r,f).$$

再注意对多项式 P 有

$$T(r,P)=O(\log r)$$

就知 (1.2.4) 式成立. □

1.3 Ahlfors-Shimizu 特征函数及亚纯函数的级

这里, 我们再介绍另一种类型的特征函数, 分别由 L.Ahlfors[1] 和 T.Shimizu[172] 相互独立地引进, 称为 Ahlfors-Shimizu 特征函数. 它与 Nevanlinna 特征函数仅相差一个有界量, 但由于它的几何特征而常被使用.

下面我们引进 Ahlfors-Shimizu 特征函数.

令

$$V(z)=\log\left(1+|f(z)|^2\right).$$

其拉普拉斯算子为

$$\Delta V=\frac{4|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}. \tag{1.3.1}$$

现设 $f(z)$ 在 $|z|=r$ 上没有极点, 而在 $|z|<r$ 内的极点记为 $b_1,\cdots,b_h$, 相应的重数记为 $m_1,\cdots,m_h$. 取适当小的 $\delta>0$, 使圆盘 $\overline{\Delta}(b_j,\delta)\,(j=1,\cdots,h)$ 彼此不相交. 应用 Green 公式于区域

$$D_\delta=(|z|<r)\setminus\bigcup_{j=1}^{h}\overline{\Delta}(b_j,\delta)$$

得

$$\iint\limits_{D_\delta}\Delta V\mathrm{d}\delta_z=\oint\limits_{|z|=r}\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^{h}\oint\limits_{|z-b_j|=\delta}\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s. \tag{1.3.2}$$

不难验证 (1.3.2) 式左边当 $\delta\to0$ 时趋于

$$\iint\limits_{|z|<r}\frac{4\mid f'(z)\mid^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\mathrm{d}\delta_z.$$

而又由于在 b_j 的充分小邻域内

$$V(z)=2m_j\log\frac{1}{|z-b_j|}+V^*(z),$$

其中 $V^*(z)$ 在 b_j 的邻域内有连续的偏导数, 故 (1.3.2) 式右边当 $\delta\to0$ 时趋于

$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{h}4\pi m_j=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi}\log(1+|f(z)|^2)\mathrm{d}\varphi+4\pi n(r,f),$$

于是

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<r}\frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}\mathrm{d}\delta_z=\frac{r}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{\mathrm{i}\varphi})|^2}\mathrm{d}\varphi+n(r,f).$$

当 $f(0)\neq\infty$ 时，上式两边除以 r 并对 r 积分得

$$\int_0^r\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<t}\frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}\mathrm{d}\delta_z\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi})|^2}\mathrm{d}\varphi+N(r,f)-\log\sqrt{1+|f(0)|^2}. \tag{1.3.3}$$

若令

$$A(t)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<t}\frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}\mathrm{d}\delta_z,$$

再注意到

$$m(r,f)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi})|^2}\mathrm{d}\varphi\leqslant m(r,f)+\frac{1}{2}\log2,$$

(1.3.3) 式就可以写为

$$\left|\int_0^r\frac{A(t)}{t}\mathrm{d}t-T(r,f)\right|\leqslant\frac{1}{2}\log2+\log\sqrt{1+|f(0)|^2}. \tag{1.3.4}$$

显然，若在 $|z|=r$ 上有 $f(z)$ 的极点，由连续性 (1.3.4) 式仍成立. 现在我们可以定义 Ahlfors-Shimizu 特征函数.

定义 1.3.1

$$T_0(r,f)=\int_0^r\frac{A(t)}{t}\mathrm{d}t$$

称为 $f(z)$ 的Ahlfors-Shimizu特征函数.

Ahlfors-Shimizu 特征函数 $T_0(r,f)$ 有如下性质.

定理 1.3.1　设 $f(z)$ 为圆 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内的非常数亚纯函数，则 $f(z)$ 的Ahlfors-Shimizu特征函数 $T_0(r,f)$ 满足

(1) $T_0(r,f)=T_0\left(r,\dfrac{1}{f}\right)$,

(2) $|T_0(r,f)-T(r,f)|\leqslant\log2+|\log|c_s||$,

其中 c_s 为 $f(z)$ 在 $z=0$ 的展式中的第一个不为零的系数.

证明　(1) 因

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{\left|\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)'\right|}{1+\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|^2} \tag{1.3.5}$$

而成立.