形式概念分析

XINGSHI GAINIAN FENXI

〔德〕B.甘特尔　R.威尔 著

马　垣　张学东
迟呈英　王丽君　等 译

科学出版社
www.sciencep.com

形式概念分析

辽宁科技大学学术专著、译著出版基金资助出版

形式概念分析

〔德〕B. 甘特尔　R. 威尔 著

马 垣　张学东　迟呈英　王丽君 等　译

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书对形式概念的理论进行了全面系统地论述. 第 0 章介绍了序理论基础, 第 1、2 章分别论述了形式背景与形式概念、概念格的确定与表示, 第 3、4、5、6 章分别研究了部分和因子、概念格的分解、概念格的构造、概念格的性质, 第 7 章论述了形式背景比较和概念测量.

本书是软件工程、数据挖掘及知识发现、类层次设计、视频音频格实例匹配及分类、数字图书馆及文献检索等领域, 及相关学科领域的广大科技工作者和工程技术人员必备的研究及学习用书, 对计算机、自动化及数学等专业的博士生、硕士生及高年级学生也有重要的参考价值.

图字: 01-2005-2285

图书在版编目(CIP)数据

形式概念分析/(德)甘特尔(Ganter, B.)等著; 马垣等译. —北京: 科学出版社, 2007

ISBN 978-7-03-015235-0

I. 形… II. ① 甘… ② 马… III. 数据采集-理论研究 IV. TP274

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 044989 号

责任编辑: 范庆奎 吕 虹 祖翠娥 / 责任校对: 赵燕珍
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 2 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2007 年 2 月第一次印刷 印张: 15
印数: 1—2 500 字数: 282 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)

译 者 序

形式概念理论是20世纪80年代初由德国Wille教授提出的，近十几年来形式概念理论已应用到了很多领域. 仅列举部分具有代表性的应用就有：在数字图书馆及文献检索方面，Neuss和Kent使用概念格进行Internet 上文档元信息的自动分类和分析，Eklund和Martin则展示了概念层次进行Web文档索引和导航的能力，在这方面，还有许多成功的应用系统. 在软件工程方面，Corbett和Burrow提出使用概念格表示建筑早期设计软件支持环境（SEED）中的状态图，使得设计中获得的知识可以重用. 另外，Godin 等人还将概念格应用于类层次(class hierarchy)的设计上，有些专家直接使用格结点实例匹配进行分类. 在数据挖掘及知识发现方面，Deogun，Raghavan，Sever 等指出了关联规则的最大频繁项集与形式概念的紧密联系，并给出了关联规则挖掘的新方法. 实践表明，基于概念格系统的各个领域的应用与研究都将有更好的发展，因此作为很多领域研究工作的新工具——形式概念，就更是人们目前亟需了解的.

本书是国际上关于“形式概念”书籍的第一部中译本.原书对形式概念的基本理论做了详细的介绍，内容涉及序理论、概念格、形式背景、完全同余、封闭子关系、块关系和容差关系、子直接分解、Atlas分解、替代和的理论、张量分解、子直接积的构造、胶合理论、局部兼用、张量构造、半模块性和模块性、半分配性和局部分配性、概念格的维数、背景的自同构、射与结合、概念格的可测性等理论，涵盖了形式概念的所有特性. 全书包括8章，其中第0~2章由张小平和马垣翻译，第 3 章由王旭和张学东翻译，第 4 章由白雪和迟呈英翻译，第5章由杨凯和王丽君翻译，第6章由霍岩和刘阳翻译，第7章由王丽菊和沈文轩翻译. 马垣还参与了第0~2章以外其他各章的翻译，并对全书统一定稿.

原书是一本世界名著，撰写得非常精练，涉及的数学抽象知识非常多,翻译难度很大. 有时为了一个合适的译法反复推敲数十次，以便把译文定得更准确.然而由于译者水平有限，时间紧迫，仍然难免出现词意不当之处，我们真诚希望同行专家和读者朋友对译文中的不当之处不吝赐教.

本书的翻译出版得到了辽宁科技大学学术专著、译著出版基金的资助，我们在此深表感谢.

译 者

2004年11月

前　言

形式概念分析是以数学化的概念和概念层次为基础的应用数学领域，它激发了人们对概念数据分析和知识处理的数学思考.

“概念”的基本观点是由哲学理论中的概念发展而来的，这个观点直到今天仍然起着作用. 例如，它在德国标准 DIN2330 和 DIN2331 中就起了作用. 在 19 世纪数理逻辑出现时期，这个观点在数学中起到了特殊作用. 然而，它后来实际上并没有对数学思想产生影响. 直到 1979 年，人们才重新开始研究这个课题，并且研究得更加深入. 从那以后，形式概念分析获得了广泛的研究，人们迫切地需要一个系统的介绍，但一直没有这样的书.

因此，本书集中讨论了形式概念分析的数学基础，我们可以将其看成是应用格理论的一个分支. 一系列例子用于展示数学定义和结果的效用；特别地，用于表明形式概念分析是如何被用于数据背景的概念展开. 这些例子在数据分析中并不起到事例学习的作用. 我们计划单独写一本书来全面介绍概念数据和知识处理的方法. 形式概念分析一般基础也将单独被研究.

当检查人类的概念思想的时候，使用形式概念分析可能是完美的. 然而，这会是数学方法的应用和各个科学领域专家的课题，如心理学. 形容词“formal”具有一种界定作用：我们正在进行的是数学领域的工作，对这种工作的理解力和意义来自它与“概念”的根基稳固观点的联系，但是这种工作并不努力去解释概念思想.

形式概念分析的数学基础分 7 章来讨论. 在后面的章节中使用的数学序理论和格理论的基本原理我们会以介绍的方式把它们编辑在第 0 章. 然而，在第 0 章的所有难理解的符号和结论都将在后面重新介绍. 懂得数学中格理论的读者可以略过这章.

第 1 章描述了形式化的基本步骤:数据表示的基本形式(“交叉表”)我们从数学上给予了定义(“形式背景”). 随后说明了这样一个数据背景的形式概念. 一个背景所有这样概念的全体按照它们的层次关系能够理解成一种数学结构(“概念格”). 允许更加复杂的数据类型也是可能的(“多值背景”). 然后通过使用称为“概念换算”的理解方法，这些复杂的数据类型被化简成基本类型.

第 2 章讨论了如何在一个易读的图中确定和表示一个数据背景所有概念的问题. 另外，也研究了属性之间的蕴含和依赖. 第 3 章提供了用于概念格的

一种结构理论的基本概念, 即部分和因子结构以及容差关系. 在每个情况下, 都研究了在背景中直接描述它们的程度.

为了凭借分解和构造的方法来描述更加复杂的概念格, 第 4 章和第 5 章使用了这些数学工具. 因此, 概念格能够被分解(有可能重叠), 但使用格或背景的直接积来作为分解的原则也是可能的. 进一步的方法是替代. 根据相同的原则来构造背景和概念格是可能的. 作为另外一个构造原则, 我们将描述兼用概念格的一部分的方法.

在数学的格理论中所论述的结构性质, 如分配律及其推广或者维数的概念, 在形式概念分析中也起着作用. 这将在第 6 章中给予介绍. 最后, 第 7 章研究了结构对比映射, 检查了各种映射. 我们还特别注意研究了出现在概念、换算背景中标尺刻度.

由于空间所限, 我们只是简明地介绍一下思想. 因此, 在每章的末尾我们都尽量给出下一步结果的完整参考和各自的文献. 然而, 我们只考虑与本书的主题密切相关的文献, 即与形式概念分析的数学基础密切相关的文献. 参考文献也作为作者的索引使用.

本书的起源是借助于达姆施塔特技术大学的 “Forschungsgruppe Begriffsanalyse” (概念分析研究组)的无数次的讲座和活动. 很难详细地说出哪种支持应归功于谁. 因此, 在这里我们只能向对本书做出贡献的人们表示感谢.

德文版问世两年后, 英文版的书也已经出版了. 在英文版的内容中, 只有很少的改动. 尽管在该领域中仍然有很多工作正在积极进行, 但是形式概念分析的数学基础在过去的几年中是稳定不变的.

作者对于在翻译本书期间 Cornelia Franzke 女士给予的帮助表示由衷的感谢. 作者也要对 K.A.Baker, P.Eklund, R.J.Cole, M.F.Janowitz 和 D.Petroff 所做的仔细认真的校对工作表示感谢.

目　录

第 0 章　序理论基础

形式概念分析是基于数学的序理论的, 特别是基于关于完全格理论. 然而, 我们并不要求读者熟悉这些理论. 在本章, 我们将对一些相关的数学基础知识作回顾. 然而, 由于篇幅所限, 我们只能对最重要的序理论方面知识作回顾. 为了便于读者参考, 在本章最后一节, 我们给出了相关参考书目. 通常, 我们认为读者有一定的数学经验, 对用到的数学术语, 特别是集合理论的术语, 将不再做进一步的解释.

在第一节, 我们介绍了序集, 在第二节, 介绍了完全格. 这两节是后续章节的基础. 另外, 第三节介绍了封闭系统, 第四节关于伽罗瓦 (Galois) 连接部分读者暂时可以跳过. 它们当中包含的大部分内容将在后面换了一个名字后再次被介绍. 本章的后半部分说明了形式概念分析的基本概念是如何起源于序和格理论的. 在这种关系中, 在很多方面我们都可以推导出由 Garrett Birkhoff 提出的"经典"表示形式.

0.1　半　序　集

定义 1　集合 M 与 N 之间的二元关系 R 是有序二元组 (m,n) 的集合, 其中 $m\in M$, $n\in N$, 即 $R\subseteq M\times N$, 这里的 $\times$ 是笛卡儿积, $(m,n)\in R$, 我们也常写作 mRn. 如果 $M=N$, 则我们说 R 是 M 上的二元关系. 我们还用 R^{-1} 表示 R 的逆关系, 即

$$nR^{-1}m \Leftrightarrow mRn. \qquad \diamond$$

定义 2　集合 M 上的二元关系 R 称为一个偏序关系 (简称偏序), 如果对所有 $x,y,z\in M$ 都有

1) xRx;　(自反)

2) xRy 和 $x\neq y\Rightarrow$ 不是 yRx;　(反对称)

3) xRy 和 $yRz\Rightarrow xRz$.　(传递)

偏序关系 R 常用 $\leqslant$ 来表示 (R^{-1} 则常用 $\geqslant$ 表示). 当 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$ 时, 我们还写作 $x<y$. 一个集合 M 及其上的序 $\leqslant$ 形成的有序二元组 $(M,\leqslant)$ 称为半序集.

$\diamond$

(1) 设集合 M 是所有实数的集合 $\mathbb{R}$, 若其上的偏序是通常的 $\leqslant$ 关系, 则 $(\mathbb{R},\leqslant)$ 是一个半序集.

(2) 设集合 M 是 $\mathbb{R}^n$, 若其上的偏序关系是 $((x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant(y_1,y_2,\cdots,y_n))$ 当且仅当所有 $i=1,2,\cdots,n$ 都有 $x_i\leqslant y_i$, 则 $(\mathbb{R}^n,\leqslant)$ 也是一个半序集.

(3) 设集合 M 是全体自然数的集合 $\mathbb{N}$, 若其上的偏序关系是 $n_1\leqslant n_2$, 当且仅当 n_1 整除 n_2, 则 $(\mathbb{N},\leqslant)$ 也是一个半序集.

(4) 设集合 M 是某个集合 X 的幂集 $\mathfrak{P}(X)$, 若其上偏序关系是 $S_1\leqslant S_2$, 当且仅当 $S_1\subseteq S_2$, 则 $(\mathfrak{P}(X),\leqslant)$ 也是一个半序集.

(5) 设 M 是任一个集合, 若其上的偏序是普通的相等关系, 则 $(M,=)$ 也是一个半序集, 当然这是一个平凡的半序集.

定义 3 a 称为 b 的下近邻, 当 $a<b$, 且没有 c 满足 $a<c<b$. 这时我们也称 b 是 a 的上近邻, 并且记作 $a\prec b$. ◇

每个有限的半序集 $(M,\leqslant)$ 都可用一个Hasse 图来表示, 这里 M 的元素是Hasse 图中的点, 用小圆圈代表. 如果 $x,y\in M$ 且 $x\prec y$, 则对应 y 的圆圈应在对应 x 的圆圈之上, 并用一条线段把这两点连起来. 图 0.1 给出了 4 个及 4 个以下元素的半序集的所有可能的 Hasse 图.

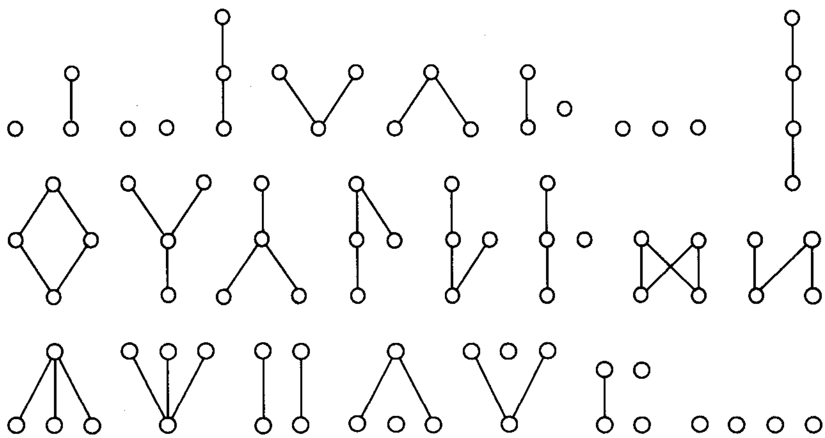
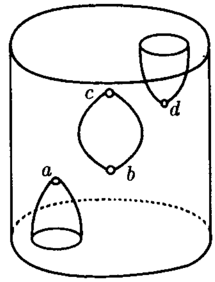


图 0.1 4 个及 4 个以下元素的半序集合的所有可能的 Hasse 图

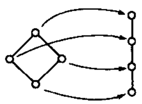
定义 4 一个半序集 $(M,\leqslant)$ 中的两个元素 x,y, 如果 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$ 之一成立时, 称 x,y 是可比的, 否则称为是不可比的. 如果 $(M,\leqslant)$ 的一个子集中的任两元素都是可比的, 则称这个子集为链. 如果一个子集中的任两元素都是不可比的, 则称这个子集为非链. 有限半序集 $(M,\leqslant)$ 的宽度定义为 $(M,\leqslant)$ 中非链大小的最大值, 一般半序集 $(M,\leqslant)$ 的宽度定义为 $(M,\leqslant)$ 中非链大小的上确界. 有限半序集 $(M,\leqslant)$ 的长度定义为 $(M,\leqslant)$ 中链大小的最大值减 1. 一般半序集 $(M,\leqslant)$ 的长度定义为 $(M,\leqslant)$ 中链大小的上确界减 1. ◇

定义 5 若 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集, 而且 $a,b,c,d\in M$, 满足 $b\leqslant c$, 则定义

区间 $[b,c]:=\{x\in M\mid b\leqslant x\leqslant c\}$, 集合 $(a]:=\{x\in M\mid x\leqslant a\}$ 称为主理想, 集合 $[d):=\{x\in M\mid x\geqslant a\}$ 称为主过滤. 由此 $a\prec b$ 等价于 $a<b$ 且 $[a,b]=\{a,b\}$. ◇



定义 6 两个半序集 $(M,\leqslant)$ 及 $(N,\leqslant)$ 之间的映射 $\varphi: M\to N$ 称为保序的, 当对所有的 $x,y\in M$ 都有 $x\leqslant y\Rightarrow\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$. 如果 φ 还满足 $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)\Rightarrow x\leqslant y$, 则称 φ 为序嵌入的, 这时 φ 必然是单射. 一个双射的序嵌入, 称为 (序) 同构. ◇


双射的保序映射
不一定是同构

特别注意: 只有双射的序嵌入才能保证是同构, 而双射的保序映射不一定是同构要说明一个保序映射是同构, 必须说明其逆映射存在, 而且也是保序的.

定义 7 两个半序集 $(M_1,\leqslant)$ 及 $(M_2,\leqslant)$ 的直接乘积 (简称直接积) 定义为半序集 $(M_1\times M_2,\leqslant)$, 这里 $M_1\times M_2$ 中的 $\leqslant$ 是 $(x_1,x_2)\leqslant(y_1,y_2):\Leftrightarrow x_1\leqslant y_1$ 且 $x_2\leqslant y_2$, 还可以将这个定义推广到任意多个半序集: 如果 T 是一个索引集, 而且 $(M_t,\leqslant)$ 是半序集 $(t\in T)$, 则

$$\bigtimes_{t\in T}(M_t,\leqslant):=(\bigtimes_{t\in T}M_t,\leqslant),$$

这里 $\bigtimes_{t\in T}M_t$ 中的 $\leqslant$ 是

$$(x_t)_{t\in T}\leqslant(y_t)_{t\in T}:\Leftrightarrow(\forall t\in T)(x_t\leqslant y_t).$$ ◇

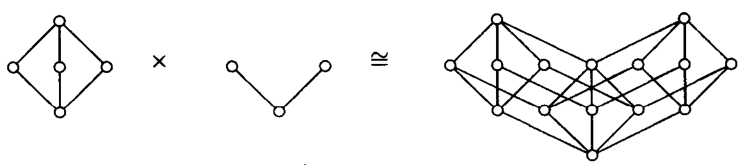


图 0.2 两个半序集的直积实例

定义 8 为了定义两个半序集的"基本和"(或称 "不相交并"), 我们首先引入符号 $\dot{M}_t=\{t\}\times M_t$. 于是 $\dot{M}_1$ 与 $\dot{M}_2$ 就分别是 M_1 与 M_2 的拷贝, 而且 M_1 与 M_2 无公共元素. 我们定义

$$(M_1,\leqslant)+(M_2,\leqslant):=(\dot{M}_1\cup\dot{M}_2,\leqslant),$$

这里的偏序关系 $\leqslant$ 是

$$(s,a)\leqslant(t,b):\Leftrightarrow s=t\ \text{且}\ a\leqslant b.$$ ◇

这个定义可以很容易地推广到任意多个半序集“基本和”的情况.

半序集的对偶原理: 一个偏序关系 $\leqslant$ 的逆关系 $\geqslant$ 仍是偏序关系，称 $\geqslant$ 为 $\leqslant$ 的对偶序. 半序集 $(M,\leqslant)$ 的对偶半序集记作 $(M,\leqslant)^d$, 它是半序集 $(M,\geqslant)$. $(M,\geqslant)$ 的 Hasse 图可由 $(M,\leqslant)$ 的 Hasse 图做水平反射而得到. 如果 $(M,\leqslant)\cong(N,\leqslant)^d$, 则称为这两个序为对偶同构.

一个命题 A 如果除了纯逻辑成分外只含 $\leqslant$, 则称序推理命题. 将一个序推理命题 A 中的 $\leqslant$ 全换为 $\geqslant$ 就得到 A 的对偶序推理命题 A^d. A 在一个半序集中成立, 当且仅当 A^d 在对偶半序集中成立. 这个对偶性原理可以用来简化一些定义及证明, 即对于互相对偶的两个命题, 只证明其中一个即可, 另一个根据对偶原理也成立.

定义 9 令 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集, A 是 M 的子集, M 中的元素 s 满足 $\forall a\in A$ 都有 $s\leqslant a$, 则称 s 是 A 的一个下界. 对偶地, 若 M 中的元素 s 满足 $\forall a\in A$ 都有 $s\geqslant a$, 则称 s 是 A 的一个上界. 如果 A 的所有下界组成的集合中有最大元素, 则称这个元素为 A 的下确界, 记 $\inf A$, 或 $\bigwedge A$. 对偶地, 上界集合的最小元素称为上确界, 记作 $\sup A$ 或 $\bigvee A$. 如果 $A=\{x,y\}$, 则用 $x\bigwedge y$ 来表示 $\inf A$, 用 $x\bigvee y$ 来表示 $\sup A$. 下确界和上确界经常也称为交和并. ◇

0.2 完 全 格

定义 10 一个半序集 $V:=(V,\leqslant)$, 如果 V 中任两个元素 x,y 的上确界 $x\bigvee y$ 及下确界 $x\bigwedge y$ 都存在, 则称 V 是一个格. 如果对 V 的任何子集 X, 上确界 $\bigvee X$ 及下确界 $\bigwedge X$ 都存在, 则称 V 是完全格. 每个完全格 V 都存在最大元素 $\bigvee V$, 称其为单位元, 记作 1_V. 对偶地, 还有最小元素 $\bigwedge V$ 称其为零元, 记作 0_V. ◇

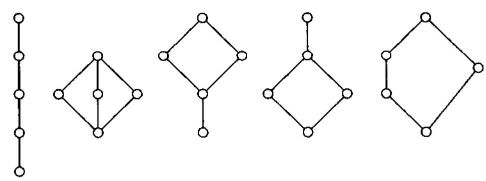


图 0.3 5 个元素的格图

由完全格的定义我们知: 任何一个子集 X 都有上确界及下确界, 于是对于 $X=\varnothing$, 也应该有上确界及下确界. 然而, 所有 V 中的元素都是 X 的上界, 所以 $\bigvee\varnothing=0_V$.

同理, 所有 V 中的元素也都是它的下界, 所以 $\varnothing=1_V$. 这样, $0_V\in V,1_V\in V$, 所以 V 不空, 由此我们知每个完全格 $V\neq\varnothing$. 另外还易看出每个非空的有限格都是完全格.

如果对 V 中的元素都定义了 $\bigwedge$ 运算及 $\bigvee$ 运算, 则我们也可以由这些运算来定

义序, 即定义

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x = x \bigwedge y \Leftrightarrow y = x \bigvee y.$$

如果 T 是一个索引集, 且 $X := \{x_t \mid t \in T\}$, 则定义 X 的下确界 $\bigwedge X$ 为 $\bigwedge_{t\in T} x_t$, 上确界 $\bigvee X$ 为 $\bigvee_{t\in T} x_t$.

注意到 $\bigwedge$ 运算及 $\bigvee$ 运算是满足结合律的, 即有

$$x \bigwedge (y \bigwedge z) = (x \bigwedge y) \bigwedge z \text{ 及 } x \bigvee (y \bigvee z) = (x \bigvee y) \bigvee z,$$

还可知对于 V 的子集的集合 $\{X_t \mid t \in T\}$ 有 $\bigvee\limits_{t\in T}(\bigvee X_t) = \bigvee(\bigcup\limits_{t\in T} X_t)$, 对偶地还有 $\bigwedge\limits_{t\in T}(\bigwedge X_t) = \bigwedge(\bigcup\limits_{t\in T} X_t)$ 成立.

根据对偶性原理, 如果 $(V, \leqslant)$ 是格, 则 $(V, \geqslant)$ 也是格. 另外在一个序命题中用符号 $\geqslant, \wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee, 1_V, 0_V$ 等来代替符号 $\leqslant, \vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge, 0_V, 1_V$ 等, 则命题仍然成立.

命题 1 若对于一个半序集的每个子集的下确界都存在, 则它是完全格.

证明 令 X 是半序集的任一个子集, 因为已设它的下确界存在, 所以只要证明 X 的上确界一定存在即可以了. 设 X 的所有上界组成的集合是 S, 由于 S 也是半序集的一个子集, 所以它也应该有下确界 (即使 S 是空集也成立), 记这个下确界为 s. 因为 X 中的每个元素都是 S 的下界, 所以 X 中的每个元素都 $\leqslant s$, 于是 s 是 X 的上界, 而且显然是上确界. □

格的实例: (1) 设 M 是一个集合, M 的幂集 $\mathfrak{P}(M)$ 按 $\subseteq$ 关系定义一个偏序, 则 $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ 是完全格, 这时格的上确界运算及下确界运算是集合的并与交运算.

(2) 每个实数的闭区间 $[a, b]$, 将它的自然顺序作为偏序也形成一个完全格 $([a, b], \leqslant)$, 它具有普通的上确界与下确界, 各自作为格运算. 另外, 半序集 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 也是一个格, 但不是完全格, 因为它不存在最大和最小元素.

我们将在 0.3 节中, 从数学的角度, 给出更深一层的完全格的其他例子.

定义 11 对于完全格 V 的一个元素 v, 我们定义

$$v_* := \bigvee \{x \in V \mid x < v\}, \qquad v^* := \bigwedge \{x \in V \mid v < x\}.$$

如果 $v \neq v_*$, 即 v 不是严格小于它的那些元素的上确界, 则称 v 是上确界不可约的; 如果 $v \neq v^*$, 即 v 不是严格大于它的那些元素的下确界, 则称 v 是下确界不可约的. ◇

用 $J(V)$ 表示所有下确界不可约元素的集合, 用 $M(V)$ 表示所有上确界不可约元素的集合.

如果集合 V 的每个元素都是 $X(X\subseteq V)$ 的某个子集的上确界，则 X 称为在 V 中是上确界稠密的. 对偶地，如果集合 V 的每个元素都是 $X(X\subseteq V)$ 的某个子集的下确界，则 X 称为在 V 中是下确界稠密的. ◇

命题 2 有限格的一个元素 v 是上确界不可约的，当且仅当它有且仅有一个下近邻. v 是下确界不可约的，当且仅当它有且仅有一个上近邻. 上确界稠密子集包含了所有上确界不可约元素. 下确界稠密子集包含了所有下确界不可约元素. 反之，在一个有限格中，集合 $J(V)$ 是上确界稠密的，$M(V)$ 是下确界稠密的.

证明 v 是上确界不可约的，当且仅当 $v\neq v_*$，这显然与 v_* 是小于 v 的最大元素等价，这样 v_* 就是 v 的唯一的下近邻. 对偶地 v 是下确界不可约的，则必有唯一的上近邻.

由于上确界不可约的元素不是任何不包含它的集合的上确界，所以上确界稠密子集中必然包含它们. 对偶地下确界不可约元素也一定被包含在下确界稠密子集中.

因为 $J(V)$ 以外的每个元素 v 都是比它严格较小元素的上界. 如果比它严格较小的元素全属于 $J(V)$，则它是 $J(V)$ 一个子集的上界. 若这些严格较小元素中还有不属于 $J(V)$ 的，那么这些元素还是另一些严格较小元素的上界，则 v 也还是这些较小元素的上界. 如果这些元素全属于 $J(V)$，则 v 也是 $J(V)$ 中一个子集的上界. 如果这些元素还有不属于 $J(V)$ 的，则再重复上面的分析. 由于 V 是有限的，所以最终总会得 v 是 $J(V)$ 中某个子集的上界. 所以 $J(V)$ 是上确界稠密的. 根据对偶，$M(V)$ 是下确界稠密的. □

容易给出一些既不包含上确界不可约元素又不包含下确界不可约元素的完全格的例子. 例如实数区间 [0, 1]，按自然序，就是一个既无上确界不可约元素又无下确界不可约元素的完全格.

0_V 的上近邻 (如果存在的话) 显然一定是上确界不可约的，因为它们都是有且仅有唯一的下近邻.

1_V 的下近邻 (如果存在的话) 显然一定是下确界不可约的，因为它们都是有且仅有唯一的上近邻.

0_V 的上近邻称为格的原子，若在一个完全格中的每个元素都是原子的上确界，则称这个格是原子的.

定义 12 如果一个完全格 V 的子集 U，对上确界运算封闭，即 U 满足

$$T\subseteq U\Rightarrow\bigvee T\in U,$$

则称 U 是 V 的上确界子半格. 对偶地，若 U 对下确界运算封闭，即 U 满足 $T\subseteq U\Rightarrow\bigwedge T\in U$，则称 U 是 V 的下确界子半格. 若 U 对上确界，下确界运算都封闭，则称 U 是完全子格. ◇

定义 13 设 V, W 是两个完全格，一个映射 $\varphi:V\to W$ 称为是保上确界的，

如果对 V 的任一个子集 X 都有

$$\varphi(\bigvee X) = \bigvee \varphi(X),$$

这里 $\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$, 保上确界映射也称为 "$\bigvee$ 射". 对偶地, 如果对 V 的任一个子集 X 都有 $\varphi(\bigwedge X) = \bigwedge \varphi(X)$, 则称为保下确界映射也称为 "$\bigwedge$ 射". 如果映射 φ 即保上确界, 又保下确界, 则称 φ 是完全格同态, 简称完全同态. ◇

每一个保上确界映射, 特别是每一个完全同态都一定是保序映射. 反之, 任何一个完全格之间的序同构就必然是一个格的同构, 即一个双射的完全同态.

0.3 闭包算子

定义 14 集合 G 上的闭包系统是在交运算下封闭的 G 的子集的集合. 形式化地: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(G)$ 是一个闭包系统, 如果满足: $G \in \mathfrak{A}$ 并且 $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \cap\mathfrak{X} \in \mathfrak{A}$, G 上的闭包算子 φ 是一个对每个 $X \subseteq G$ 赋予一个闭包 $\varphi X \subseteq G$ 的映射, 这个映射应满足:

1) $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi X \subseteq \varphi Y$ (单调性)

2) $X \subseteq \varphi X$ (扩展性)

3) $\varphi\varphi X = \varphi X$ (等幂性) ◇

闭包系统与闭包运算是密切相关的. 如下面定理所示:

定理 1 如果 $\mathfrak{A}$ 是 G 上的一个闭包系统, 那么

$$\varphi_{\mathfrak{A}} X := \cap\{A \in \mathfrak{A} | X \subset A\}$$

定义了一个 G 上的闭包算子. 反之闭包算子 φ 的所有象的集合 $\mathfrak{A}_\varphi := \{\varphi X | X \subseteq G\}$ 定是一个闭包系统.

证明 (1) 先证 $\varphi_{\mathfrak{A}}$ 是闭包算子.

① 若 $X \subseteq Y$, 则 $A \supseteq Y$ 就必有 $A \supseteq X$, 所以 $\{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} \supseteq \{A \in \mathfrak{A} \mid Y \subseteq A\}$, 所以 $\cap\{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} \subseteq \cap\{A \in \mathfrak{A} \mid Y \subseteq A\}$, 即 $\varphi_{\mathfrak{A}} X \subseteq \varphi_{\mathfrak{A}} Y$.

② $X \subseteq \cap\{A \in \mathfrak{A} | X \subseteq A\} = \varphi_{\mathfrak{A}} X$ 平凡地成立.

③ 因 $\varphi_{\mathfrak{A}}\varphi_{\mathfrak{A}} X = \cap\{A \in \mathfrak{A} \mid \varphi_{\mathfrak{A}} X \subseteq A\}$, $\varphi_{\mathfrak{A}} X = \cap\{A \in \mathfrak{A} | X \subseteq A\}$, 而 $\mathfrak{A}$ 中每个满足 $X \subseteq A_0$ 的 A_0. 显然都是 $\{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\}$ 中的元素, 所以 $\varphi_{\mathfrak{A}} X = \cap\{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} \subseteq A_0$. 反之 ,$\mathfrak{A}$ 中每个满足 $\varphi_{\mathfrak{A}} X \subseteq A_0$ 的 A_0, 由于 $X \subseteq \varphi_{\mathfrak{A}} X$, 所以也都有 $X \subseteq A_0$, 所以 $\{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} = \{A \in \mathfrak{A} \mid \varphi_{\mathfrak{A}} X \subseteq A\}$, 所以 $\varphi_{\mathfrak{A}} X = \varphi_{\mathfrak{A}}\varphi_{\mathfrak{A}} X$.

(2) 然后证 $\mathfrak{A}_\varphi$ 是闭包系统.

设 $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}_\varphi$, 首先由扩展性知 $\cap\mathfrak{X} \subseteq \varphi(\cap\mathfrak{X})$, 其次对任一个 $X \in \mathfrak{X}$, 有 $\varphi(\cap\mathfrak{X}) \subseteq \varphi X$, 又由于 $X \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}_\varphi$, 所以 $X \in \mathfrak{A}_\varphi$, 所以存在着 Y, 使 $X = \varphi Y$, 于是 $\varphi X =$

$\varphi\varphi Y = \varphi Y = X$. 将 $\varphi X = X$ 代入①得 $\varphi(\cap\mathfrak{X}) \subseteq X$, 由于 X 是 $\mathfrak{X}$ 中任意一个元素, 所以 $\varphi(\cap\mathfrak{X}) \subseteq \cap\mathfrak{X}$, 这样 $\cap\mathfrak{X} = \varphi(\cap\chi)$. 然而 $\cap\chi \subseteq G$, 所以 $\varphi(\cap\mathfrak{X}) \in \mathfrak{A}_\varphi$ 所以 $\varphi(\cap\mathfrak{X}) \in G$, 于是 $\cap\mathfrak{X} \in \mathfrak{A}_\varphi$.

(3) 再证 $\varphi_{\mathfrak{A}_\varphi} = \varphi$.

对于 $A \in \mathfrak{A}_\varphi$, 必有 $A = \varphi Y$, 于是 $X \subseteq A \Leftrightarrow \varphi X \subseteq \varphi A \Leftrightarrow \varphi X \subseteq \varphi\varphi Y \Leftrightarrow \varphi X \subseteq \varphi Y \Leftrightarrow \varphi X \subseteq A$, 所以

$$\varphi_{\mathfrak{A}_\varphi} X = \cap(A \in \mathfrak{A}_\varphi | X \subseteq A) = \cap\{A \in \mathfrak{A}_\varphi \mid \varphi X \subseteq A\} = \varphi X,$$

因为 X 是任意的, 所以 $\varphi_{\mathfrak{A}_\varphi} = \varphi$.

(4) 最后证 $\mathfrak{A}_{\varphi_\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$.

对于 $A \in \mathfrak{A}_\varphi, X \subseteq A$ 等价于 $\varphi X \subseteq A$. 由于 $\varphi X \in \mathfrak{A}_\varphi$, 所以

$$\varphi\mathfrak{A}_\varphi X = \cap\{A \in \mathfrak{A}_\varphi \mid X \subseteq A\} = \cap\{A \in \mathfrak{A}_\varphi | \varphi X \subseteq A\} = \varphi X. \qquad \square$$

每个闭包系统 U 都能被理解为是一个闭包算子的所有象的集合, 而且每个象都是闭包.

命题 3　如果 $\mathfrak{A}$ 是一个闭包系统, 则 $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ 是一个完全格, 其中任何 $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ 的上确界为 $\bigvee \mathfrak{X} = \varphi_\mathfrak{A} \cup \mathfrak{X}$, 下确界为 $\bigwedge \mathfrak{X} = \cap\mathfrak{X}$. 反之每一个完全格都与一个由闭包系统的所有闭包形成的格同构.

证明　因为 $\mathfrak{X}$ 中每个元素 X 都有 $\cap\mathfrak{X} \subseteq X$, 所以 $\cap\mathfrak{X}$ 是 $\mathfrak{X}$ 的下界. 另外若 Y 是 $\mathfrak{X}$ 的一个下界, 则 Y 是 χ 中每个元素 X 的子集, 所以对所有的 $a \in Y$, 都有 $a \in \cap\mathfrak{X}$, 所以 $\cap\mathfrak{X} \supseteq Y$, 所以 $\cap\mathfrak{X}$ 是下确界.

考虑集合 $\{A \in \mathfrak{A} \mid \cup\mathfrak{X} \subseteq A\}$, 显然这是 $\mathfrak{A}$ 中 χ 的上界的集合, 这样 $\cap\{A \in \mathfrak{A} \mid \cup\mathfrak{X} \subseteq A\}$ 将是 $\mathfrak{X}$ 的上界中最小的, 所以 $\varphi_\mathfrak{A} \cup\chi = \cap\{A \in \mathfrak{A} \mid \cup\mathfrak{X} \subseteq A\}$ 是 $\mathfrak{X}$ 的上确界. 反之, 若 $(V, \leqslant)$ 是一个完全格, 则 $\{(x] \mid x \in V\}$ 一定是一个闭包系统, 因为它的任一个子集 T 都有 $\bigcap\limits_{y\in T}(y] = (\bigwedge T]$. 而 $\bigwedge T$ 一定属于 V(V 是完全格), 所以 $(\bigwedge T]$ 一定属于 $\{(x] \mid x \in V\}$, 所以 $\{(x] \mid x \in V\}$ 是闭包系统. $\square$

然而, 集合族 $\{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(G) | (\mathfrak{A}, \subseteq)$ 是完全格$\}$不一定是闭包系统, 确切地说这个集合族是某个只满足单调性及等幂性算子的象的集合.

例如有许多数学结构的子结构都是闭包系统. 很明显幂集是一个闭包系统.

(1) 子空间

任何向量空间 V 的所有子空间形成的系统 $\mathfrak{U}(V)$ 是一个闭包系统. 完全格 $(\mathfrak{U}(V), \subseteq)$ 叫做 V 的子空间格. 在这个格中 $U_1 \bigvee U_2 = U_1 + U_2$, 而且更一般的 $\bigvee \mathfrak{X} = \{u_1 + \cdots + u_n |$ 存在 $U_1, \cdots, U_n \in \mathfrak{X}, u_i \in U_i, i = 1, \cdots, n\}$.

(2) 子群