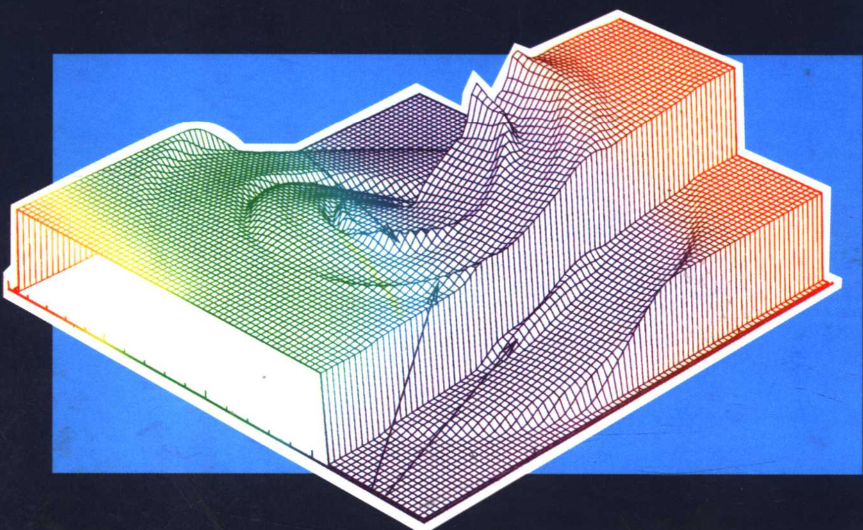
# Numerical Computation of Stress Waves in Solids

# 固体应力波的数值解法

（美） Xiao Lin 著

杨云川 沈培辉 乔相信 王晓鸣 译



国防工业出版社
National Defense Industry Press

**著作权合同登记　图字：军－2006－054号**

**图书在版编目(CIP)数据**

固体应力波的数值解法/(美)林晓著；杨云川等译．北京：国防工业出版社，2008.1

书名原文：Numerical Compatation of Stress Waves in Solids

ISBN 978-7-118-04807-0

Ⅰ．固…　Ⅱ．①林…②杨…　Ⅲ．应力波－数值计算　Ⅳ．0347.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第118650号

Translation from the English language edition: Numerical Computation of Stress Waves in Solids by Xiao Lin

ISBN 3-05-501752-0



※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本710×960　1/16　印张17　字数289千字

2008年1月第1版第1次印刷　印数1—3000册　定价42.00元



国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

# 他　序

与人们熟知的固体静力学问题不同，处理冲击载荷下的固体动力学问题时，通常必须计及两种最基本的动力学效应，即惯性效应和应变率效应．具体地说，一方面在控制方程组的动量守恒方程中应包含微元体惯性项，另一方面在控制方程组的材料本构方程中应计及应变率效应．前者促进了冲击载荷下结构动力学的发展，实质上可归结为各种形式的、精确的或简化的应力波传播的研究；而后者则促进了冲击载荷下材料动力学的发展，导致各种类型的应变率相关的（率型）本构关系和失效准则的研究．

问题的复杂性还在于这两种动力学效应常常是耦合在一起的．一方面，波传播特性强烈地依赖于材料的动态本构特性．事实上，波传播的控制方程组必定包含材料的本构方程，波传播解是以已知材料本构关系为前提的．如果说动量、质量和能量守恒方程体现了各类力学问题共同遵循的共性方面，那么材料本构关系则体现了各类力学问题相互区别的特性方面，不同的波传播特性正是不同材料本构关系的反映．另一方面，材料在高应变率下的率相关本构特性的试验研究又离不开波传播分析，包括要考虑试验装置中和试件中的波传播．简单地套用准静态试验方法或对波传播的无知，将会导致对材料动态本构关系的误知．

从这个意义上来说，固体中应力波传播的研究不仅是结构冲击动力学发展之迫切所需，也是材料冲击动力学发展之迫切所需．换句话说，我们不仅需要在材料本构关系已知时，研究在给定初始—边界条件下的固体中应力波的传播（即所谓的正问题），还需要研究当材料本构关系已知时、由实测的应力波信息来分析未知的初边载荷条件（即所谓的第一类反问题），或者研究当初边载荷条件已知时、由实测的应力波信息来分析未知的材料本构关系（即所谓的第二类反问

题). 总之,不论解固体动力学的正问题还是反问题,都离不开应力波传播的研究.

然而,由于应力波问题在物理上和数学上的双重难度,除了一维线性问题等简单情况外,一般难以求得解析解;大量较复杂的理论问题和实际问题惟有采用数值计算来求解. 力学大师钱学森先生早就指出过:"今日的力学要充分利用计算机和现代计算技术去回答一切宏观的实际科学技术问题". 这对于复杂的固体中应力波的研究更具有十分重要的指导意义. 当然这丝毫不意味着,有了商用软件,应力波传播问题就都能解了. 在计算机技术获得高度发展的今天,如何正确建立问题的力学(物理)模型和如何采用相应的科学计算方法,就更加突显其重要性.

林晓教授根据他和合作者在这一领域长期研究的经验和积累所写成的《固体中应力波的数值计算》一书,正是适应和反映了这一发展趋势所取得的成果.

与可压缩无黏流体中的波传播相比,固体中的波传播包含更多的复杂特性. 如何针对这些特性进行数值计算,是本书值得赞赏的特点,这尤其反映在以下几方面:

(1) 在流体动力学中对波传播进行分析时,控制方程组中的本构关系只包含反映体积变化规律的标量方程(状态方程),而在固体动力学中对波传播进行分析时,其本构关系是张量方程,包括反映体积变形规律的球量关系和反映形状变化规律的偏量关系. 与之相对应,固体中存在同时以不同波速传播的体波(膨胀波、无旋波)和畸变波(剪切波、等容波),以及在一定条件下会出现压缩波(纵波)与扭转波(横波)相耦合的、以快波和慢波形式同时传播的复合应力波等. 对于各向异性材料,这些问题会变得更复杂.

(2) 固体发生弹塑性变形时,由于其弹性变形是可逆的而塑性变形是不可逆的,于是在同一固体中常常传播着分别遵循不同控制方程组的弹塑性加载波和弹性卸载波,并相互作用. 相应地,在时空坐标系中需要确定事先未知的弹性—塑性边界(加载—卸载边界)的传播轨迹. 如何确定弹性—塑性边界(加载—卸载边界),不论在理论上还是数值计算上,都成为能否正确解题的关键所在.

(3) 在冲击载荷的高应变率条件下,固体材料常常表现出显著地依赖于应变率的本构响应,需要用各种率相关本构关系来描述,并视具体材料的不同,可分别表现为黏弹性、弹—黏塑性、超弹—黏塑性等. 与之相对应,需要采用不同的数值计算技术来分别研究黏弹性波、弹—黏塑性波和超弹—黏塑性波等. 此

外,针对形变与相变相耦合的特殊情况,还需要研究相变波以及记忆合金中伪弹性波的传播等.

(4) 在固体动态断裂的研究中,应力波与裂纹的相互作用是一个前沿性的研究热点,涉及到裂纹尖端(奇异点)处应力波的相互作用、应力波作用下裂纹动态应力强度因子的确定、裂纹的动态起裂和扩展等. 这给数值计算提出了崭新的挑战.

本书虽然以二维有限差分法为主展开讨论,但也以相当篇幅介绍了特征线法和边界元法,并附有部分以 FORTRAN 语言编写的程序,对初学者尤为方便.

我(王礼立)记得第一次见到林晓是 1994 年在英国牛津举行的 EURO DY-MAT 94 国际会议上,他和 Ballmann 教授共同发展的题为"应力波载荷下复合材料裂尖弹塑性变形的数值建模"的报告当时就给我留下了深刻的印象,周风华则于 2004 年在美国饶有兴趣地发现并浏览过此书的英文原版. 十几年之后,我和周风华教授共同先有机会通读了由杨云川教授等人翻译的此书的中文版,为一位中国人能在这一领域取得如此的成绩感到兴奋. 可以说,一本以固体中应力波数值计算为主题的书,能像本书这样论及上述那么多的内容,是不多见的.

随着科技和生产的不断发展,固体中应力波传播的研究面临着许多新的挑战,有很多问题等待人们去深入探究和解决. 本书中译版的出版一定有助于促进这一领域在理论和应用方面的蓬勃发展.

是为序.

王礼立,周风华
2007 年国庆节

# 序

固体中应力波的传播取决于双曲线型偏微分方程组. 在基础研究和实际应用问题中求解这组方程对于科学工作者和工程师来说一直是一种挑战. 由于偏微分方程组的内在复杂性,解析解通常很难找到. 然而,利用现代计算机,即使对复杂几何体、不同材料特性以及不同加载条件下的问题,我们都可能求出数值解. 当然,为达到这一目标需要提供一种数值解法.

本书介绍了固体中应力波传播的数值解法,目的是解决在工程中有直接应用的二维问题. 我们主要使用有限差分法,当然,也使用了其它方法,如在线弹性问题中使用了边界单元法,但仍以有限差分法为主. 我希望本书不仅可以作为科学工作者和工程师的参考书,而且还可作为学习数学物理和固体动力学相关课程的本科生及研究生的参考书.

本书是我在计算固体力学方面的最新研究结果. 我从 1981 年开始对应力波问题产生兴趣,当时我在华东工学院(现南京理工大学)读书,我想能否可以像一维问题中的特征线法一样找到一种漂亮的数学方法解决二维问题. 我非常感谢我的博士导师魏惠之教授丰富了我应用数学和力学方面的理论知识,这为我后来的研究工作打下了坚实的基础. 博士毕业不久,我获得了为期两年的德国洪堡奖学金,并于 1989 年开始在德国亚琛技术大学与 Josef Ballmann 教授一起从事研究工作. 我感谢洪堡基金给了我实现梦想的机会,因为从那时起我开始用有限差分法研究固体中应力波传播的二维问题. 两年之后即 1991 年,在 Ballmann 教授的帮助下,我能够继续研究工作,并一直进行到现在,其中经费来源于 DFG 的 Grant No. Ba 661/12－1 的支持. 我还要衷心感谢 Ballmann 教授,他不仅给我提供了我所希望的最好的工作条件,而且还给我提供了很多参加国际会议和访问许多大学的机会,从而使我能够获得本研究领域内最新的进展材料.

他从 1979 年开始在 DFG 的资助下，在我们研究所领导了许多与应力波相关的研究项目．作为导师，他不仅把许多好的想法说给我听，而且还把他自己以及他以前学生的经验传授给我．从这个意义上讲，这本书也是整个研究所研究成果的结晶．

从 1995 年起，我应 J. Glimm 教授邀请参加了他在石溪(Stony Brook)大学的研究小组，承担了超弹黏塑性材料高应变率变形的数值计算．同时我还建立了一个固体模型库，作为 Stony Brook 界面跟踪代码程序的一个扩充．本书第 6.6 节是我在 Stony Brook 与 Glimm 教授，B. Plohr 教授，J. Grove 教授，Los Alamos 国家实验室的 D. Sharp 博士以及军事研究实验室的 J. Walter 博士共同的研究成果．研究课题得到了美国军事研究室的资助，课题编号是DAAL－04－94－9510414．

我要特别感谢 J. Glimm 教授，他阅读了全书，不仅给我提出了许多宝贵意见，而且还在英语语言表达上给予我很大的帮助，同时也要感谢 ETH Zurich 技术大学的 R. Jeltsch 教授，爱沙尼亚科学研究院的 J. Engelbrecht 教授，芝加哥的伊利诺斯州大学的 T. C. T. Ting 教授，肯塔基州大学的 L. M. Brock 教授，加利福尼亚技术学院的 A. J. Rosakis 教授，在 Stony Brook 的 SUNY 的 Y. M. Chen 教授，McGill 大学的 J. J. Xu 教授，感谢他们在出版前对本书所给予的评价．

我还要感谢我的同事 K. S. Kim 博士，C. A. Muller 博士，I. Grotowsky 博士，R. J. Niethammer 博士，A. Rivinius 博士，U. Sprecht 博士，Y. G. Zhang 博士和我的助手 T. Richard 先生，C. Budorovits 先生，I. Mikulic 先生，以及其它所有在我们研究所工作和学习的人，感谢他们给我提供了和谐的工作氛围和其它数不尽的帮助．

最后，我要感谢我的妻子李雪群以及我们的女儿洁亮和温迪，她们热情支持我写这本书．雪群承担了所有的家务，度过了许多孤独的周末和假日，使我有更多的时间和更充沛的精力完成这一研究工作．

Stony Brook, June 1996 Xiao Lin

# 目　录

# 第一章　前　言

## 1.1　写本书的目的

在固体中，由冲击或其它脉冲载荷作用引起的应力波传播是物理学许多分支和许多工程实际问题中的一个基本现象．应力波的数学表达式可以用一双曲线型偏微分方程组来表示，对应力波问题的理解通常可在指定初始条件和边界条件下，求解这一方程组而得到．

应力波研究始于 19 世纪 20 年代，以 Cauchy 和 Poisson[1.1]提出波运动偏微分基本方程组为标志．在很长时间里，人们主要关注的是偏微分方程组的特征波速（或频率）．例如，Poisson 在 1831 年发现了在弹性体中有两种应力波可以传播，即纵波和横波；1887 年，Rayleigh[1.2]证明了表面波的存在；Clifton[1.3]和 Ting[1.4]发现薄壁管中有快塑性波和慢塑性波的存在．这些研究为应力波在固体中传播的求解奠定了基础．

另一个关注点是寻找给定初始边界条件下偏微分方程组的解．从物理学的角度讲，应力分量大小具有一定的量级并且在波的传播中会发生变化．应力大小的变化在一定程度上导致材料性能（如塑性、黏性等）的改变．在工程设计中，结构内的应力、应变和质点速度的分布信息非常重要．在这种情形下，必须给出偏微分方程组的解．

求解偏微分方程组的方法主要分为解析法和数值法两种．

由于数学上的困难，解析法通常只局限于求解简单的几何边界，简单材料特性或者简单加载条件问题．获得弹塑性杆一维冲击解最重要的方法之一是特征线法，这是第二次世界大战期间由 Taylor[1.5]，von Karman[1.6]和 Rahmatulin[1.7]提出的．如果在$(x,t)$平面内有一个简单波区域存在，这种方法就能够给出一个精确解；对于一个复杂波域，这种方法可以用来沿特征线对基本方程进行积分；其它重要的方法还有解决一维和二维线弹性问题的拉普拉斯变换和傅里

叶变换;Cagniard－de Hoop[1.8]法也是很重要的,因为它可以通过拉普拉斯逆变换得到一个解析解.

计算流体动力学的发展影响了应力波传播数值解法的研究.由于偏微分方程组是双曲线型的,我们可以应用气体动力学中解决超音速或非定常非黏性流动的方法.最成功的实际应用是将特征线法直接用于解决弹塑性杆的一维冲击问题.因为在$(x,t)$平面内,波的传播可以通过特征线来解释,所以这种方法的数值解可以被看成是一种解析解.对于二维应力波在各向同性线弹性体中的传播,Clifton[1.9]曾将气体动力学非定常流动中的 Butler[1.10]双特征线法应用到线弹性动力学中,并且给出一个差分格式.这个差分格式与 Lax－Wendroff[1.11]差分格式具有同样的稳定条件,即要求 Courant－Friefrichs－Lewy(*CFL*)数小于1.Ballmann 等[1.12]应用在初始平面上重新构造函数值的方法,使 *CFL* 数取为极限 1,本人和 Ballmann[1.13]对这一方法进行了完善和发展.

随着科学技术的迅速发展,对应力波进行数值求解的需求也越来越强烈.在断裂力学中为了确定材料特性,人们必须研究裂纹尖端附近应力波的相互作用.在复杂的几何边界、不同的材料特性(塑性、黏性、复合材料等)以及不同的加载条件下,研究这一问题的唯一途径就是数值解法.在工程实际问题中,为进行动力分析,必须计算碰撞体之间应力波的相互作用,并使用二维轴对称模型或三维模型,而不是简单的一维杆模型.在地震工程、结构动力学、爆炸勘探和探测裂纹技术中还会出现许多其它问题,它们都属于应力波传播问题并且需要数值模拟.因此,摆在我们面前的问题就是如何对应力波的传播进行正确的模拟.

当今,利用有限元方法的软件发展迅速、功能强大,为静态和准静态载荷条件下的结构分析提供了便利条件,然而它却给应力波研究带来了负面影响.有的时候似乎由冲击引起应力波传播的任何问题都可以用这些现代软件来模拟,但是事实上,由双曲线型方程组控制的应力波在数值模拟时需要特定的差分格式、特定的时间步长和网格大小,忽略这些因素将导致结果的不准确.

从物理学角度看,我们也不能将气体动力学计算方法简单地用到固体动力学中,即便两组方程都是双曲线型的.固体力学有它自身的特殊性,在固体中通常存在奇异点(如裂纹尖端),奇异点附近的应力分布非常重要,模拟必须尽可能精确.在弹塑性固体中,有四种特征波,即弹性纵波、弹性横波、塑性快波和塑性慢波.这些波可能同时出现,也可能只出现一部分.进入塑性屈服区域的固体可能先经历弹性卸载,然后再次进入塑性屈服.在这两种不同的加载路径情况下,其微分方程组是不同的,如果还考虑不同的材料特性,则波簇行为也不同.

为满足日益发展的科学技术需要,本书的目的是总结固体中应力波传播数

值模拟方面的成就,特别是二维问题.首先在本质上,方程组是双曲线型的,因而需要基于特征线法基础上的数值差分格式,以得出数值解.在气体动力学中,任何好的数值差分格式都可能被采用,如 Zwas 差分格式[1.14].当然我们也可以在固体动力学的研究成果中看到一些新的差分格式[1.15,1.16],如带有源项方程的有限差分格式.毫无疑问,它们对于固体和流体都是适用的.其次,本书的研究重点是应力波在固体中的传播.正如书中所写,将气体动力学中一个好的差分格式用到固体上时可能就变成一个坏的差分格式.固体材料可具有不同的材料特性,如弹性、弹塑性、各向异性、黏塑性等.我们很难找到一个适合于所有材料的差分格式,每一种材料计算时都需要一个专门的表述.基于此,我们完全有可能应用对波速特征线分析法的基本理解以及现有的精确解来确定数值差分格式及其结果的精确性,然后将其付诸于实际应用.

## 1.2 本书的写法和结构

本书试图把每一种应力波问题中的数学公式和物理解释相结合,从计算的角度,对基本方程组、解法以及差分格式进行详细的讨论.本书包含近 20 年来双曲线型偏微分方程数值解法中最重要的基本理论以及最新进展.为了获得应力波传播的数值解,书中不仅介绍了如何编写二维问题的计算机程序,而且还对解的稳定性分析提出了自己的见解.同时,我们还用物理术语或应用实例尽可能清楚地描述每个问题的力学背景.我们还尽可能对精确解和数值解进行比较,这将有助于我们理解数值解法的固有性质.其计算结果通常用图清晰地表示出来,人们可以通过图直观地理解应力波传播的物理意义.

这本书的另一个特点是每一个主题的内容都很完整;以减少由于缺乏基础知识和参考文献给读者带来的不便.这样不仅对于初学者,而且对于已经熟悉数值解法,但对固体力学缺乏了解的人,或者对于那些已受过机械工程师培训但又需要补充数学知识的人都是有益的.读者能够通过阅读本书学习很多的数学方法.在本书中,通常每一个问题都先用一个双曲线型微分方程组来表示,然后从物理学的角度来说明方程的性质,如这组方程代表反平面剪切问题或平面应变问题,这样工程技术人员很快就能理解.之后是数值差分格式,最后是将数值差分格式所得解在图中用点划线表示,并附有一些物理解释.我希望这本书不仅能受到数学家的欢迎,而且还能受到工程师的欢迎.

本书主要介绍了求解固体动力学中双曲线型偏微分方程组的有限差分法

(从第二章到第六章)和边界元法(第七章). 书中的主题及问题均源于最近的出版物.

本书从第二章开始介绍一维问题. 书中介绍了一维杆中的应力波,以便介绍一些基础知识,其中包括 Lax - Wendroff 差分格式、黎曼问题和 Godunov 方法以及 *CFL* 稳定条件;之后以薄壁管中一个复合纵波和扭转波的问题为例,介绍了应力空间加载路径这一基本概念,这也是与气体动力学问题不同的一个典型实例;最后一部分是介绍现代 TVD 方法. 这一章比较容易,即使对于没有数值计算或应力波概念的初学者来说也是如此. 当然人们在研究一维差分格式中取得了许多伟大成果,然而本书只介绍可在以后几章中用于多维问题的最重要结果.

第三章考虑了二维弹塑性固体中应力波传播的数值模拟. 全章运用一种由 Zwas 差分格式发展而来的数值解法,从简单的反平面剪切问题到较难的平面应力和平面应变问题,从简单的线弹性材料问题到复杂的弹塑性材料问题由浅入深地进行了讨论. 为了解决实际问题,本章讨论了边界条件的差分格式,同时为了能够给读者提供更多固体中波的背景信息,还介绍了许多数值解实例.

第四章借助双特征线法介绍了许多构造二维数值差分格式的方法. 首先介绍的是二阶双特征线差分格式,我们可以把其中的 Zwas 差分格式看做是它的一个特例;其次讨论了差分格式的稳定条件,以及模拟奇异点的特征;然后我们通过求解 1 个二维黎曼问题得出 1 个一阶精度的差分格式. 在上述结果的基础上,我们构造一种混合法或一种被称为 TVD 的差分格式用于解决剪切冲击类问题,其中冲击波阵面的 *CFL* 数小于 1;之后用双特征线差分格式对一个反平面剪切问题进行了计算;最后扼要介绍了三维数值差分格式.

第五章主要讨论的是应力波在二维轴对称固体中的传播. 从数学意义上讲,基本方程组包含了一个源项,在数值差分格式中不是使用时间分裂法,而是把源项分成流量计算和函数迭代两步. 本章所举的一个例子是一个线弹性材料中波聚焦现象的数值计算,但把这种方法扩展应用到弹塑性材料中并不难;接下来介绍了双网格方法;最后给出有益于实际应用的曲边网格以及相应的差分格式.

在固体材料中,有许多种材料的性能需要用不同的本构关系来描述,而应力波在这些材料中传播时的力学行为不同,这样的问题在材料科学里同样受到关注.

第六章介绍了 5 种材料的有限差分格式,即各向异性复合材料、黏弹性或弹黏塑性材料、相变材料、流体弹塑性材料和超弹黏塑性材料. 这部分研究工作主要集中在对问题的偏微分方程组的数学表达式上,有了方程组就能进行数值计算. 我们还给出了不同材料中应力波传播的例子,用以说明其物理背景.