奥博丛书

高中数学联赛一试

集合与函数

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

集合与函数

【李惟峰 编著】

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

一试系列

1.解析几何　　虞金龙 编著
2.数列与数学归纳法　　蔡小雄 编著
3.集合与函数　　李惟峰 编著
4.三角函数　　张金良 编著
5.立体几何　　吴国建 编著
6.复数与向量　　吕峰波 编著
7.不等式　　郑日锋 编著
8.排列组合与概率统计　　许康华 编著

二试系列

1.平面几何　　过伯祥 编著
2.不等式与最值　　石世昌 编著
3.组合数学　　徐士英 编著
4.初等数论　　冯祖铭 编著
5.解题研究　　单　墫 编著
6.我怎样解题　　单　墫 编著
7.中学数学竞赛导引　　常庚哲 严镇军 编著
8.数学奥林匹克大集　　黄宣国 编著
9.奥林匹克数学方法选讲　　黄国勋 编著
10.解数学竞赛题的常用策略　　王连笑 编著
11.奥林匹克数学教育的理论和实践　　冯跃峰 编著
12.数学奥林匹克试题背景研究　　刘培杰 编著
13.数学奥林匹克概论　　朱华伟 编著
14.国际数学奥林匹克研究　　熊　斌 田廷彦 编著

奥博
教育

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

集合与函数

【李惟峰 编著】

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛一试.集合与函数/李惟峰主编. —杭州：西泠印社出版社，2006.6

(奥博丛书)

ISBN 7-80735-077-6

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.代数课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064130 号

李惟峰：现为杭州外国语学校高中数学教研组组长，2003年被评为省教坛新秀，2004年获的由中国数学会颁发的优秀教练员称号。长期从事中学数学竞赛辅导工作，多位同学获全国数学竞赛一等奖、二等奖，有两名学生入选国家冬令营，一人获得全国数学竞赛中浙江赛区第一名。在省级以上杂志发表多篇文章，参与编写的竞赛辅导材料和有关高考复习丛书十几本，其中独立编著了《一次函数和二次函数》。

奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

本册主编　李惟峰

丛书总策划　徐　莹

丛书审稿　王祖樾　李名德　徐士英　王航平

业务联系　地址：浙江省杭州市学院路 83 号 221 室

电话：0571－85028528　85021510

传真：0571－85028578

丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说："欲速则不达。"不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。"尽信书，则不如无书。"作者也有可能出错。"乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的。"其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味（taste），也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单　墫

2006 年 3 月 16 日

目录

第1章 集合

第2章 函数

第1章 集合

集合是高中数学的起始单元,是整个高中数学的基础,而且也是支撑现代数学的基石之一,高等数学中的许多分支如近世代数、概率统计等都是建立在集合的基础之上的.本章从以下几个方面来讨论集合的一些基本问题和应用.

1.1 集合的概念与运算

知识概要

一、集合的概念

1. 集合是数学中的一个不定义的概念,它可以用一句话来进行描述,即"一组对象的全体称为集合",其中的对象称为集合的元素.

2. 集合元素的三大特性:确定性,互异性,无序性.

3. 不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$;含有有限个元素的集合称为有限集,如果是有限集,用$|A|$表示A的元素的个数;含有无限个元素的集合叫无限集.

4. 集合的表示方法有两种:列举法和描述法.

列举法是将集合中的元素一一列举,用逗号分开,写在大括号内.

描述法是用形如$\{x \mid x$具有性质$P\}$的形式来表示.

二、集合与集合的关系

1. 若A中元素都是B中的元素,则称A是B的子集,记作$A \subseteq B$;若$A \subseteq B$,且B中至少有一个元素$b \notin A$,则称A为B的真子集,记作$A \subsetneqq B$.

2. 若$A \subseteq B$,且$B \subseteq A$,则$A = B$,即A,B中的元素完全一样.

3. 子集的性质:

(1) $\varnothing \subseteq A$,$\varnothing \subsetneqq B (B \neq \varnothing)$;

(2) $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$;

(3) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;

(4) 若有限集A中有n个元素,则A的子集共有2^n个,真子集有2^n-1个.

三、集合的运算

1. 交集、并集和补集

$A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}$.

$A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$.

$C_uA=\{x\mid x\in u 且 x\notin A\}$.

2. 集合运算的常用结论

(1) 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(2) 吸收律:$A\cup(B\cap A)=A$,$A\cap(B\cup A)=A$.

(3) 反演律:$C_u(A\cap B)=C_uA\cup C_uB$,$C_u(A\cup B)=C_uA\cap C_uB$.

例题精讲

例1 已知集合$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$.若$A=B$,求$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}}\right)$的值.

分析 由条件$A=B$,$0\in B$时,根据集合元素的互异性,知在集合A中只能有$\lg(xy)=0$,即$xy=1$.

解 因为$A=B$,$0\in B$,所以得$xy=1$,则集合A为$\{x,1,0\}$,所以

$$\begin{cases}|x|=1,\\ y=x,\end{cases}或\begin{cases}|x|=x,\\ y=1.\end{cases}$$

由集合元素的互异性,易求得:$\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\end{cases}$

所以$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}}\right)=0$.

说明 在解方程组时,可能解出$x=1$,$y=1$,这是不对的,因为此时集合A,B中的元素不满足互异性.

例2 设A是两个整数平方和的集合,即$A=\{x\mid x=m^2+n^2,m,n\in\mathbf{Z}\}$.

证明 (1) 若$s,t\in A$,则$st\in A$;

(2) 若 $s,t\in A(t\neq 0)$，则 $\frac{s}{t}=p^2+q^2$，其中 p,q 是有理数.

证明 (1) 由 $s,t\in A$，则设

$s=m_1^2+n_1^2, t=m_2^2+n_2^2$，其中 $m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbf{Z}$.

于是 $st=(m_1^2+n_1^2)\cdot(m_2^2+n_2^2)$

$=m_1^2m_2^2+n_1^2n_2^2+m_1^2n_2^2+m_2^2n_1^2$

$=(m_1^2m_2^2+n_1^2n_2^2+2m_1m_2n_1n_2)+(m_1^2n_2^2+m_2^2n_1^2-2m_1m_2n_1n_2)$，

所以 $st=(m_1^2+n_1^2)\cdot(m_2^2+n_2^2)=(m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2$，

即 st 是两个整数的平方和，故 $st\in A$.

(2) 由于 $s,t\in A, t\neq 0$，由第(1)小题的结论知 $st\in A$，于是可令 $st=a^2+b^2$，其中 $a,b\in\mathbf{Z}$，因此有

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\frac{a^2}{t^2}+\frac{b^2}{t^2}=\left(\frac{a}{t}\right)^2+\left(\frac{b}{t}\right)^2,$$

而 $\frac{a}{t},\frac{b}{t}$ 均为有理数，故命题成立.

说明 证明第(2)小题时，充分利用了前面的结论即 $st\in A$，从而使得证明比较简捷.如直接来证则比较麻烦.

例 3 设集合 $M=\{x\mid x=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$.求证 $M=N$.

分析 证明两个集合相等，一般利用两集合相等的定义，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

证法一 设 x 是集合 M 中的任意一个元素，则存在 $m,n,l\in\mathbf{Z}$，使得

$$x=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N,$$

从而 $M\subseteq N$.

若 y 是集合 N 中的任意一个元素，则存在 $p,q,r\in\mathbf{Z}$，使得

$$y=20p+16q+12r=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p)\in M,$$

从而 $M\supseteq N$.

由上知 $M=N$.

证法二 由条件，集合 M 中的任何一个元素可表示为

$$x=12m+8n+4l=4(3m+2n+l),$$

即 x 可表示为 4 的倍数，而当 $m,n,l\in\mathbf{Z}$ 时 $3m+2n+l$ 可表示为任何整数，因为对于任何整数 k，可取 $m=n=0,l=k$，所以 $M=\{x\mid x=4k,k\in\mathbf{Z}\}$.

同理，集合 N 中的任何一个元素可表示为

$$y=20p+16q+12r=4(5p+4q+3r),$$

即 y 也可表示为 4 的倍数，而当 $p,q,r\in\mathbf{Z}$ 时 $5p+4q+3r$ 可表示为任何整数，因为对于任何整数 k，可取 $p=k,q=-k,r=0$，所以 $N=\{y\mid y=4k,k\in\mathbf{Z}\}$.

由于 M,N 的元素完全相同，所以 $M=N$.

说明 在证法二中实际上证明了两步，第一是集合 M,N 可表示为 4 的倍数，第二是证明 $3m+2n+l$ 和 $5p+4q+3r$ 可表示为任何整数，即说明了这两个集合可表示为所有 4 的倍数，所以结论成立.

例 4 在坐标平面上，横、纵坐标都是整数的点叫做整点. 我们用 I 表示所有直线的集合，M 表示恰好通过一个整点的直线的集合，N 表示不通过任何整点的直线的集合，P 表示通过无穷多个整点的直线的集合，那么表达式 (1) $M\neq\varnothing$ (2) $N\neq\varnothing$ (3) $P\neq\varnothing$ (4) $M\cup N\cup P=I$ 中，正确的表达式的个数是多少？

分析 在判断前面 3 个命题的真假时，可以依据整数的性质，采用构造法来解，对第(4)个命题可以通过举反例或者直接证明来完成.

解 设 k 是无理数，则易知直线 $y=k(x-1)$ 上只有一个整点，即(1,0)，所以 $M\neq\varnothing$；又设 $y=k(x-1)+\frac{1}{2}$ 时，当 x 为整数时，y 为无理数或者 $\frac{1}{2}$，即无整点，故 $N\neq\varnothing$；另外直线 $y=x$ 显然有无数多个整点. 故 $P\neq\varnothing$

下面证明 $M\cup N\cup P=I$：由条件，I 表示所有直线的集合，则 $M\cup N\cup P\subseteq I$. 下面证明 $M\cup N\cup P\supseteq I$：任取平面上的直线 l，若 l 不通过任何整点，则 $l\in N$；若 l 恰好通过一个整点，则 $l\in M$；若 l 通过两个或两个以上的整点，则必有 $l\in P$. 因为只要设 (a,b)，(c,d) 是 l 上的两个整点，若 $a=c$，则 l 的方程是 $x=a$，此时 $l\in P$；若 $a\neq c$，则 l 的方程为：

$$y=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b$$

取整数 $x=n(c-a)+a(n\in\mathbf{Z})$，则 $y=n(d-b)+b$ 也是整数，故 $l\in P$. 这就说明了 $M\cup N\cup P\supseteq I$，所以 $M\cup N\cup P=I$ 成立.

故正确的表达式为 4 个.

例 5 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$. 问：

(1) 当 a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2) 当 a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 3 个元素的集合?

解 (1) 由集合的分配律得：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，而 $A\cap C$，$B\cap C$ 表示的是方程组的解，即

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1;\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1.\end{cases}$$

由(Ⅰ)解得：$(x,y)=(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；

由(Ⅱ)解得：$(x,y)=(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$.

要使 $(A\cup B)\cap C$ 恰好有两个不同元素，只有两种情况，即

$$\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=0,\\\frac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=1,\\\frac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$$

解得 $a=0$ 或 $a=1$.

故 $a=0$ 或 $a=1$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰好有两个元素.

(2) 要使 $(A\cup B)\cap C$ 恰好有 3 个不同元素，只有一种情况，即

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得：$a=-1\pm\sqrt{2}$，故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，有三个不同元素.

例 6 设关于 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 和 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\ (a\in\mathbf{R})$ 的解集依次为 A，B，求使 $A\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

解 由条件：$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，得

$$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},$$

易得解集为：$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，得

$$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0.$$

则当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，解集为：$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$；当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$. 要满足 $A\subseteq B$，则根据数轴得：

$$\begin{cases} a \geqslant \frac{1}{3}, \\ 2a \geqslant 2, \\ a^2 + 1 \leqslant 3a + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leqslant a \leqslant 3$$

$$\begin{cases} a < \frac{1}{3}, \\ 2a \geqslant 3a + 1, \\ a^2 + 1 \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

所以 a 的取值范围是 $[1,3] \cup \{-1\}$.

说明 上面解答是通过对参数 a 的讨论来实现的，其实还可以通过根的分布来解决. 因为 A 的解集为 $\{x \mid 2a \leqslant x \leqslant a^2 + 1\}$，则从方程角度看，利用二次函数的图像知，$A \subseteq B$ 等价于方程 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) = 0$ 在区间 $(-\infty, 2a]$ 和 $[a^2+1, +\infty)$ 内各有一个实根，设函数 $f(x) = x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1)$，则得：

$$\begin{cases} f(2a) \leqslant 0, \\ f(a^2+1) \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leqslant a \leqslant 3 \text{ 或 } a = -1.$$

例 7 设 $a \in \mathbf{N}_+, a \geqslant 2$，集合 $A = \{y \mid y = a^x, x \in \mathbf{N}_+\}$，$B = \{y \mid y = (a+1)x + b, x \in \mathbf{N}_+\}$. 在闭区间 $[1, a]$ 上是否存在 b，使 $A \cap B \neq \varnothing$？如果存在，求出 b 的一切可能值及相应的 $A \cap B$；如果不存在，试说明理由.（安徽省高中数学竞赛）

分析 这是讨论存在性的问题，可先假设存在实数 a, b 使结论成立，找出结论存在的必要条件，如果存在，再证明它的充分性.

解 设存在实数 $b \in [1, a]$，使 $A \cap B \neq \varnothing$，即存在 $y_0 \in A$ 且 $y_0 \in B$，相对应的存在正整数 m, n，满足

$$\begin{cases} y_0 = a^m, \\ y_0 = (a+1)n + b, \end{cases}$$

即 $a^m = (a+1)n + b(1 \leqslant b \leqslant a)$

等价于 $n = \dfrac{a^m - b}{a+1}(m, n \in \mathbf{N}_+, 1 \leqslant b \leqslant a)$.

因为 n 为正整数，则 $a^m - b$ 含有因式 $a + 1$，所以有

$$\begin{aligned} a^m - b &= [(a+1) - 1]^m - b \\ &= (a+1)^m - \mathrm{C}_m^1 (a+1)^{m-1} + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}(a+1) + (-1)^m - b \end{aligned}$$

应满足$(-1)^m-b$能被$a+1$整除，则有：

(1) 当m是正偶数时，有$1-b$能被$a+1$整除，由于$a\geqslant 2,1\leqslant b\leqslant a$，故仅当$b=1$时满足要求；

(2) 当m是正奇数时，有$-1-b$能被$a+1$整除，由于$2\leqslant b+1\leqslant a+1$，故仅当$b=a$时满足要求.

综上，满足题意的b存在，其取值为$b=1$或$b=a$.

当$b=1$时，$A\cap B=\{y\mid y=a^{2k},k\in \mathbf{N}_+\}$；

当$b=a$时，$A\cap B=\{y\mid y=a^{2k+1},k\in \mathbf{N}_+\}$.

例8 设$A,B,A_i(1\leqslant i\leqslant k)$为集合.

(1) 满足$A\cup B=\{a,b\}$的集合有序对(A,B)有多少对？为什么？

(2) 满足$A\cup B=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$的集合有序对$(A,B)$有多少对？为什么？

(3) 满足$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$的集合有序对$(A_1,A_2,\cdots A_k)$有多少对？为什么？（上海市高中数学竞赛）

分析 因为(1)(2)两小题都是(3)的特列，所以我们只求解第(3)小题就行了.

解 对元素$a_1,a_2,\cdots a_n$分别讨论来确定集合有序组$(A_1,A_2,\cdots A_k)$的组数，则分n步：

第一步考虑a_1属于$A_1,A_2,\cdots A_k$的可能. 对集合A_1，有$a_1\in A_1$和$a_1\notin A_1$两种可能；对集合A_2也有两种可能，即$a_1\in A_2$和$a_1\notin A_2$；依次类推，对集合A_k来说也有两种可能. 这样共有2^k种可能.

但因为要满足$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$，所以要排除$a_1\notin A_1$，$a_1\notin A_2,\cdots a_1\notin A_k$的可能，故有$2^k-1$种可能.

同理，第二步考虑a_2属于$A_1,A_2,\cdots A_k$的可能，也有2^k-1种可能.

……

第n步考虑a_n属于$A_1,A_2,\cdots A_k$的可能，也有2^k-1种可能.

由乘法原理，得$(A_1,A_2,\cdots A_k)$的组数是$(2^k-1)^n$，

所以满足$A\cup B=\{a,b\}$的集合有序对(A,B)有$(2^2-1)^2=9$；

满足$A\cup B=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$的集合有序对$(A,B)$有$(2^2-1)^n=3^n$；

满足$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$的集合有序对$(A_1,A_2,\cdots A_k)$有$(2^k-1)^n$.

例9 求至少有两个元素的有限集$A\subseteq\mathbf{N}_+$，使A中的所有元素之和与积

相等.

分析 因为集合 A 为有限集且 $A\subseteq \mathbf{N}_+$,要满足题意,则直觉告诉我们 A 中的元素不会大于 4 个.

解 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geqslant 2)$,且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,则由条件得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n,$$

所以 $na_n\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\geqslant a_n\cdot(n-1)!$,

即 $n\geqslant(n-1)!(n\in\mathbf{N}_+)$,得:$n=2$ 或 3.

当 $n=2$ 时,$a_1a_2=a_1+a_2\Rightarrow(a_1-1)(a_2-1)=1$,因为 $a_1,a_2\in\mathbf{N}_+$,得 $a_1=a_2=2$,不满足故舍去.

当 $n=3$ 时,$a_1\cdot a_2\cdot a_3=a_1+a_2+a_3<3a_3\Rightarrow a_1\cdot a_2<3$,所以 $a_1=1$,$a_2=2$,则 $a_3=3$.

故所求的集合为 $A=\{1,2,3\}$.

说明 在解的过程中,由 $n\geqslant(n-1)!(n\in\mathbf{N}_+)$ 解出 $n=2$ 或 3 是因为当 $n>3$ 时,有 $(n-1)!\geqslant(n-1)(n-2)\geqslant(n-1)\cdot 2>n$.

例 10 有 1987 个集合,每个集合有 45 个元素,任意两个集合的并集有 89 个元素,问:此 1987 个集合的并集有多少个元素?

分析 由题意可以构造出满足要求的 1987 个集合,它们都含有一个公共元素 a,而其他的任何两个集合不含 a 以外的公共元素.问题是是否仅这一种可能呢?

解 由每个集合有 45 个元素,任意两个集合的并集有 89 个元素可知,1987 个集合中的任意两个集合有且只有一个公共元素.

又由 $1986=45\times 44+6$,根据抽屉原理容易证明这 1987 个集合中必有一个集合(不妨设为 A)中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中,设为 A_1,$A_2,\cdots,A_{45}$,其余的设为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1986}$.

设 B 为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1986}$ 中的任意一个集合,现证 $a\in B$:若 $a\notin B$,则由题意,B 和 $A,A_1,A_2,\cdots,A_{45}$ 都有一个公共元素,且此 46 个元素各不相同(因为假设集合 B 和 A_1,A_2 的公共元素相同,设为 b,则 $A_1\cap A_2=a$,$A_1\cap A_2=b$,这和任意两个集合的并集有 89 个元素矛盾),与条件每个集合有 45 个元素矛盾,所以这 1987 个集合中均含有 a,即都含有一个公共元素,而其他的任何两个集合不含 a 以外的公共元素.故所求的结果为 $1987\times 44+1=87429$.

说明 这是一种"先猜后证"的解题策略,由题意容易设计出一种特殊情

形，再排除其他类型的可能性，从而达到目的.

集合的概念与运算练习

一、选择题

1 设集合 $A=\{2,5\}$，则满足 $A\cup B=\{2,5\}$ 的集合 B 的个数是 （ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2 设 P,Q 是两个非空集合，定义 $P*Q=\{(a,b)\mid a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,1,2\}$，$Q=\{1,2,3,4\}$，则 $P*Q$ 中元素的个数是 （ ）

A. 4　　B. 7　　C. 12　　D. 16

3 已知 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}^{+}$，$A=\{x^2+x+1,-x,-x-1\}$，$B=\left\{-y,-\frac{y}{2},y+1\right\}$. 若 $A=B$，则 x^2+y^2 的值是 （ ）

A. 4　　B. 5　　C. 10　　D. 25

4 设有集合 $A=\{x\mid x^2-[x]-2=0\}$ 和 $B=\{x\mid |x|<2\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

A. $(-2,2)$　　B. $[-1,2]$

C. $\{\sqrt{3},-1\}$　　D. $\{-\sqrt{3},1\}$

5 已知集合 $A_n=\{x\mid 2^n<x<2^{n+1}$，且 $x=7m+1,n,m\in\mathbf{N}_+\}$. 则 A_6 中各元素之和为 （ ）

A. 792　　B. 890　　C. 891　　D. 990

6 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b\in\mathbf{R})$，且 $A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f[f(x)],x\in\mathbf{R}\}$. 如果 A 是只有一个元素的集合，则 A 与 B 的关系为 （ ）

A. $A=B$　　B. $A\subsetneqq B$　　C. $A\subseteq B$　　D. $A\supseteq B$

二、填空题

7 已知集合 $A=\left\{x\mid \frac{x+8}{x-5}\leqslant 0\right\}$，非空集合 $B=\{x\mid t+1\leqslant x\leqslant 2t-1\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 t 的取值范围是________.

8 集合 $A=\{(x,y)\mid 5x^2+2xy+y^2-32x-4y+52=0\}$ 中，横坐标和