

高等学校教学用书

# 电工基础

第三册

A. B. 聶圖什尔, K. M. 波利瓦諾夫著

高等教育出版社

15.101  
2/3

高等学校教学



# 工 基 础

第三册

## 电 磁 场 理 论

A. B. 聶圖什尔, K. M. 波利瓦諾夫著  
周 孔 章 等 译

高等教育出版社

本書系根据苏联国立动力出版社(Государственное энергетическое издательство) 1956年出版的森圖什尔(А. В. Пргуши)、波利瓦諾夫(К. М. Поливанов)所著“电工基础”(Основы электротехники)第三册“电磁場理論”(Теория электромагнитного поля)譯出的。原書經苏联高等教育部多科性高等学校和机械制造高等学校主管司批准作为动力工程系、电机工程系及無線电工程系的教科書。

本書講述絕緣体、导体、半导体中的电場,非鉄磁媒介質和鉄磁媒介質中的直流磁場以及靜止媒介質中的交流电磁場。

本書除緒論、第一章和第三章由陈紹龙同志翻譯外,其余各章和附录均由周孔章同志翻譯。

本書的譯稿并經周孔章同志校閱。

## 电 工 基 础

### 第 三 册

### 电 磁 場 理 論

A. B. 森圖什尔, K. M. 波利瓦諾夫著  
周孔章等譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号  
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 15010·716 开本 787×1092 1/16 印張 10 7/8  
字數 237,000 印數 1—7,000 定價(10) 1.40  
1958年12月第1版 1958年12月上海第1次印刷

謹用本書

紀念莫斯科電工學校的創始人  
卡爾·阿道爾佛維奇·克魯格

## 原 序

本書是“電工理論基礎”課程所用教科書的第三冊，是根據高等教育部 1954 年所批准的，適用於蘇聯高等教育部所屬電工、電機和無線電工程高等學校的教學大綱而編寫的，並符合於以 В. М. 莫洛托夫命名的莫斯科動力學院為其電工專業學生所講授的課程。

課程的第一部分內容包含在 Г. В. 澤維凱 (Зевек) 和 П. А. 伊昂金 (Ионкин) 所寫的第一冊中，第二部分則包含在 А. В. 聶圖什爾 (Нетушил) 和 С. В. 斯特拉霍夫 (Страхов) 所寫的第二冊中。這兩冊是以 1952 年出版的“電工原理”一書中相應各章為基礎，該書是在杰出的科學技術工作者、蘇聯科學院通訊院士、技術科學博士、К. А. 克魯格 (Круг) 教授主編之下寫成的。

和前兩冊不同，第三冊是重新改寫的。

在本書改寫的過程中，著者吸取了在刊物上（在 1954 年以及其他年份里在“電”雜誌上的討論）以及在科學技術學會和莫洛托夫動力學院電工理論基礎教研室的會議上對電工基礎課程所進行的廣泛討論的結果。

同時，著者所抱的目的是要扼要地敘述電磁場的基本理論，並舉出一些儘可能與實際有關的具體問題使讀者熟悉電磁場的計算方法。

在編寫本書時，著者力圖儘量縮減數學方面的補助材料，這些材料已在數學課程中包括進去了，而課程章節中所要用到的數學則繪出在書末的適當的數學附錄中。

由於在講授電工理論基礎課程的第三部分時，學生已在物理課程中學過了“電”和“振動”各章，故著者認為根據這些章節的內容只要簡短地提醒一下最重要的物理關係就可以了。

出版所提出了需要進一步縮減本書的篇幅，使著者在下列各方面又進行了大力的縮減：半導體中的場，復變函數和圖解法在場的計算中的應用，場的造型等等。由於這同一理由，書中沒有討論帶電微粒的動力學，在運動的和電系統中的場，球中的電磁場，各向異性媒介質中的電磁場等等。

書中給出了某些參考文獻，以便更深入地學習課程中的某些個別問題。

本書的第一章、第二章和第三章由 К. М. 波利瓦諾夫教授編寫，第四章、第五章、第六章和第七章由 А. В. 聶圖什爾教授編寫。

著者謹向教研室的全體同志們特別是副教授 Г. В. 澤維凱和 Б. М. 弗拉德金表示感謝，因為他們曾積極參加本書原稿的討論。В. Ю. 羅蒙諾索夫教授曾校閱了本書的原稿，並提出了寶貴的意見，謹向他表示謝意。

在編輯和出版方面，教研室的工作人員 В. Я. 茹霍維茨基、А. А. 布拉烏捷、В. Н. 庫丁、А. И. 皮羅戈夫、И. Г. 雅卡勃和 В. В. 尼采茨基曾給予著者以協助，我們謹向他們致以謝意。

如有關於本書的意見和批評，請寄國立動力出版社：Москва Ж-114, Шлюзовая набережная, д. 10.

著者

# 第三册目录

原序  
緒論

## 第五篇 电磁场理论

第一章 电场 .....	364	2-2 磁矩 .....	406
1-1 电荷场的基本定律 .....	364	2-3 标量磁位。全电流定律 .....	408
1-2 电位 .....	366	2-4 磁场的旋度 .....	410
1-3 局外电场强度 .....	368	2-5 向量磁位 .....	412
1-4 偶极子的电场 .....	368	2-6 电磁感应(电动势的感生) .....	414
1-5 电场中的等位面 and 电力线 .....	369	2-7 电感 .....	415
1-6 电位场的微分方程式 .....	371	2-8 磁化强度 .....	417
(a) 用电位梯度表示电场强度 .....	371	2-9 磁化物质的场。微观的束縛电流 .....	419
(b) 静电高斯定理的微分形式。散度 .....	372	2-10 磁场强度 .....	421
(c) 泊松方程式和拉普拉斯方程式 .....	373	2-11 两媒介質分界面上的边界条件 .....	423
(d) 位场的条件。旋度 .....	374	2-12 静磁学 .....	424
1-7 场和物質的特性 .....	375	2-13 鏡像法 .....	425
(a) 导体和絕緣体 .....	376	2-14 去磁因数 .....	426
(b) 电流; 电流密度 .....	376	2-15 磁場能量 .....	428
(c) 导体 .....	376	2-16 磁場中的机械力 .....	429
(d) 电介質 .....	377	第三章 电位場和磁位場的計算方法 .....	431
(e) 不完善的絕緣体和半导体 .....	378	3-1 位場計算方法的一般特性 .....	431
1-8 極化媒介質的电場, 电位移, 介电系数 .....	379	3-2 福里哀方法 .....	432
1-9 两媒介質分界面上的边界条件 .....	382	3-3 在直角坐标系中平行平面場的計算 .....	433
1-10 电容, 电导, 电阻 .....	384	3-4 圆柱坐标系中平行平面場的計算 .....	435
1-11 鏡像法 .....	386	3-5 复变函数的应用 .....	438
1-12 可用初等方法求解的某些静电問題 .....	387	3-6 子午綫平面的位場 .....	442
(a) 两根带电軸的电場 .....	388	3-7 在均匀外电场中的球 .....	445
(b) 两个有限半徑的带电平行圆柱体的电场 .....	389	第四章 电磁場的基本方程式 .....	446
(c) 不共軸平行圆柱体的电容 .....	390	4-1 麦克斯韋方程式 .....	446
(d) 导体和大地間的电容 .....	390	4-2 材料在交变电磁場中的性質 .....	448
(e) 点电荷电场中的球 .....	390	4-3 电磁場的能量。烏莫夫-波印亭定理 .....	450
(f) 在均匀外电场中的球和圆柱体 .....	391	4-4 复数形式的麦克斯韋方程式 .....	454
1-13 在导体系中电位和电荷的分布 .....	392	4-5 在随時間作正弦变化的电磁場中媒介質的性質 .....	455
1-14 在导电媒介質中某些电場的計算問題 .....	396	4-6 复数形式的烏莫夫-波印亭定理 .....	458
1-15 在不完善的絕緣媒介質中电场計算的某些問題 .....	398	4-7 复数形式的电磁場强度微分方程式 .....	460
1-16 电场能量 .....	399	第五章 平面和柱面电磁波 .....	460
1-17 电场中的机械力 .....	401	5-1 导电媒介質中的平面电磁波 .....	460
(a) 从能量观点計算电場力 .....	401	5-2 平板中的电的集膚效应; 关于邻扰效应的概念 .....	464
(b) 作用在具有不均匀电介質的場中的力 .....	402	5-3 平板的阻抗 .....	467
(c) 作用在电介質上的力的普遍表达式 .....	404	5-4 圆柱形导綫中的集膚效应 .....	468
第二章 磁场 .....	404	5-5 圆柱形和較复杂截面的导体的阻抗的計算 .....	471
2-1 电流的磁場的基本定律 .....	404		

5-6 平板中磁的集膚效应 .....	475	7-5 当源的电流作正弦变化时偶极子的辐射 .....	511
5-7 填充在铁磁质槽内的导体中的平面电磁波 .....	478	7-6 辐射功率和辐射电阻 .....	513
5-8 钢的磁滞和非线性性质的近似计算 .....	479	7-7 偶极子系的辐射 .....	514
5-9 电介质中的平面电磁波 .....	480	7-8 关于电流不均匀分布的振荡器的概念 .....	516
<b>第六章 边界为平面的媒介质中平面电磁波的传播</b> .....	484	<b>附录</b>	
6-1 平面电磁波从两不同媒介质分界平面上的反射 .....	484	II-1 坐标系 .....	518
6-2 空腔谐振器 .....	487	II-2 向量分析的微分运算 .....	518
6-3 关于计算空腔谐振器的损耗和品质因数的概念 .....	492	II-3 向量代数 .....	519
6-4 直角形波导 .....	494	II-4 向量分析公式 .....	519
6-5 关于计算波导的损耗和衰减系数的概念 .....	497	II-5 微分方程式及其解 .....	519
6-6 移行电磁场中的导电物体 .....	498	II-6 复变数 $z = x\sqrt{-j}$ 的圆柱函数 .....	520
6-7 电磁场中的机械力 .....	500	II-7 绝对实用有理化单位制 MKCA(MKSA)的单位 .....	522
<b>第七章 电磁波的辐射</b> .....	504	II-8 在 20°C 下导电材料的主要特性 .....	524
7-1 电磁振荡器 .....	504	II-9 在 20°C 下电介质的主要特性 .....	524
7-2 电磁场的滞后位 .....	506	<b>参考文献</b> .....	526
7-3 电流的变化具有任意规律时的电偶极子的场 .....	507	<b>索引</b> .....	527
7-4 辐射单元振荡器和接收单元振荡器间的关系。 电偶极子和磁偶极子 .....	510		

## 緒 論

电荷之間的相互作用和相碰撞的两个球之間的相互作用有着明显的区别,这种区别在于前者是隔着距离發生的。电荷周圍的空間領域,在其中表现出这电荷对另外的电荷發生作用的能力,可以称为該电荷的作用場。

在磁鉄的近傍,很明显地表现出超距作用的能力。为了用磁鉄来迫使,例如,小鋼球發生移动,不需要用磁鉄去接触小鋼球,只要小鋼球落入磁鉄發生作用的場里,隔着距离磁鉄就可以吸引小鋼球了。

隔着距离直接發生作用的观念,在十九世紀是和近距作用理論相对立的,而后者是由法拉第清楚表达出和發展起来的;这个理論說:物質不能在它不存在的地方發生作用,因此,在电荷(或磁鉄)作用的区域里,必定是充滿了特殊形态的物質,这种物質是电場(或磁場)的負荷者。

电磁場的近代理論把場本身就看作是实体以外的物質存在的一种形式。而且,場和实体相似,也有能量,質量,冲量(动量)和冲量矩(动量矩)。

电学理論的發展进一步揭露了电現象和磁現象之間的密切联系。在这里提醒一下,变化的磁場(电場)总是伴随有和它联系在一起的电場(磁場);在运动的磁場中电荷所感受到的作

用力和在电場中所感受到的作用力一样。因此,可以把电場和磁場看作是統一的电磁場的不同表現形式。

但是,在实际上,常常宜于分別研究电場和磁場,分別建立每个場所特有的基本定律,并且用各自的向量来表示每个場的特性。

發生在电工設備中的一切过程,其基础总是电磁場的变换和傳播或电荷和場的相互作用的过程。这些过程常常可以用更簡單的积分量(电压,电流,功率,磁通等等)来表示,这时我們并不研究場而用只是表达这些积分量之間关系的簡單方程式来代替場的方程式。这样就归结为路的理論。但是在大多数的情况下,甚至是單純实用电工的問題的求解也必須以場的研究和描述場的方程式为基础,場的研究对于更深入地理解發生在电磁过程中的現象也是很重要的。

最后,研究場論之所以重要还由于下面的事实,这就是有許多現代的电工設備,如电子光学,高频加热等等都是完全以場的理論为根据的,更不要說无綫电工程中的設備了;其次,有許多發生在一般工业电能設備中的現象(如集膚效应),也只有基于場的理論才能加以解釋。

在本書的全部敘述中,著者采用了絕對实用單位制和合理化形式的方程式。

## 第五篇 电磁场理论

### 第一章 电场

#### 1-1. 电荷场的基本定律

假如电场只是由两个相互作用的带电体所激发,而且这两个带电体的大小比起它们之间的距离为很小时(点电荷 $q_1$ 和 $q_2$ ),则第一个电荷所感受到的力可用库伦定律来表达:

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{21}^2} \vec{r}_{21}^0; \quad (1-1)$$

如果力 $f$ 的单位用牛顿,电荷 $q$ 用库伦,而它们之间的距离 $r$ 用米表示(绝对实用单位制),则上式中的介电常数 $\epsilon_0 = 8.855 \times 10^{-12}$  法/米  $\approx \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}$  法/米,其中 $\vec{r}_{21}^0$ 为由第二个电荷所在位置指向第一个电荷所在位置的单位向量。

上面引入的公式(1-1)适用于电荷在真空中的情形,而且至少在 $R \gg r$ 的球形范围内没有能够在电荷 $q_1$ 和 $q_2$ 的影响下产生附加电场的任何物体或实体媒介质;此处假定球的中心位于电荷 $q_1$ 和 $q_2$ 的附近。

在高斯制中库伦定律用如下的等式表示

$$\vec{f}_1 = q_1 q_2 \vec{r}_{21}^0 / r^2; \quad (1-1a)$$

此式与前式的在形式上和测量单位上的不同(差一个常系数 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ),对于场方程的物理意义没有什么影响。

按照场论的观点,库伦定律(1-1)可以解释如下:由于电荷( $q_1$ )所在位置有另一电荷( $q_2$ )的电场,所以有由表达式(1-1)所确定的力( $f_1$ )

作用在电荷( $q_1$ )上。

电荷 $q$ 在电场中所感受到的力与电荷的大小成正比,这个力的相对值

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q} \quad (1-2)$$

可以作为电场强弱程度(力)的量度,称为电场强度。

在携入的探验电荷能够使所研究的场发生畸变的情形下,当确定电场强度时应该取其极限值

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{f}}{q}, \quad (1-3)$$

因为当探验电荷的数值很小时,由它所能引起的畸变也就很小。

将式(1-1)和(1-2)相比较,就可求出点电荷 $q$ 的电场强度:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}^0. \quad (1-4)$$

向量 $\vec{r} = r\vec{r}^0$ 是由电荷所在点(源点)指向要求决定电场强度的点(观察点)。

在最后的表达式中很清楚地看出其中所含各量的物理意义:点电荷的电场有着中心对称性,也就是沿着各个方向是均匀分布的(如同从点光源发射出的光线),而其数值则与以电荷所在位置为中心的球的面积成反比(如同在不吸收的媒介质中由点光源发出的光通量的密度)。注意到上述情况是有益的。通过这个球表面的向量 $\vec{E}$ 的通量当然仍保持恒定而与球的半径无



关;这个通量与电荷成正比(如光通量与光源强度成正比一样)。所指出的规律性(穿过任何闭合表面的电通量)的更普遍形式用大家熟知的静电高斯定理来表示:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \oint \bar{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (1-5)$$

从场论的观点看来,高斯定理可以认为是独立的实验事实的综合,特别是,从其中可以导出库伦定律。

**叠加原理** 实验证明,不是只有一个而是有几个电荷  $q_1, q_2, q_3 \dots$  时,由它们所激发的合成电场强度等于各个电荷单独存在时所激发的各电场强度之和:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \dots \quad (1-6)$$

或按照式(1-4)

$$\bar{E}_k = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r_{ik}^2} \sum_i \frac{q_i}{r_{ik}^2} \bar{r}_{ik}^0; \quad (1-7)$$

此处  $k$  是观察点(要决定该点的场强),  $i$  是源点(电荷  $q_i$  位于该点)。因此,对于电荷的电场我们可以应用叠加原理。

在电工技术中经常遇到具有某种密度分布的电荷:在空间

$$q_v = \rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1-8a)$$

在表面上

$$q_s = \sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (1-8b)$$

或沿着某条线

$$q_l = \tau = \frac{\Delta q}{\Delta l}. \quad (1-8c)$$

明显看出,从求和过渡到积分,对于具有体密度( $\rho$ ),面密度( $\sigma$ )或线密度( $\tau$ )的电荷可以应用表达式(1-7)。

和的积分等于各积分之和,因此,我们当然也可以把叠加原理应用到静电高斯定理:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (1-9)$$

假如电荷在空间的分布是以体密度给出的,则代替式(1-9)可以写成:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV, \quad (1-10)$$

因此,当  $q_i$  和  $\Delta V$  趋近于零时,显然有:

$$\sum_i q_i = \sum \rho \Delta V = \int_V \rho dV. \quad (1-11)$$

对于面电荷和线电荷也可以给出相似的公式。

**例 1-1.** 沿着有限长的直线段  $l$ , 电荷以纯密度  $\tau$  分布着。要求出距线段轴线的距离为  $r_0$  一点处的电场强度。由线段端点引向所研究点的两半径与轴线间的夹角各为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  (图 1-1)。

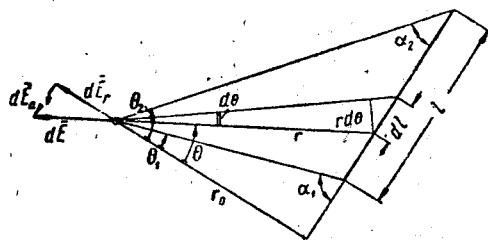


图 1-1.

**解** 对于线段的每一个长度元  $dl$  按照库伦定律有

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2} \cos \theta,$$

$$dE_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2} \sin \theta,$$

其中  $E_r$  和  $E_\alpha$  分别为电场强度的径向分量和切线分量。

由简单的几何关系我们求得:

$$dl = \frac{r d\theta}{\cos \theta}, \quad r = \frac{r_0}{\cos \theta},$$

因此  $E_r = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$

和  $E_\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$

式中  $\theta_{1,2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{1,2}.$

如果观察点对于线段来说是位于对称位置的,则  $\theta_1 = -\theta_2$ ; 因而切线分量  $E_\alpha$  变为零。

对于无限长均匀带电的导线(例如输电线路的导线当  $r_0 \ll l$  时的情形),则有:

$$\theta_2 = -\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

和

$$E = E_r = \frac{\tau}{2\pi r_0 \epsilon_0}$$

例 1-2. 应用高斯定理来计算无限长均匀带电导线的电场。

解 由于对称性, 场内仅有电场强度的径向分量 ( $E = E_r$ )。因此, 对于与导线同轴的半径为  $r$  的圆柱形表面和与轴线垂直的两个圆平面所围成的表面应用高斯定理, 我们易于求得:

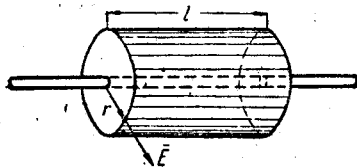


图 1-2.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = E_r \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \int \tau dl = \frac{1}{\epsilon_0} \tau l$$

(在圆柱形表面上各点  $E_r = E = \text{常量}$ ), 由此求出

$$E = E_r = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}$$

这个结果和例 1-1 中所求得的是一致的。

### 1-2. 电位

在电场内, 电荷受电场力的作用而移动, 当移动  $dl$  时场力所作的功为:

$$dA = \vec{f} dl = q_0 \vec{E} dl, \quad (1-12)$$

或沿路径  $l$  移动时

$$A = \int_1 \vec{f} dl = q_0 \int \vec{E} dl. \quad (1-13)$$

在其余的电荷都是静止不动的静电场中, 这个功的大小只与电荷  $q_0$  的最初和最后的位置有关, 而与电荷移动的路径无关。事实上, 在点电荷  $q$  的电场中(图 1-3)

$$dA = q_0 \frac{C}{r^2} \vec{r}^0 dl = q_0 \frac{C}{r^2} dr, \quad (1-14)$$

或

$$\begin{aligned} A &= q_0 \int_1^2 \vec{E} dl = q_0 C \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \\ &= q_0 C \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \end{aligned} \quad (1-15)$$

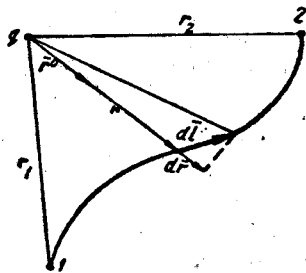


图 1-3.

式中  $C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ ;  $r_1$  和  $r_2$  是由电荷  $q$  所在的一点引向点 1 和点 2 的向径。

从所得到的表达式可以断言, 如果电荷  $q_0$  在点电荷的电场中被移动, 则沿着任意的闭合回路移动电荷  $q_0$  时电场力所作的功总是等于零。实际上, 对于这样的场可以表示成:

$$\oint \vec{E} dl = 0 \quad (1-16)$$

(路径的起点和终点重合, 因而  $r_1 = r_2$ )。

但是, 由任意分布的一些电荷所激发的静电场, 按照叠加原理可以看作是由各个点电荷元  $dq = \rho dV$  所激发的电场的总和。显然可见, 在这个电场中有关场力作功的结论仍是正确的, 即功只与点 1 和点 2 的起点和终点的位置有关, 且沿着闭合路径移动电荷时所作的功等于零。

这就使我们有可能用一个称作电位的坐标的标量函数  $\varphi$  来表征电场, 而这样的场就称为位场。任意一点的电位则定义为从场内的一点移动单位正电荷到零电位点时场力所作的功, 这时假定其余的电荷全部保持不动。

计算电位时起点(零电位点)的选择是任意的。一般是采用大地表面的电位或位于所研究的场的外部某一点的电位作为零电位; 因而, 对于任何有限电荷的场和点电荷的场可以采用在无限远点的  $E=0$  和  $\varphi=0$ 。

在电场内任意二点间的电位差等于从一点到另一点移动单位电荷时所作的功(其余的电

荷不动)。电位差和任意选定的计算电位的起点无关,这种任意选择零电位点的唯一影响只是在所有各点的电位上都增加一个相同的常数。

在一般的情形下,由式(1-13)可知,在点1和点2间的电位差或电压为:

$$U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q_0} = \int_1^2 \bar{E} dl. \quad (1-17)$$

而在点电荷  $q$  的电场中,点1和点2间的电位差为

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1-18)$$

这只要由给出的定义和公式(1-15)就可以得出的。

将无限远点作为零电位点( $r_2 \rightarrow \infty, E \rightarrow 0$ ),则可求得距离点电荷  $q$  为  $r_1 = r$  一点的电位:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (1-19a)$$

半径为  $r$  的球的表面(球心位于电荷所在位置的一点上)是等位面。

根据叠加原理,对于任意数目的点电荷:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k}, \quad (1-19b)$$

而对于具有体密度  $\rho$  在体积  $V$  中分布的电荷:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV. \quad (1-19b)$$

**借电位来表达电场强度** 按照移动单位正电荷电场力所作的功计算出电位后,就可以按式(1-13)和(1-17)用如下的等式来计算电位的减少值:

$$-d\varphi = \frac{dA}{q_0} = \bar{E} dl = E_l dl. \quad (1-20)$$

事实上,在场内移动  $dl$  时已作相对的功  $dA/q_0$ , 因此,场做功的能力已减少了这同一的数值。

由最后的等式我们求得

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad (1-21)$$

即电场强度沿  $l$  方向的分量等于电位对变量坐标  $l$  的偏微商加以负号(只能是偏微商,因为沿其他方向移动时电位也能发生变化)。

当应用笛卡儿坐标时  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , 而

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, & E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1-22)$$

**例 1-3.** 试决定由以体密度  $\rho = 5.3 \times 10^{-10}$  库/厘米<sup>3</sup> 均匀分布在半径为  $a = 5$  厘米的球内的体电荷所激发的场的电位。

**解** 由对称条件容易求得,所有各点的电场强度都是沿着从带电球的中心引出的半径  $R$  的方向,即  $E = E_R$ 。

把高斯定理应用到其中心在坐标原点的球面上,则得:

(a) 在内部区域 ( $R \leq a$ )

$$\epsilon_0 \oint \bar{E} dS = \epsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 = \int \rho dV = \rho \frac{4\pi}{3} R^3,$$

或  $E = E_R = \rho \frac{R}{3\epsilon_0};$

(b) 在外部区域 ( $R > a$ ), 其中任何一个球面都包含全部电荷:

$$q = \rho V_a = \rho \frac{4\pi}{3} a^3,$$

故有:  $\epsilon_0 \oint \bar{E} dS = \epsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 = \rho \frac{4\pi}{3} a^3,$

或  $E = E_R = \rho \frac{a^3}{3\epsilon_0 R^2}.$

只和半径有关的电位  $\varphi(R)$ , 按照式(1-17)对于内部区域用如下的表达式计算:

$$\varphi(0) - \varphi(R) = \int_0^R \bar{E} dR = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_0^R R dR = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{2};$$

同样地对于外部区域:

$$\begin{aligned} \varphi(a) - \varphi(R) &= \int_a^R \bar{E} dR = \rho \frac{a^3}{3\epsilon_0} \int_a^R \frac{dR}{R^2} = \\ &= \rho \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

随意地假定球心的电位为零,即假定  $\varphi(0) = 0$ , 我们求得:

$$\varphi(R) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{2} \quad \text{当 } R \leq a \text{ 时};$$

和  $\varphi(R) = \varphi(a) - \rho \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right)$  当  $R > a$  时,

或再由前式以  $\varphi(a) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^2}{2}$  代入, 就得到

$$\varphi(R) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + \rho \frac{a^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad \text{当 } R > a.$$

当  $R \rightarrow \infty$  时,

$$\varphi(\infty) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}.$$

在圖 1-4 中繪出了这个解的电位和电场强度的曲线圖。

在电位的表达式中用其他方法选择的任意常数的解也不难写出。譬如, 假定  $R \rightarrow \infty$  时  $\varphi = 0$ , 则求得  $\varphi(0) = \rho a^2 / 2\epsilon_0$ 。在以前求得的所有表达式  $\varphi(R)$  中, 都要加上这个恒定分量。当然, 常数的选择对于电场强度的表达式是没有影响的

$$E = E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R}.$$

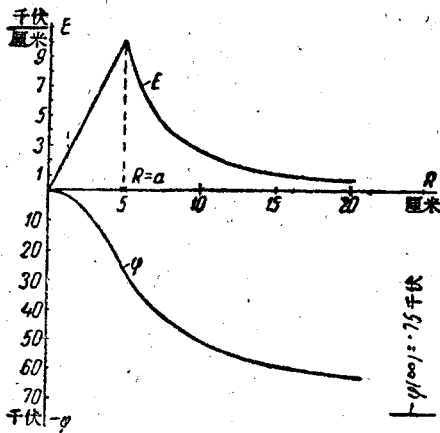


圖 1-4.

例 1-4. 半徑为  $a$  的无限長圆柱体的内部具有均匀分布的电荷, 其体密度为  $\rho$ , 試求电场的电位。

解 选用圆柱坐标, 利用与前例相同的方法, 我們就求得用如下的等式表达的电位

$$\varphi(r) = -\frac{r^2}{4\epsilon_0} \rho \quad \text{当 } r < a,$$

$$\varphi(r) = -\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \left[ 1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad \text{当 } r > a,$$

这只要假定  $\varphi(0) = 0$ 。

当  $r \rightarrow \infty$  则  $\varphi \rightarrow \infty$ ; 这是由于无限長圆柱体的电荷是无限大的。

### 1-3. 局外电场强度

当研究按照庫倫定律相互作用的电荷的場

时, 才可能引入电位的概念, 对于这种場总是有着  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ , 而电场强度可以由等式 (1-21), (1-22) 来决定。

但是并非所有的电场强度都具有上述的性质。不仅如此, 只当有不服从庫倫定律的力存在时所有的电工技术才成为可能, 为了确信这点, 我們只要想起电动势的基本定义就可以了:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l}, \quad (1-23)$$

这就說明, 在服从庫倫定律的条件下不可能有电动势存在。

非靜电起源的力可以称作局外力。对于單位电荷的局外力  $F_{\text{局外}}$  可以称作局外电场强度:

$$\vec{E}_{\text{局外}} = \vec{F}_{\text{局外}} / q. \quad (1-24)$$

这定义是有些条件的, 因为, 一般說来, 并非所有的力都能归结为电场强度。非庫倫力中最重要的一类是在变化的或运动的磁场中作用于电荷上的力: 这些力列入在全电场强度的定义中(見 2-6 节), 而称作电磁力。

此外还有既非靜电的又非电磁場的局外力; 我們習慣上只是把这种力叫作局外力; 属于这种力的有移动被絕緣了的带电体的机械力(作用在靜电发电机上的), 在原电池和蓄电池的电极上使电荷分离的 electrochemical 起源力等等。

应用局外电场强度的概念就可以認為电荷所感受的力是:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q(\vec{E}_{\text{庫倫}} + \vec{E}_{\text{电磁}} + \vec{E}_{\text{局外}}). \quad (1-25)$$

如果只有庫倫力, 一般說来, 是不可能使正电荷和負电荷分离存在的。

### 1-4. 偶極子的电场

除掉由点电荷以及各种空間分布的电荷所激發的电場之外, 确定由偶極子所激發的电場也往往是需要的。所謂偶極子就是一对具有不同符号的电荷, 其绝对值相等而相互距离为  $l$ 。

(圖 1-5)。特別是,極化了的分子可以作為這樣一對電荷的代表,在其中正電荷和負電荷的平均位置相隔一個很小的距離  $l$ 。携入到外電場中的小導體塊內所激發的電場也常常可以看作是某些偶極子的電場,因為在外電場的作用下這些小導體塊中的電荷發生了位移(靜電感應)。

在  $A$  點由偶極子的電荷  $\pm q$  所產生的電位用下列等式[參看式 (1-19)]來決定:

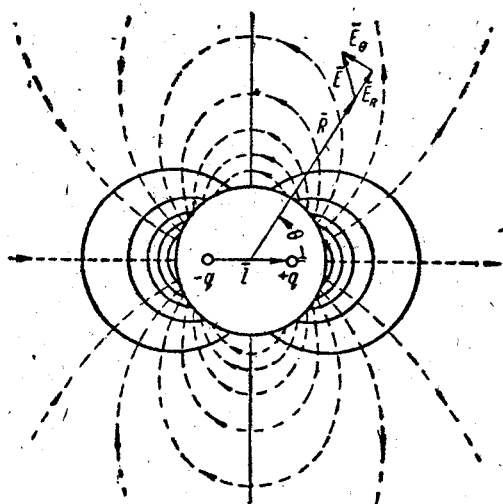


圖 1-5.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}, \end{aligned} \quad (1-26)$$

其中  $R_1$  和  $R_2$  分別是由  $A$  點到偶極子的正電荷和負電荷的距離。

如果  $\vec{R}$  是由偶極子的中點引向  $A$  點的向量,  $l$  是由負電荷引向正電荷的向量,則向量  $\vec{R}_1$  和  $\vec{R}_2$  (由  $+q$  和  $-q$  引向  $A$  點的)可用如下等式表示

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{R} \mp \frac{1}{2} l. \quad (1-27)$$

這些向量的幅模

$$R_{1,2} = \sqrt{R^2 \mp Rl + \frac{1}{4} l^2}. \quad (1-28)$$

如果  $l \ll R$ , 則按照公式

$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2} \epsilon,$$

其中  $\epsilon \ll 1$ , 於是我們得到:

$$R_{1,2} = R \mp \frac{1}{2} \bar{e}_R l \quad \text{和} \quad R_2 - R_1 = \bar{e}_R l, \quad (1-29)$$

其中  $\bar{e}_R = \vec{R}/R$ .

在相同的條件下 ( $l \ll R$ )

$$R_1 R_2 \approx R^2.$$

因此,由偶極子所激發的電位可以用如下的等式表示:

$$\varphi = \frac{q \bar{e}_R l}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\bar{p} \bar{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (1-30)$$

其中  $\theta$  是向量  $\vec{R}$  和  $\vec{p}$  (或  $l$ ) 之間的夾角,而

$$\vec{p} = ql \quad (1-31)$$

是偶極子的電矩。

所得結果的一個極重要特點就是,在距離 ( $R$ ) 遠大於電荷間距離 ( $l$ ) 的偶極子的電場的表達式中引用了偶極矩  $\vec{p}$ , 而不是單獨用它的電荷 ( $\pm q$ ) 和極臂 ( $l$ ) 來表示。

已知由偶極子產生的電位就容易決定電場強度向量的分量。

事實上,由聯系  $\varphi$  和  $E$  分量的基本表達式 (1-21) 我們求出在球坐標系中

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{p \bar{e}_R}{2\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\bar{p} \bar{e}_R}{2\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (1-32)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (1-33)$$

應當指出,當決定  $E_\theta$  時選擇了一段弧長來代替微小位移  $dl$ , 沿這個弧的位移是  $dl = R d\theta$  (而不是簡單的坐標增量  $d\theta$ )。

### 1-5. 電場中的等位面 and 電力綫

具有相同的電位的麵 ( $\varphi = \text{常量}$ ) 稱作等位面。用任意其他的麵和等位面相交得到的綫則稱作等位綫。因而,用一個通過電荷所在位置

的面和点电荷的电场相截, 则其等位线  $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r$  是一些圆周。

在平面上画出等位线来表示电场的图像, 特别是当使相邻力线间的电位差保持恒定时, 对于电场性质可以给出明晰的概念。在相邻力线间的电位差保持恒定的情形下, 可以立即看出, 相邻力线愈密的地方电场强度愈强; 电位差除以线间距离就等于电场强度的平均值, 这可由式(1-21)得出。

如果在图上画出电力线或电场的力线, 则电场的图像就更为清楚; 在这种线上每点画切线, 其方向就和电场强度向量的方向一致。

力线和等位线必须垂直相交, 事实上, 沿着电位相同的表面, 对于任何一个位移  $d\vec{s}$

$$-d\varphi = \vec{E}d\vec{s} = 0, \quad (1-34)$$

因为  $\varphi = \text{常量}$ , 这就说明, 如果  $d\vec{s}$  位于电位相同的表面上则  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ 。方程式(1-34)可以看成是等位线方程式。

电力线  $l$  的每个长度元是位移  $d\vec{l}$ , 故力线方程式可表为

$$[\vec{E}d\vec{l}] = 0, \quad (1-35)$$

这证明了  $\vec{E} \parallel d\vec{l}$ 。

偶极子电场的等位线和电力线 使向量积等于零:

$$|[\vec{E}d\vec{l}]| = E_R R d\theta - E_\theta dR = 0, \quad (1-36)$$

并从式(1-32)和(1-33)将  $E_R$  和  $E_\theta$  的值代入上式就求得

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \frac{\cos\theta}{R^2} d\theta - \frac{\sin\theta}{R^3} dR \right) = 0 \quad (1-37)$$

或

$$2\cot\theta d\theta = \frac{dR}{R}. \quad (1-38)$$

将式(1-38)积分, 则求得电力线方程式

$$R = C \sin^2\theta, \quad (1-39)$$

其中  $C$  是常数。

等位线的方程式直接由公式(1-30)给出。

在图 1-5 中图示出了偶极子电场的等位线和电力线。

平行平面场力线的性质 假如电场中电位的分布只和直角坐标系中的两个坐标有关, 则电场强度向量总是和第三个坐标垂直。当第三个坐标是一条直线时, 这样的场就称作平行平面场, 因为垂直于第三个坐标的各个平行平面上电位的分布是相同的。

根据在这些平面中的任何一个平面上表示场图的线网格子的几何性质可以比较容易地画出场图。

如果通过两条力线画出一族等位线(图 1-6), 则得到一系列曲线方块。在每个方块内部用目测画出平均线, 并且估计出这些方块的长为  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , 宽为  $b_1, b_2, b_3, \dots$ 。

如果相邻的等位线之间的电位差相同, 则

$$E_1 a_1 = E_2 a_2 = \dots \quad (1-40)$$

从通量本身的定义明显看出, 通过其管壁

是由电力线所围成的力管的任一横断面的通量是恒定的(因为在电力线所围成的管壁上  $\vec{E}d\vec{S} = 0$ )。因此,

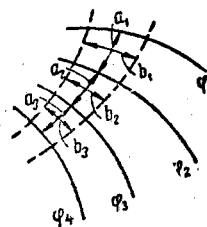


图 1-6.

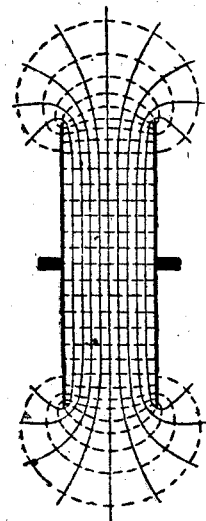


图 1-7.

$$E_1 b_1 = E_2 b_2 = \dots \quad (1-41)$$

在式(1-40)和(1-41)中,  $E_1, E_2, \dots$  是电场强度的平均值, 可以认为它们在两个方程式中是相同的。在这种情形下, 将等式(1-40)和

(1-41) 逐項相除, 就得到:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots \quad (1-42)$$

最后的条件和兩族直線正交的要求合在一起就可以近似地画出電場的圖像。

在圖 1-7 中繪出了具有等量異號電荷的兩個平行板間的電場。

### 1-6. 電位場的微分方程式

上面所表述的基本定律可以寫成微分形式, 也就是能夠列出表達位場性質的最普遍形式的微分方程式。

用向量分析的語言表達的微分方程式, 不論是對於場的描述, 還是對於根據基本實驗事實以推導一系列結論來說, 都是最為方便的。研究場的微分方程式之所以重要, 還因為有許多的場的計算問題只有考慮到所研究的問題的具体條件將這些方程式積分出來才能得到解決。滿足場方程式和邊界條件的解總是唯一的 (見附錄 II-5)。

(a) 用電位梯度表示電場強度 任何位場的向量的分量都可以表示為相應的偏微商 (1-21), 例如, 在笛卡兒坐標中:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, & E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1-43)$$

因此

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z\right), \quad (1-44)$$

或

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1-45)$$

梯度除了用所引入的符號表示外, 通常也用哈密爾頓算符(納布拉)來表示:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi. \quad (1-46)$$

在笛卡兒坐標系中哈密爾頓算符

$$\nabla \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1-47)$$

其中  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  是沿  $x, y, z$  軸的單位向量。

比較式 (1-44) — (1-47), 上面所說的是容易確信的。

(grad  $\varphi$  用圓柱坐標和球坐標的表達式在附錄 II-2 中給出)。

函數的梯度總是指向有恒定數值的表面的法綫方向。因而, 電位梯度總是沿着具有等電位表面(等位面)的法綫方向。它的方向和函數增長速度最大的方向一致。這顯然是由於, 向量的幅模總是大于在不和向量一致的任何方向上它的投影。梯度的絕對值等於函數增長速度的最大值。

例 1-5. 試求出只依賴於兩個坐標的而且可以用如下的函數表達的電位梯度:

$$(a) \quad \varphi = \text{Re} \left\{ k \ln \cos \frac{\pi}{a} (x + jy) \right\};$$

$$(b) \quad \varphi = \text{Re} \{ k \ln (s^n - b^n) \},$$

其中  $s = x + jy$  而  $j = \sqrt{-1}$ 。

當 (a)  $|y| \gg a$  和 (b)  $|s| \gg b$  時這些場和哪些已知的場相符合?

解 (a) 將電位  $\varphi$  對  $x$  微分, 然後再對  $y$  微分, 則得:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \text{Re} \left\{ \frac{\pi}{a} k \frac{\sin \frac{\pi}{a} (x + jy)}{\cos \frac{\pi}{a} (x + jy)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{\pi}{a} k \text{tg} \frac{\pi}{a} (x + jy) \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{\pi}{a} k \frac{\sin \frac{2\pi}{a} x + j \text{sh} \frac{2\pi}{a} y}{\cos \frac{2\pi}{a} x + \text{ch} \frac{2\pi}{a} y} \right\} = \\ &= \frac{\pi}{a} k \frac{\sin \frac{2\pi}{a} x}{\cos \frac{2\pi}{a} x + \text{ch} \frac{2\pi}{a} y}, \end{aligned}$$

同樣地

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\pi}{a} k \frac{\text{sh} \frac{2\pi}{a} y}{\cos \frac{2\pi}{a} x + \text{ch} \frac{2\pi}{a} y}.$$

因此

$$-\text{grad } \varphi = \frac{\pi}{a} k \frac{\bar{e}_x \sin \frac{2\pi}{a} x - \bar{e}_y \text{sh} \frac{2\pi}{a} y}{\cos \frac{2\pi}{a} x + \text{ch} \frac{2\pi}{a} y}$$

如果  $|y| \gg \frac{a}{2\pi}$ , 则

$$\left| \text{sh} \frac{2\pi}{a} y \right| \approx \text{ch} \frac{2\pi}{a} y \approx \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi}{a}|y|} \gg 1.$$

因而

$$\bar{E} = -\text{grad } \varphi = \mp \frac{\pi}{a} k \bar{e}_y$$

(对于  $y > 0$  取 -, 对于  $y < 0$  取 +)。

显然, 这样的场和电荷密度为  $\sigma = -2\epsilon_0 \frac{\pi}{a} k$  的带电平面  $y=0$  的场相符合, 而按照高斯定理

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1-48)$$

(6) 用相似的方法解第二个问题, 再用圆柱坐标系的坐标  $r$  和  $\alpha$  表示, 当

$$z = r e^{j\alpha}$$

时, 我们求得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{kn}{r} \text{Re} \frac{e^{jn\alpha}}{e^{jn\alpha} - (b/r)^n},$$

$$\frac{\partial \varphi}{r \partial \alpha} = \frac{kn}{r} \text{Re} \frac{je^{jn\alpha}}{e^{jn\alpha} - (b/r)^n}.$$

当  $r \gg b$  时

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{kn}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \alpha} = 0,$$

而这个场就和每单位长带电荷  $\tau = -2\pi\epsilon_0 kn$  的带电轴线的电场相符合。

(6) 静电高斯定理的微分形式。散度 联系通过闭合表面的电场强度通量与位于这个闭合表面内部的电荷的方程式, 在前面仅仅表示成积分形式(1-10):

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

将围绕某一点的积分表面紧缩, 使其所包围的体积趋近于零, 而且假定电荷密度是坐标的连续函数, 就容易将这个定理变为微分形式:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} d\bar{S}}{V} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (1-49)$$

在这等式的右侧,  $\rho$  是某一点的电荷密度, 闭合表面是围绕着这一点而紧缩的(紧缩得使包围它的体积的任何线性尺寸都趋近于零)。

前面所提出的过渡到极限的要求在物理上是不存在的, 因为它同样地也要求  $\rho$  是坐标的连续函数。

实际上, 当体积紧缩到足够小的时候, 其内部只剩下几个原子或电荷, 这时电荷平均密度的宏观概念就失掉了意义。如同在所有的宏观电动力学中一样, 体积和线性尺寸趋近于零在此可以理解成: 所研究的微小体积和距离, 从用数学来描绘场的观点看来可以认为是微小的, 但同时它必须仍要保持在足够大, 以便把物体看作是一个媒介质整体的宏观物理概念不丢掉意义。

位于等式(1-49)的左侧的比值称作散度或向量  $\bar{E}$  的散度:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} d\bar{S}}{V} = \text{div } \bar{E}. \quad (1-50)$$

从这定义本身就可以清楚地说明某一个物理向量的散度的物理意义。事实上, 从某一表面所限定的体积中发射出来的通量  $\oint \bar{E} d\bar{S}$  就表示在面积内部有这通量的源头, 而且在数量上就表示了它的“能力”(强度)。发射出来的全部通量与这个表面所限定的体积之比就表示了通量源头的体积密度。

让我们来分析一个能够明显说明散度的概念的例子。

假定在屋内点燃着蜡烛或在管内装有放电时发光的稀薄气体(在其中产生光通量); 设屋内的空气是透明的而窗外弥漫着烟雾(能吸收光通量)。在蜡烛的火焰(或是在气体放电管的内部)里光通量密度向量的散度是正的, 在屋内空气里散度等于零, 而在窗外散度是负的。

选定这种或那种坐标, 由散度的定义(1-50)



就可以直接写出微分算符  $\text{div} \bar{E}$ 。例如在笛卡儿坐标里

$$\text{div} \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1-51)$$

(散度的圆柱坐标和球坐标的表达式在附录 II-2 中给出)。

根据定义散度是标量,而微分算符则当作向量。容易注意到,式(1-51)所导出的结果在形式上可以看作是向量纳布拉和向量  $\bar{E}$  的标量积:

$$\text{div} \bar{E} = \nabla \bar{E} = \left( \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E} \quad (1-52)$$

静电高斯定理表示成微分形式则为:

$$\epsilon_0 \text{div} \bar{E} = \rho; \quad (1-53)$$

这可从式(1-49)和(1-50)得出。

**例 1-6.** 当  $a < x < b$  时电场强度是按照  $E_x = E_0 \frac{a}{x}$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$  的规律变化的。当已知  $E_0 = 10$  千伏/厘米,  $a = 1$  厘米,  $b = 1.2$  厘米时,试求出体电荷。

**解** 根据高斯定理

$$\rho = \epsilon_0 \text{div} \bar{E} = -\epsilon_0 E_0 \frac{a}{x^2}.$$

这是具有负体电荷的平行板电容器的电场,因此,电场强度随着远离正极板而减小(在  $E_x$  方向)。

**例 1-7.** 和上例相同,只是电场强度在  $a^2 \leq r^2 = x^2 + y^2 \leq b^2$  的范围内按下述规律变化:

$$E_x = E_0 \frac{ax}{r^2}, \quad E_y = E_0 \frac{ay}{r^2}, \quad E_z = 0.$$

**解** 直接微分,则得

$$\rho = \epsilon_0 \text{div} \bar{E} = \epsilon_0 E_0 a \frac{-2x^2 + r^2 - 2y^2 + r^2}{r^4} \equiv 0.$$

这个场和轴綫与  $z$  轴相重合的带电圆柱体的电场相一致。

注意到这一点是有益处的,就是在本例中,在平行板  $y=0$  处的电场强度和前例中的电场强度完全相同。

事实上,在本例中,在指定的条件下  $r=x$  和  $E_x = E_0 \frac{a}{x}$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$ 。虽然  $E_y = 0$ , 但是这个分量的微商并不等于零(而在例 1-6 中则等于零)。

(B) 泊松方程式和拉普拉斯方程式 在位

场里,式(1-53)中的电场强度可以用电位梯度来表示;因而导出表达式:

$$\text{div}(\text{grad} \varphi) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1-54)$$

其中含有两个微分算符:对梯度取散度。采用笛卡儿坐标容易写出用相应的微商来表示的这些算符。其实,将  $\text{grad} \varphi$  的分量  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  代入式(1-54)中就得到

$$\text{div} \text{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1-55)$$

算符  $\text{div} \text{grad}$  称作拉普拉斯,而用符号  $\nabla^2$  表示,应用纳布拉算符,则符号  $\Delta$  可以表作纳布拉的平方,因此:

$$\Delta \varphi \equiv \text{div} \text{grad} \varphi \equiv \nabla \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi. \quad (1-56)$$

在笛卡儿坐标中以及应用于标量函数时总是认为算符  $\nabla^2$  和  $\Delta$  是一样的。

方程式(1-54)是电位场的基本方程式而称为泊松方程式。

在电场中没有电荷的区域里,方程式(1-54)得到简化,因为在方程式的右侧是零。在这种情形下,方程式称作拉普拉斯方程式。

如同在本节开始时所称呼的,方程式

$$\nabla^2 \varphi = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ 0 \end{cases} \quad (1-57)$$

叫作电位场的微分方程式。

**例 1-8.** 在电场某个区域内电位是按规律  $\varphi = \sum_n A_n \cos nx \operatorname{ch} ny$  变化的,在这个区域内是否含有体电荷? 如果含有,数量为若干?

**解** 直接微分得到

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_n A_n n^2$$

$$(-\cos nx \operatorname{ch} ny + \cos nx \operatorname{ch} ny) = 0,$$

即满足拉普拉斯方程式(体电荷为零)。

**例 1-9.** 和上例相同,但  $\varphi = \sum_n A_n \cos nx \sin ny$ 。

**解** 在这种情形下

$$\nabla^2 \varphi = -2 \sum_n A_n n^2 \cos nx \sin ny.$$