研究生教学用书

公共基础课系列

随机过程（第二版）

Stochastic Processes

刘次华

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
公 共 基 础 课 系 列

随 机 过 程

（第二版）

刘次华

华中科技大学出版社
（中国 · 武汉）

图书在版编目(CIP)数据

随机过程(第二版)/刘次华. —武汉:华中科技大学出版社,2001 年 6 月
ISBN 978-7-5609-2123-5

Ⅰ. 随…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 随机过程-高等学校-教材　Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 141862 号

随机过程(第二版)　　刘次华

责任编辑:黎秋萍　李立鹏　　封面设计:刘　卉
责任校对:封春英　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国・武汉)
　　　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:华大图文设计室
印　　刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:787mm×960mm　1/16　　印张:13.5　　字数:225 000
版次:2001 年 6 月第 2 版　　印次:2007 年 9 月第 11 次印刷　　定价:18.80 元
ISBN 978-7-5609-2123-5/O・202

内 容 提 要

本书为研究生课程“随机过程”的教材，其主要内容有：随机过程的概念，泊松过程，马尔可夫链，连续时间的马尔可夫链，平稳随机过程，平稳随机过程的谱分析，时间序列分析等.

本书除介绍最基本的理论外，取材突出了实用较多的泊松过程，马尔可夫链和平稳过程. 叙述尽可能通俗，例题较多并尽力结合实际应用. 每章后面附有习题，书后附有习题解析，可供读者选用、参考.

本书可供理工科(含工程类型)硕士研究生的教材或参考书，也可供有关教学和工程技术人员参考.

Abstract

This book is primarily written for the graduate course "Stochastic processes" in Huazhong University of Science and Technology. The main topics are the concepts of Stochastic processes, Poisson processes, Markov chains, purely discontinuous Markov processes, stationary stochastic processes, spectral analysis and time series analysis.

In addition to presenting the fundamental ideas of theories, this book attempts to remarkably in Markov chains and stationary processes, which are widely applicable. Common and numerous examples are provided in each chapter. Also, each chapter ends with some exercises. Keys for reference are given at the end of the book.

The book can serve as textbook or reference for graduate students in Master degree. It can also be consulated by relevent teachers and engineers.

写在“研究生教学用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红.”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限.在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速.在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿.

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位.从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才.不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上.“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基.”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争.由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师.历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主.《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己.寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想.内因是发展的决定性的因素.当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误.外因始终是发展的必要条件.正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己.这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才.何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此.人才，

高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础. 基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器.”自古凡事皆然，教育也不例外. 教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一.“巧妇难为无米之炊”. 特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用. 早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见. 但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为. 如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书. 这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因. 今天，我仍然如此来看.

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”. 既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考. 当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应不同. 对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了. 正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用.

在此，还应进一步讲明一点. 作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读. 记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要. 因为知识是基础. 有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识. 对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某

种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华.《周易·系辞》讲了：“形而上谓之道，形而下谓之器.”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上.《庄子·天道》讲得多么好：“书不过语.语之所贵者意也，意有所随.意之所随者，不可以言传也.”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上.它比语、比书，重要多了.要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想.如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”.这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置.

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋.从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜.”截至今天，“研究生教学用书”的出版已成了规模，蓬勃发展.目前已出版了用书69种，有的书发行了数万册，有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有20种一印再印，久销不衰.采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献.我们深深感激这些鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”没有读者与专家的关爱，就没有我们“研究生教学用书”的发展.

唐代大文豪李白讲得十分正确：“人非尧舜，谁能尽善?”我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书.“完”全了，就没有发展了，也就“完”蛋了.江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻：“实践没有止境，创新也没有止境.”他又指出，坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进.这套“研究生教学用书”更不会例外.这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有.但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进.我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批

评. 当局者迷，兼听则明；“嘤其鸣矣，求其友声. ”这就是我们肺腑之言. 当然，在这里，还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者（华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员）与出版者（华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志）；深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的“研究生教学用书”.

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在“三个代表”重要思想的指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献.

谨为之序.

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003 年 7 月于喻园

前　言

随机过程理论在物理、生物、工程、经济和管理等方面都得到了广泛应用，已成为近代科技工作者谋求掌握的一个理论工具. 目前，有条件的高等学校在本科生或研究生中开设了随机过程课程. 本书是编者根据多年的教学实践，在自编讲义的基础上，充实和修改而编成的.

本书在工科大学生已有的数学知识基础上，采用为工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式，较全面地介绍了现代科学技术中常见的几种重要的随机过程. 全书分为四个部分：预备知识和基本概念（第一章、第二章），泊松过程（第三章），马尔可夫过程（第四章、第五章），平稳随机过程（第六章、第七章、第八章）. 第二、三、四部分相互独立，读者可根据专业的需要，对内容进行适当取舍.

本书是为具有高等数学、线性代数、概率论等知识的高等理工科院校本科生、研究生，或工程技术人员学习随机过程编写的，它既可作为教材或教学参考书，也可作为需要随机过程知识的读者的自学读本.

本书的编写得到黄志远教授和唐月英教授的支持与鼓励；樊孝述教授和汪昌瑞副教授曾对本书原始讲义的编写提出过许多宝贵的意见. 华中理工大学研究生院和出版社对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此谨表示衷心感谢.

由于编者水平有限，书中的缺点在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

1999 年 8 月于华中理工大学

第二版说明

本书是随机过程的入门教材，没有用到测度论，仅以初等概率论和微积分知识为前提.

本书自2000年1月出第一版以来，已被国内多所理工科院校作为研究生或本科生教材使用.这表明本教材选择的内容和深度基本符合有关院校的要求，所以这次修订时基本内容没有变动.

本书的第二版依据教学过程发现的问题和读者所提意见，由编者作了适当修改，并增加了全书习题的详细解答(第九章)，以帮助读者更进一步理解教材的内容.

这次利用改版的机会，再次对书中的遗漏和不妥之处作了更正，但限于编者的水平，本书肯定仍存在不当之处，欢迎专家和读者批评指正.

最后，编者对关心、支持本书改进的所有同志表示衷心感谢.

编　者

2004年8月于华中科技大学

"研究生教学用书"可供书目

书　　名	作　者
机械工程测试·信息·信号分析(第二版)(教育部推荐教材,获国家级优秀教材奖、获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	卢文祥等
应用泛函简明教程(第三版)	李大华
时间序列分析与工程应用(上)(下)(获中国图书奖、国家图书奖)	杨叔子等
偏微分方程数值解法(第二版)	徐长发
数字语音处理(获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	姚天任
辩证法史论稿	阳作华等
机械振动系统——分析、测试、建模与对策(上)(下)(第二版)(教育部推荐教材,获部委优秀教材奖)	师汉民等
薄膜生长理论(获部委优秀教材奖)	王敬义
高等弹性力学	钟伟芳等
硒的化学、生物化学及其在生命科学中的应用	徐辉碧等
水电系统最优控制	张勇传
高等工程数学(第三版)	于　寅
并行分布式程序设计	刘　键
损伤力学(获中国图书奖)	沈　为
非线性分析——理论与方法	胡适耕
模糊专家系统	李　凡
现代数字信号处理	姚天任等
动态传热学	郭方中
内燃机工作过程模拟	刘永长
半鞅序列理论及应用	胡必锦
化学计量学	陆晓华等
自然辩证法新编(第二版)	李思孟等
机电动力系统分析	辜承林
并行程序设计方法学	刘　键
加工过程数控(第二版)(教育部推荐教材)	宾鸿赞
近代数学基础	于　寅
气体电子学	丘军林
工程噪声控制学	黄其柏
最优化原理	胡适耕

书　　名	作　者
随机过程(第二版)	刘次华
信息存储技术原理	张江陵
应用群论导引	张端明
高等教育管理学	姚启和
稳定性的理论方法和应用	廖晓昕
动力工程现代测试技术	黄素逸
行政学原理(第二版)(教育部推荐教材)	徐晓林
中国传统文化十二讲	王炯华
实用小波方法(第二版)	徐长发
建筑结构诊断鉴定与加固修复	李惠强
国际经济学	方齐云
遗传算法及其在电力系统中的应用	熊信银等
英语科技学术论文——撰写与投稿(第二版)	朱月珍
非线性固体计算力学	宋天霞
现代制造系统的监控与故障诊断	周祖德
制造系统性能分析建模——理论与方法	李培根
快速成形技术	王运赣
智能系统非经典数学方法	朱剑英
面向对象程序设计及其应用	刘正林
激光先进制造技术	郑启光
断裂力学及断裂物理	赵建生
水力发电过程控制	叶鲁卿
科学社会主义理论与实践	编写组
现代实用光学系统	陈海清
矩阵论	杨明　刘光忠
微观经济的数理分析	胡适耕
矩阵论学习辅导与典型题解析	林升旭
数值分析	李　红
钢筋混凝土非线性有限元及其优化设计	宋天霞等
快速模具制造及其应用	王运赣
高等流体力学	王献孚
工业激光技术	丘军林
计算流体力学	李万平
科技应用中的微分方程模型	徐长发
动力机械电子控制	张宗杰

目　录

第一章　预备知识

1.1　概率空间

随机试验是概率论的基本概念，试验的结果事先不能准确地预言，但具有如下的三个特性：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但预先知道试验的所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的**样本空间**或**基本事件空间**，记为 Ω. Ω 中的元素 e 称为**样本点**或**基本事件**，Ω 的子集 A 称为**事件**，样本空间 Ω 称为**必然事件**，空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

由于事件是集合，故集合的运算(并、交、差、上极限、下极限、极限等)都适用于事件.

在实际问题中，我们不是对所有的事件(样本空间 Ω 的所有子集)都感兴趣，而是关心某些事件(Ω 的某些子集)及其发生的可能性大小(概率). 这样，便导致 σ-代数 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}$ 上的概率的概念.

定义 1.1　设 Ω 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族. 如果

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1,2,\cdots$ 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$；

则称 $\mathscr{F}$ 为 σ- 代数(Borel 域). $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为**可测空间**，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件.

由定义易知：

(4) $\varnothing \in \mathscr{F}$；

(5) 若 $A, B \in \mathscr{F}$，则 $A \backslash B \in \mathscr{F}$；

(6) 若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$ 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

定义 1.2　设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数. 如果

(1) 任意 $A \in \mathscr{F}, 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 对两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots$(当 $i \neq j$ 时，$A_i \cap A_j = \varnothing$)，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 P 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为**概率空间**，$P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由定义易知：

$P(\varnothing) = 0$;

(4) 若 $A,B \in \mathscr{F}$，$A \subset B$，则 $P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$，即概率具有单调性；

(5) 设 $A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1,2,\cdots$ 则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n) = \begin{cases} P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n), & 若\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \\ P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n), & 若\ A_1 \supset A_2 \supset \cdots \end{cases}$$

定义1.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$，如果对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_n \in \mathscr{G}$，$n = 1,2,\cdots$ 有

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i) = \prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

则称 $\mathscr{G}$ 为**独立事件族**.

1.2 随机变量及其分布

随机变量是概率论的主要研究对象，随机变量的统计规律用分布函数来描述.

定义1.4 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间. $X = X(e)$ 是定义在 Ω 上的实函数，如果对任意实数 x，$\{e: X(e) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，则称 $X(e)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的**随机变量**，简记为随机变量 X. 称

$$F(x) = P(e: X(e) \leqslant x), \quad -\infty < x < \infty$$

为随机变量 X 的**分布函数**.

分布函数 $F(x)$ 具有下列性质：

(1) $F(x)$ 是非降函数：即当 $x_1 < x_2$ 时，有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$；

(2) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}F(x) = 1$；

(3) $F(x)$ 是右连续，即 $F(x+0) = F(x)$.

可以证明，定义在 $\mathbf{R} = (-\infty,\infty)$ 上实值函数 $F(x)$，若具有上述三个性质，必存在一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的随机变量 X，其分布函数是 $F(x)$.

在应用中，常见的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续型随机变量.

离散型随机变量 X 的概率分布用分布列描述：

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1,2,\cdots$$

其分布函数

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述，其分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

常见随机变量的分布参见表1-1.

表 1-1

分布	分布律或概率密度	期望	方差	特征函数
0-1 分布	$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=q,$ $0<p<1,\quad p+q=1$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布	$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},$ $0<p<1,\quad p+q=1,\quad k=0,1,\cdots,n$	np	npq	$(q+pe^{it})^n$
泊松分布	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,$ $k=0,1,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1},\quad 0<p<1,$ $p+q=1,\quad k=1,2,\cdots$	$1/p$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$
$N(a,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad \lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$(1-\dfrac{it}{\lambda})^{-1}$

下面我们讨论 n 维随机变量及其概率分布.

定义 1.5 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(e)=(X_1(e),\cdots,X_n(e))$是定义在 Ω 上的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中取值的向量函数. 如果对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\{e:X_1(e)\leqslant x_1,X_2(e)\leqslant x_2,\cdots,X_n(e)\leqslant x_n\}\in\mathscr{F}$，则称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(e)$ 为 **n 维随机变量**或 **n 维随机向量**. 称

$$F(\boldsymbol{x})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(e:X_1(e)\leqslant x_1,\quad X_2(e)\leqslant x_2,\cdots,X_n(e)\leqslant x_n),$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$$

为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**联合分布函数**.

n 维联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 具有下列性质：

(1) 对于每个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是非降函数；

(2) 对于每个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是右连续的；