X I A N X I N G D A I S H U

面向21世纪普通高等教育规划教材

线性代数

主编 戴立辉　副主编 唐晓文 任彦　主审 陈纪阳

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材

线性代数

主　编　戴立辉

副主编　唐晓文　任　彦

主　审　陈纪阳

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材是在贯彻落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"要求精神的基础上，按照工科及经济管理类"本科数学基础课程教学基本要求"并结合当前大多数本专科院校的学生基础和教学特点进行编写的. 全书以通俗易懂的语言，全面而系统地讲解线性代数的内容，包括行列式、矩阵、向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等6章内容，并附录有MATLAB在线性代数中的应用. 每章分若干节，每章配有习题，书末附有习题的参考答案.

本教材理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的线性代数课程的教材使用，也可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材，还可供相关专业人员和广大教师参考.

与本教材同步出版的《线性代数学习指导》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入，对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨，对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益，亦可作为本教材配套的习题课参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/戴立辉主编. 一上海：同济大学出版社，2007.7

面向21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5608-3527-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. 戴 Ⅲ. 线性代数一高等学校一教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第095072号

面向21世纪普通高等教育规划教材

线性代数

主　编　戴立辉

副主编　唐晓文　任　彦

主　审　陈纪阳

责任编辑　曹　建　责任校对　谢惠云　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　14.5

印　数　1--6100

字　数　290000

版　次　2007年7月第1版　2007年7月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3527-3/O・298

定　价　22.00元

新世纪高级应用型人才培养系列
面向21世纪普通高等教育规划教材

前　言

"线性代数"是普通高等院校本科生各专业普遍开设的一门公共基础课程，在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用.为了适应当前我国高等教育正经历从"精英型教育"向"大众化教育"的转变过程，满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点，我们编写了这本线性代数课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的要求精神，并严格执行教育部"数学与统计学教学指导委员会"最新修订的工科及经济管理类"本科数学基础课程(线性代数部分)教学基本要求"，同时参考了近几年来国内外出版的有关教材，并深入结合编者的一线教学实践经验.而且，本教材编写中适当兼顾全国研究生入学考试数学考试大纲的要求(线性代数部分)，并以"够用"为原则组织内容.全书以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解了线性代数的知识，包括行列式、矩阵、向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等，并附录有MATLAB在线性代数中的应用.每章分若干节，每章配有习题，书末附有习题的参考答案.

第1—6章属于教学的基本内容，而附录是学习线性代数的辅助内容，是为开展计算机辅助教学而编写的，可供选讲.另外，本书的部分内容打上了"*"号，一般可以不读.

本书各章具体的主要内容如下：

第1章行列式，讲解行列式的概念、行列式的性质、行列式的计算.

第2章矩阵，包括矩阵的概念、矩阵的运算、逆矩阵、矩阵的初等变换与矩阵的秩、矩阵的分块.

第3章向量，介绍向量的概念和运算、向量组的线性相关性及其判定、线性表示与等价向量组、向量组的极大线性无关组、向量组的秩、向量空间的基本概念、向量的内积、正交矩阵等.

第4章线性方程组，涉及线性方程组的消元法、线性方程组解的存在性、线性方程组解的结构、克拉默法则等.

第5章矩阵的特征值与特征向量，讲解矩阵的特征值与特征向量的概念和性质、矩阵的特征值与特征向量的求法、相似矩阵的概念和性质、矩阵相似对角化的条件、实对称矩阵相似对角化的方法等.

第6章二次型，包括二次型的概念及其矩阵表示、二次型的秩及二次型与对

称矩阵的关系、化二次型为标准形和规范形的方法、二次型的正定性等.

附录介绍MATLAB基本情况以及用MATLAB求解线性代数问题的一般方法.

与本教材同步出版的《线性代数学习指导》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入，对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨，对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益，亦可作为本教材配套的习题课参考书.

本教材由戴立辉主编，唐晓文、任彦副主编. 本教材在编者充分讨论的基础上进行了以下分工：第1章、第5章由戴立辉编写，第2章由吴亭编写，第3章由林大华编写，第4章由吴霖芳编写，第6章和附录由陈翔编写. 唐晓文、任彦参与了本书编写大纲的讨论与制定，并对各章的编写提出了具体的意见和建议. 全书最后由戴立辉统稿、定稿.

本教材由陈纪阳教授主审. 陈纪阳教授对本书进行了深入细致的审查，提出了许多宝贵的修改意见和建议，对陈纪阳教授的热心指导，我们在此表示诚挚的谢意. 在本书的编写过程中，还得到作者单位及参编者单位领导的大力支持和热情帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平和学识有限，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请各位同行和读者不吝赐教，以便再版时修改.

编　者

2007年6月

目　　次

第 1 章　行列式

在中学所学代数中，我们讨论过二阶、三阶行列式，并且利用它们来解二元、三元线性方程组. 为了研究 n 元线性方程组，需要把行列式的概念推广到 n 阶. 行列式是一个重要的概念，它在线性代数和后继课程里都有着非常广泛的应用. 作为一个有力的数学工具，行列式在许多实际应用问题中，也发挥着重要作用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法.

1.1　行列式的定义

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先来讨论排列的性质.

1.1.1　排列、逆序与对换

1. 排列与逆序

对于 n 个不同的元素，我们可以给它们规定一个次序，并称这规定的次序为标准次序. 例如 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数，一般规定由小到大的次序为标准次序.

定义 1.1.1　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 **n 级排列**.

例如，1234 和 2431 都是 4 级排列，而 45321 是一个 5 级排列.

显然，n 级排列共有 $n!$ 个.

排列 $12\cdots n$ 中元素之间的次序为标准次序，这个排列是标准排列（通常也称为自然排列）；其他的排列的元素之间的次序未必是标准次序.

定义 1.1.2　在 n 个不同元素的任一排列中，当某两个元素的次序与标准次序不同时，就说有一个逆序. 也就是说，在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，如果一个较大的数排在一个较小的数之前，即若 $i_t > i_s$，则称这两个数 i_t, i_s 组成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数，称为这个**排列的逆序数**，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 或 τ.

例如，排列 2431 中，21，43，41，31 是逆序，共有 4 个逆序. 故排列 2431 的逆序数 $\tau = 4$.

根据定义 1.1.2，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_t (t = 1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_t 前面的数

共有 t_i 个，则 i_t 的逆序的个数为 t_i，而该排列中所有数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数．即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

例 1.1.1 计算排列 45321 的逆序数.

解 因为 4 排在首位，故其逆序数为 0；

比 5 大且排在 5 前面的数有 0 个，故其逆序数为 0；

比 3 大且排在 3 前面的数有 2 个，故其逆序数为 2；

比 2 大且排在 2 前面的数有 3 个，故其逆序数为 3；

比 1 大且排在 1 前面的数有 4 个，故其逆序数为 4.

可见，所求排列的逆序数为

$$\tau(45321) = 0 + 0 + 2 + 3 + 4 = 9.$$

定义 1.1.3 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为奇数，则称它为**奇排列**；若排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称它为**偶排列**.

例如，2431 是偶排列，45321 是奇排列；标准排列 $12\cdots n$ 的逆序数是 0，因此是偶排列.

2. 对　换

为研究 n 阶行列式的需要，我们先讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系.

定义 1.1.4 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，将任意两数 i_t 和 i_s 的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列．这种作出新排列的手续称为一次**对换**．将相邻两数对换，称为相邻对换.

例如，对换排列 45321 中 5 和 1 的位置后，得到排列 41325.

经过对换，排列的奇偶性有何变化呢？我们有下面的基本事实.

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

也就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，而偶排列变成奇排列.

证明 先证明相邻对换的情况.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，变为排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$，显然，$a_1 \cdots a_l$；$b_1 \cdots b_m$ 的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 的逆序数改变为

当 $a < b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a > b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

因此，不论是增加 1 还是减少 1，排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性改变.

再证明一般对换的情况.

设排列为 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$，对它作 m 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成排列

$$a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n,$$

总之，经过 $2m+1$（奇数）次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 变成排列

$$a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n,$$

所以，这两个排列的奇偶性改变.

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理 1.1.1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列，因此，结论成立.

1.1.2 n 阶行列式

1. 二阶和三阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前，先回顾中学代数中从解线性方程组而引出的二阶和三阶行列式的定义.

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

以 a_{22} 乘以第一个方程，以 a_{12} 乘以第二个方程，然后将两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似可以求得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了方便记忆 x_1 及 x_2 的表达式，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

式(1.3)称为**二阶行列式**. 其中横写的叫做**行**，竖写的叫做**列**，二阶行列式含有

两行两列.

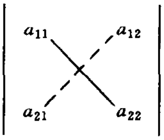

图 1.1

二阶行列式的定义,可用所谓的对角线法则来记忆,参看图 1.1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是这样的两项的代数和:一项是在左上角到右下角的对角线(称为**主对角线**)上的两个数 a_{11} 与 a_{22} 的乘积 $a_{11}a_{22}$,取正号;另一项是在右上角到左下角的对角线(称为**副对角线**)上的两个数 a_{12} 与 a_{21} 的乘积 $a_{12}a_{21}$,取负号.

例如,$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times (-3) = 10.$

根据二阶行列式的定义,式(1.2) 中的分子可分别写成

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

这样,方程组(1.1) 的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

通过消去 x_2 和 x_3,可得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

为了方便记忆,引进**三阶行列式**:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

上述三阶行列式的定义,也可用对角线法则来记忆,参看图 1.2. 图中有三

条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚线看作是平行于副对角线的联线，实线上三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号.

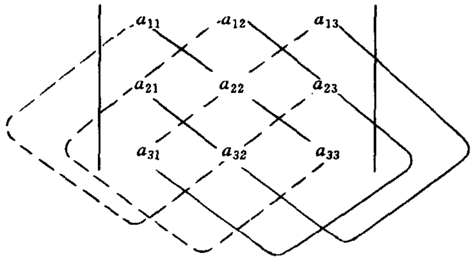

图 1.2

例如，
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times 2\times(-2)+(-1)\times 1\times 4+3\times(-1)\times 1$$
$$-2\times 1\times 1-(-1)\times(-1)\times(-2)-3\times 2\times 4$$
$$=-8-4-3-2+2-24=-39.$$

利用三阶行列式的定义，当 $D\neq 0$ 时就得到方程组(1.4)的解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

我们就以三阶行列式的定义为例来分析研究式(1.5)的结构特点，可以归纳为以下三点：

(1) 三阶行列式是表示一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的三个元素构成的乘积；

(2) 这个代数和的总项数是 1,2,3 构成的排列总数 $3! = 6$;

(3) 每一项的符号与元素的列指标排列的逆序数的奇偶性有关(设元素的行指标排列按标准排列,即逆序数为 0),设 τ 表示元素的列指标排列的逆序数,则每一项乘积的符号由 $(-1)^{\tau}$ 而定. 当 τ 为奇数时,取负号;当 τ 为偶数时,取正号.

因此,三阶行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

其中,$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三级排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

通过对三阶行列式定义的结构特点的分析,我们可以类似地推广到一般情形,于是有下面 n 阶行列式的定义.

2. n 阶行列式

定义 1.1.5 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^{\tau}$,得到 $n!$ 个形如 $(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的项,其中,$j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,τ 为这个排列的逆序数. 所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为 **n 阶行列式**,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中,$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$,这里,数 a_{ij} 称为行列式的元素,$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

定义 1.1.5 通常称为行列式的"排列逆序"定义,它具有以下三个特点:

(1) 由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个，所以展开式共有 $n!$ 项；

(2) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) 每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

需要注意的是，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆.

例 1.1.2 证明行列式(其中非副对角线上的元素全为 0).

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证明 根据 n 阶行列式的定义易得

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\,(n-1)\,\cdots\,2\,1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

上例行列式中，其非副对角线上元素全为 0，此类行列式可以直接求出结果，例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4\,3\,2\,1)} 1\times 2\times 3\times 4 = 24.$$

类似地，非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**，显然，对角行列式的值为主对角线上元素的乘积，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

主对角线以下(上)的元素全为 0 的行列式称为**上(下)三角行列式**，它的值与对角行列式的一样.

例 1.1.3 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考虑不为零的项.

a_{nj_n} 取自第 n 行，但只有 $a_{nn}\neq 0$，故只能取 $j_n=n$；$a_{n-1,j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1,n-1}\neq 0, a_{n-1,n}\neq 0$，由于 a_{nn} 取自第 n 列，故 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列，所以，$j_{n-1}=n-1$；

同理可得，$j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$.

因此，不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素按行指标排起来. 事实上，数的乘法是交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的，n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 利用定理 1.1.1，可以给出 n 阶列式另一种表示法.

定理 1.1.2 阶行列式也定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

证明 按行列式定义有