高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

PAILIE ZUHE YU GAILÜ

排列组合与概率

本书主编 王俊明

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

- ★ 数学结构思想及解题方法
- ★ 初等数论
- ★ 复数与多项式
- ★ 组合问题
- ★ 平面几何
- ★ 函数与函数方程
- ★ 不等式
- ★ 排列组合与概率
- ★ 数列与归纳法
- ★ 集合与简易逻辑
- ★ 三角函数
- ★ 立体几何
- ★ 解析几何

ISBN 978-7-308-05240-5

9 787308 052405 >

定价：9.00 元

高中数学竞赛专题讲座

排列组合与概率

本书主编　王俊明

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 排列组合与概率 / 陶平生等主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.4
ISBN 978-7-308-05240-5

Ⅰ.高... Ⅱ.陶... Ⅲ. 数学课—高中—数学参考资料
Ⅳ. G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039716 号

排列组合与概率

本书主编　王俊明

责任编辑	沈国明
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
	(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
	(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	杭州杭新印务有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	6
印　　数	00001—10000
字　　数	125 千
版 印 次	2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-05240-5
定　　价	9.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88072522

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”（简称IMO）由来已久，自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来，有近60年的历史，其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下，世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前，我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动，吸引了无数数学爱好者积极参与，也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台，是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到，通过这项活动，发现了一批数学苗子，培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来，我国的数学竞赛体制日趋完善，它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革，各种学科竞赛，尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上，学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望，在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张 雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

第1讲　几个基本原理

知识点金

排列与组合问题是一类特殊的计数问题，它的解决需要用到以下几个基本工具：

1. 对应原理：对于两个有限集 A 和 B，若存在一个由 A 到 B 的一一映射，则有 $\mathrm{mard}A=\mathrm{mard}B$ 或 $|A|=|B|$.

2. 分类计数原理：完成一件事，有 n 类办法. 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法. 那么，完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

3. 分步计数原理：完成一件事，需要分成 n 个步骤. 做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法. 那么，完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

4. 容斥原理：$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$.

例题精析

例 1　有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收，有多少种不同的结对方式？

分析　将这 $2n$ 个人列成一排，让最左端的人先选一人，之后让剩余的 $2n-2$ 个人中的最左端的人再选一人，…，依次下去，故分 n 步进行，运用分步计数原理即可.

解 将这 $2n$ 个人列成一排，让最左端的人先选一人，有 $2n-1$ 种选法，之后让剩余的 $2n-2$ 个人中的最左端的人再选一人，有 $2n-3$ 种选法，…，依次下去，由分步计数原理知，共有 $(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1$ 种不同的方法.

评注 合理设计解决问题的模式很重要，本题是在结对方法构成的集合与将 $2n$ 个人列成一排依次结对的方法构成的集合之间建立了一一对应关系.

例 2 在正方体的 8 个顶点、12 条棱的中点、6 个面的中心及正方体的中心共 27 个点中，共线的三点组有多少个？

分析 这些点中取出三点若是共线点，则必含中心，故运用分类计数原理计数即可.

解 两端点均为顶点的共线三点组共有 $\frac{8\times7}{2}=28$ 个；

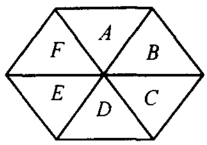
两端点均为面的中心的共线三点组共有 $\frac{6\times1}{2}=3$ 个；

两端点均为各棱中点的共线三点组共有 $\frac{12\times3}{2}=18$ 个，且没有别的类型的共线三点组，故共有 $(28+3+18)=49$ 个共线三点组.

评注 根据题意合理分类很重要.

例 3 如图所示，在一个正六边形的六块区域栽种观赏植物，要求同一块区域中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物. 现有 4 种不同的植物可供选择，共有多少种栽种方案？

分析 由于相邻的两块区域种不同的植物，故可按三块区域 A、C、E 种植物的种数分类计数.



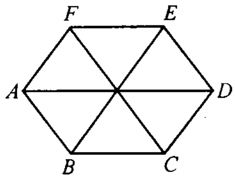
解 考虑 A、C、E 种同一种植物，有 $4\times3\times3\times3=108$ 种方法；考虑 A、C、E 种同两种植物，有 $3\times4\times3\times3\times2\times2=432$ 种方法；考虑 A、C、E 种同三种植物，有 $A_4^3\times2\times2\times2=192$ 种方法，故共有 $108+432+192=732$ 种方法.

例 4 如图所示，设 $ABCDEF$ 为正六边形. 一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶点之一，若在 5 次之内跳到 D 点，则停止跳动，若在 5 次之内不能到达 D 点，则跳完 5 次也停止跳动. 那么，这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法有多少种？

分析 考虑青蛙由点 A 到点 D 需要跳动的次数，青蛙不能经过跳 1 次、2 次，或 4 次到达点 D，故青蛙跳 3 次或 5 次能到达点 D，之后分类计算便可求得.

解 如图所示，显然青蛙不能经过跳 1 次、2 次，或 4 次到达 D 点，故青蛙的跳法只有下列两类情形：

(1) 青蛙跳 3 次到达 D 点，有 2 种跳法；



(2)青蛙一共跳 5 次后停止，这时，前 3 次的跳法有 2^3-2 种，后两次的跳法有 2^2 种，故青蛙一共跳 5 次的跳法有 $(2^3-2)\times 2^2=24$ 种.

由(1)(2)可知青蛙共有 $24+2=26$ 种不同的跳法.

例 5 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 共有多少组正整数解？

分析 考虑 18 个排成一排的相同小球，在它们之间的 17 个空位插入 4 个隔板，每一种插法对应着方程的一组解，反过来，方程的每一组解也对应着一种插法，故只要求出共有多少种插法即可.

解 将 18 个相同的小球排成一排，在它们之间的 17 个空位插入 4 个隔板，对每一种插法对应着方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 的一组正整数解，反过来，方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 的每一组正整数解也对应着一种插法，故方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ 共有 C_{17}^4 组正整数解.

评注 本题又是运用对应原理解决问题.

例 6 整数 $1,2,\cdots,n$ 的排列满足：每个数或者大于它之前的所有数，或者小于它之前的所有数，试问有多少这样的排列？

分析 记所有的排列的个数为 a_n，考虑数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，再由递推公式求出其通项公式，从而使问题得以解决.

解 记所有的排列的个数为 a_n.

显然 $a_1=1$.

对于 $n\geqslant 2$，考虑最大的数 n，如果 n 排在第 i 位，则它之后的 $(n-i)$ 个数排序完全确定，即只能是 $n-i,n-i-1,\cdots,1$；而它之前的 $(i-1)$ 个数有 a_{i-1} 种排法. 考虑到的所有不同的位置，由分类计数原理知：$a_n=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，于是 $a_{n-1}=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}$，有 $a_n=2a_{n-1}$，所以，$a_n=2^{n-1}$.

评注 以上方法是研究排列组合问题的一种重要方法——递推方法. 在此过程中，我们考虑了最大数 n. 这里又渗透着数学中的一种重要方法——极端性原理.

例 7 有集合 A,B,C(不必两两相异)的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,n\}$，求满足条件的三元有序集合组 (A,B,C) 的个数.

分析 利用文氏图，考虑如下 7 个区域，运用分步计数原理即可.

解 任取一数 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，

则对集合 A 而言，$i\in A$ 或 $i\notin A$ 有 2 种可能；

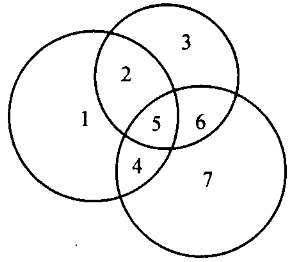
对集合 B 而言，$i\in B$ 或 $i\notin B$ 有 2 种可能；

对集合 C 而言，$i\in C$ 或 $i\notin C$ 有 2 种可能.

但 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,n\}$，故排除 $i\notin A$，$i\notin B$，$i\notin C$ 的可能，

所以有 2^3-1 种可能.

由分步计数原理知(A,B,C)的数组共有$(2^3-1)^n=7^n$.



评析 确定集合有序组可分为 n 个步骤,第一步确定数字 1 有多少种可能,第二步确定数字 2 有多少种可能,…,第 n 步确定数字 n 有多少种可能,这种解决问题的途径设计很关键.

例 8 p 为集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列,一个元素 $j\in S_n$,如果满足 $p(j)=j$,则称之为 p 的一个不动点,令 f_n 为 S_n 的无不动点的排列的个数,g_n 为恰好有一个不动点的排列的个数,求证:$|f_n-g_n|=1$.

分析 考虑容斥原理.

解 利用容斥原理,可以得到 n 元的错排公式

$$F(n)=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right],$$

易知 $f_n=F(n)$, $g_n=C_n^1F(n-1)$,

$$\begin{aligned}故 f_n-g_n&=F(n)-C_n^1F(n-1)\\&=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]-n\cdot(n-1)!\cdot\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\\&=(-1)^n,\end{aligned}$$

即 $|f_n-g_n|=1$.

例 9 设 $D=\{1,2,\cdots,10\}$, $f(x)$是 D 到 D 的一一映射. 令 $f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$, $n\in \mathbf{N}^*$; $f_1(x)=f(x)$. 试求 D 的某一个排列 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$,使下列等式成立:$\sum\limits_{i=1}^{10}x_if_{2520}(i)=220$.

分析 因为 $f(x)$是 D 到 D 的一一映射,因此先求出使 $f_{r_i}(i)=i$ 成立的 r_i,再用排序不等式即可.

解 因 $f(x)$是 D 到 D 的一一映射,所以,对 $i=1,2,\cdots,10$,有$\{i,f_1(i),f_2(i),\cdots,f_{10}(i)\}\subseteq D$,据抽屉原理知,存在 $r_i(1\leqslant r_i\leqslant 10)$, 使 $f_{r_i}(i)=i$.

易得 $2520=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ 为 $1,2,\cdots,10$ 的最小公倍数,故上述 $r_i\mid 2520$,于是 $f_{2520}(i)=i$ 对一切 $i\in D$ 成立. 故原式为$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i\cdot i=220$. 由排序不等式知$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i\cdot i\geqslant 1\times 10+2\times 9+\cdots+10\times 1=220$.

当且仅当为 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 为 $1,2,\cdots,10$ 的反序排列时,上式取等号. 故所求排列为 $10,9,8,\cdots,2,1$.

例 10 设一个圆分成 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 共 n 个扇形. 用 m 种不同的颜色对这 n 个扇形着色$(m\geqslant 3,n\geqslant 3)$,每一个扇形着一种颜色,相邻的扇形着不同的颜色. 那么,共有多少种不同的着色方法?

分析 考虑用递推方法解决问题.

解 设 a_n 为满足要求的对 n 个扇形的着色方法数，对扇形 S_1 有 m 种不同的着色方法，S_2 有 $m-1$ 种不同的着色方法，S_3 有 $m-1$ 种不同的着色方法，…，S_n 也有 $m-1$ 种不同的着色方法. 于是，共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种不同的着色方法. 但这些方法中可能出现 S_1 与 S_n 着色相同的情形. 此时，把 S_1 与 S_n 看作一个扇形着色，其着色方法相当于用 m 种颜色对 $n-1$ 个扇形着色，不同的着色方法有 a_{n-1} 种，故 $a_n=m(m-1)^{n-1}-a_{n-1}(n\geqslant 3)$，

即 $a_n-(m-1)^n=-[a_{n-1}-(m-1)^{n-1}]$, $a_3=m(m-1)(m-2)$.

$\therefore a_n-(m-1)^n=[m(m-1)(m-2)-(m-1)^3](-1)^{n-3}=(m-1)(-1)^n$.

$\therefore a_n=(m-1)^n+(m-1)(-1)^n(n\geqslant 3)$ 即为所求.

思考交流

1. 从 1 到 100 的正整数中每次取出不同的 2 个数，使它们的和大于 100，则不同的取法有多少种？

解 此题数字较多，情况也不一样，需要分析摸索其规律. $1+100=101>100$，1 为被加数有 1 种. 同理，2 为被加数有 2 种，3 为被加数有 3 种，…，49 为被加数有 49 种，50 为被加数有 50 种；但 51 为被加数只有 49 种. 同理，52 为被加数有 48 种，…，99 为被加数只有 1 种. 故，不同的取法共有：$1+2+3+\cdots+50+(49+48+\cdots+1)=2600$(种).

2. 圆排列

定义 从集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的 n 个不同元素中取出 r 个元素按照某种顺序（如逆时针）排成一个圆圈，称这样的排列为圆排列（或称循环排列）.

需要注意的是：若一个圆排列经旋转后可得另一个圆排列，则这两个圆排列是相同的.

定理 集合 A 中的 n 个元素的 r 圆排列的个数为

$$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!).$$

证明 由于把一个圆排列旋转所得到的另一个圆排列视为相同的圆排列，因此排列 $a_1a_2\cdots a_r$，$a_2a_3\cdots a_ra_1$，$a_3a_4\cdots a_ra_1a_2$，…，$a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}$ 在圆排列中是同一个，即一个圆排列可以产生 r 个线排列，而总共有 $P(n,r)$ 个线排列. 故圆排列的个数为

$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!)$.

(1)有 8 人围圆桌就餐，问有多少种就座方式？如果有两人不愿坐在一起，又有多少种就座方式？

解 由定理知，8 人围圆桌就座一共有 $8!/8=7!$ 种就座方式.

又由于两人不愿坐在一起，设这两个人为甲和乙，当甲和乙坐在一起时，相当于 7 个

人围圆桌而坐，其就座方式为 $7!/7=6!$，而甲和乙坐在一起时，又有两种情况，或者甲坐在乙的右面，或者甲坐在乙的左面. 这样一来，甲和乙坐在一起时共有 $2\times6!$ 种就座方式. 因此，甲和乙不坐在一起时的就座方式的总数为

$7!-2\times6!=5\times6!=3600$.

(2)4 男 4 女围圆桌交替就座有多少种方式?

解 显然，这是一个圆排列问题. 先让 4 个男的围圆桌而坐，由定理知共有 $4!/4$ 种就座方式. 然后加入一个女的进去就座就有 4 种方式，加入第二个女的又有 3 种方式，加入第三个女的又有 2 种方式，加入第四个女的只有 1 种方式. 由乘法规则知，4 男 4 女围圆桌交替就座的方式数为

$(4!/4)\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=144$.

同步检测

一、选择题

1. 数 1447，1005，1231，有某些共同点，即每个都是首位为 1 的四位数，且每个四位数中恰有两个数字相同，这样的四位数共有(　　)

A. 455 个　　B. 432 个　　C. 421 个　　D. 423 个

2. 电话号码有 10 个数码可供选择，从理论上讲，采用 7 位号码比采用 6 位号码可多装的电话门数为(　　)

A. $P_{10}^{7}P_{10}^{6}$　　B. $C_{10}^{7}-C_{10}^{6}$　　C. $7^{10}-6^{10}$　　D. $10^{7}-10^{6}$

3. 直线上分布着 2007 个点，以这些点为端点的一切的线段的中点，至少可以得出多少个互不重合的中点?(　　)

A. 2005 个　　B. 2007 个　　C. 4009 个　　D. 4011 个

二、填空题

4. 把△ABC 内任意不共线的 2004 个点加上△ABC 的 3 个顶点共 2007 个点为顶点，连线组成互不相叠的小三角形，则一共可以组成小三角形的个数为________.

5.(1999 年全国高中数学联合竞赛试题)已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合{−3，−2，−1，0，1，2，3}中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾角为锐角，那么这样的直线共有________条.

三、解答题

6.(1993 年美国数学邀请赛试题)在 4000 至 7000 之间有多少个四个数字均不相同的偶数?

7.(1996 年美国数学邀请赛试题)一个 $150\times324\times375$ 的长方体由 $1\times1\times1$ 的单位立方体胶合在一起而成.这个长方体的一条内对角线能穿过多少个单位立方体的内部?

8.(第 6 届 IMO 试题)平面上给定 5 个点.这些点两两之间的连线互不平行,又不垂直,也不重合,从任何一点开始,向其余四点两两之间的连线作垂线,如果不计已知的 5 个点,所有这些垂线间的交点数最多是多少个?

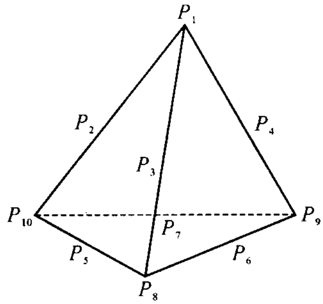
9. 把 1,2,3,…,2007 这 2007 个正整数随意放置在一个圆周上,统计所有相邻 3 个数的奇偶性得知,3 个数全是奇数的有 600 组,恰好有 2 个奇数的有 500 组.问:恰好有 1 个奇数的有几组? 全部不是奇数的有几组?

10."渐升数"是指每个数字比其左边的数字大的正整数,如 34689.已知有 $C_9^5=126$ 个五位"渐升数",若把这些数按从小到大的顺序排列,则第 100 个数是多少?

11. 把一个给定的有理数写成既约分数,并计算所得分子与分母的乘积,在 0 与 1 之间有多少个有理数,按此法所得乘积是 20!?

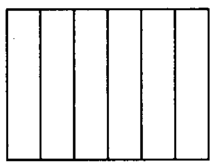
12. 若(1)a,b,c,d 都属于$\{1,2,3,4\}$;(2)$a\neq b,b\neq c,c\neq d,d\neq a$;(3)$a$ 是 a,b,c,d 中的最小值.那么,可以组成不同的四位数$\overline{abcd}$的个数是多少?

13. 如图,点 $P_1,P_2,\cdots,P_{10}$ 分别是四面体的顶点或棱的中点,那么,在同一平面上的四点组有多少个?



第 13 题图

14. 在如图所示的六块土地上种上甲或乙两种蔬菜(只种其中一种,也可两种都种,但每一块土地只种一种蔬菜),要求相邻两块土地不都种甲种蔬菜,问有多少种种蔬菜的方法?


第 14 题图

15. 已知两个由实数构成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_4\}$,若从 A 到 B 的映射使得 B 中每个元素都有原象,且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{10})$,则这样的映射有多少个?

16. 将$(a+b+c+d)^{30}$展开合并同类项后,共有多少项?

17. 从 1,2,3,…,14 中取出 3 个数 a_1,a_2,a_3,满足 $a_1\leqslant a_2-3$,$a_2\leqslant a_3-3$,问有多少种不同的选法?

18. 一段楼梯共有 12 级台阶.某人上楼时,有时一步迈一级台阶,有时一步迈两级台阶.问此人共有多少种上楼的方法?

19. 方程 $2x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$ 的非负整数解共有多少个?

20. 设 n 是正整数.我们说集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$具有性质 P 是指在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$当中至少有一个 i 使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$.求证:对于任何 n 具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列多.

第2讲　排列与组合

知识点金

1. 排列数公式：$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

证明：设从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列构成的集合为 A，从 n 个不同元素中取出 m 个元素填入事先排好顺序的 m 个空位的方法构成的集合为 B，显然存在一个由 A 到 B 的一一映射. 现在我们来计算有多少种不同的填法，填空可分为 n 个步骤：第 1 步，填第 1 位可以从 n 个元素中任选一个填上，共有 n 种填法；第 2 步，填第 2 位可以从余下的 $n-1$ 个元素中任选一个填上，共有 $n-1$ 种填法；第 3 步，填第 3 位可以从余下的 $n-2$ 个元素中任选一个填上，共有 $n-2$ 种填法；…；第 m 步，当前面的 $m-1$ 个空位都填上后，第 m 位只能从余下的 $n-m+1$ 个元素中任选一个填上，共有 $n-m+1$ 种填法. 由分步计数原理，得到公式：$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

2. 组合数公式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n!}{(n-m)!\ m!}$.

证明：考虑从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列数，求它的值可以分为以下两个步骤：第 1 步，先求出从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合数；第 2 步，求每一个组合中 m 个元素的全排列数. 根据分步计数原理，得 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$，所以 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$.

注：此法是运用方程的思想间接求解. 其基本要领是：先把待研究的问题置于另一个已研究过的问题之中，建立待求未知量的方程，再解方程即可.

3. 重要等式：

①$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$；

②$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$，$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$，$C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\cdots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$；

③$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$；

④$A_1^1+2A_2^2+3A_3^3+\cdots+nA_n^n=(n+1)!-1$.

证明：左$=1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+n\times n!$

$=(2-1)1!+(3-1)2!+(4-1)3!+\cdots+[(n+1)-1]n!$

$=2!+3!+4!+\cdots+(n+1)!-1!-2!-3!-\cdots-n!$

$=(n+1)!-1$.

4. 折线法：

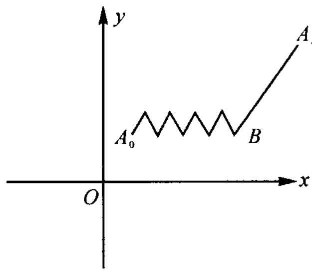
定义：在直角坐标系中，设 $A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)(a_n>a_0)$为两个格点，从 $A_0(a_0,b_0)$到 $A_n(a_n,b_n)$的连线由最小格点正方形的对角线首尾相连接而成，且任何平行于 y 轴的直线与这条连线只有一个交点，我们把这条连线叫做连接 $A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)$的折线，点 $A_0(a_0,b_0)$称为这条折线的起点，点 $A_n(a_n,b_n)$称为终点. 点 $A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)$之间能用折线连接的充要条件是：$|b_n-b_0|\leqslant a_n-a_0=n$，$|b_n-b_0|+a_n-a_0\equiv0(\mathrm{mod}2)$.

证明：设这些最小格点正方形对角线的端点依次为 $A_i(a_i,b_i)(i=0,1,\cdots,n)$，其中，$a_i-a_{i-1}=1$，$|b_i-b_{i-1}|=1$，$1\leqslant i\leqslant n$.

1)必要性：

$|b_n-b_0|=|(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_1-b_0)|\leqslant|b_n-b_{n-1}|+|b_{n-1}-b_{n-2}|+\cdots+|b_1-b_0|=n=a_n-a_0$，设(/)型的对角线有 x 个，(\)型的对角线有 y 个，则 $x+y=a_n-a_0$，$|x-y|=|b_n-b_0|$，$|b_n-b_0|+a_n-a_0\equiv2x$ 或 $2y\equiv0(\mathrm{mod}2)$.

2)充分性：不妨设 $b_n\geqslant b_0$，如图所示：



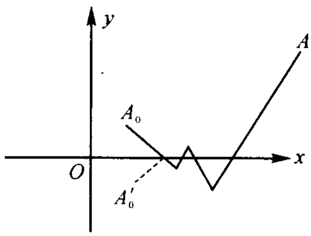
考查格点 B，其坐标为$(a_n-b_n+b_0,b_0)$，因为$|b_n-b_0|\equiv-(b_n-b_0)(\mathrm{mod}2)$，故 $a_n-b_n+b_0-a_0\equiv0(\mathrm{mod}2)$，所以由 $A_0(a_0,b_0)$到 B 可用$\frac{1}{2}(a_n-b_n+b_0-a_0)$个(/)和$\frac{1}{2}(a_n-b_n+b_0-a_0)$个(\)连成折线，而由 B 到 $A_n(a_n,b_n)$可用一条边长为 b_n-b_0 的正方形的对角线连接. 证毕.

定理 1：连接格点 $A_0(a_0,b_0)$，$A_n(a_n,b_n)$的折线数目是 $C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}$.

证明：设由 $A_0(a_0,b_0)$到 $A_n(a_n,b_n)$的 n 条线段中，有 x 个(/)，有 y 个(\)，则 $x+y=a_n-a_0$，$x-y=b_n-b_0$，$x=\frac{1}{2}(a_n+b_n-b_0-a_0)=\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)$，而每一条由 $A_0(a_0,b_0)$到 $A_n(a_n,b_n)$的折线都对应着一个 x 个(/)和 y 个(\)的一个排列；反之，一个 x 个(/)和 y 个(\)的一个排列，都对应着一个由 $A_0(a_0,b_0)$到 $A_n(a_n,b_n)$的折线，故共有折线 $C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}$ 条.

定理 2：设 $b_0>0$，$b_n>0$，从点 $A_0(a_0,b_0)$ 出发，并与 x 轴相交，最后到达 $A_n(a_n,b_n)$ 的所有折线的条数等于从点 $A'_0(a_0,-b_0)$ 出发到达点 $A_n(a_n,b_n)$ 的所有折线的条数（反射原理）.

证明：如图：从点 $A_0(a_0,b_0)$ 出发，并与 x 轴相交，最后到达点 $A_n(a_n,b_n)$ 的所有折线条数，等于从点 $A'_0(a_0,-b_0)$ 出发，最后到达点 $A_n(a_n,b_n)$ 的所有折线的条数.



定理 3：设 $b_0>0$，$b_n>0$，则：

(1)连接 $A_0(a_0,b_0)$ 与点 $A_n(a_n,b_n)$ 且与 x 轴相交的折线条数为 $C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n+b_0)}$；

(2)连接 $A_0(a_0,b_0)$ 与点 $A_n(a_n,b_n)$ 且与 x 轴不相交的折线条数为 $C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}-C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n+b_0)}$.

证明：由定理 1 和定理 2 可知：定理 3 成立.

例题精析

例 1 （1999 年全国高中数学联合竞赛试题）在一次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了. 这样全部比赛只进行了 50 场. 那么，在上述 3 名选手之间的比赛场数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分析　设 3 名选手之间的比赛场数为 x，建立关于 x 的方程便可求出.

解　设 3 名选手之间的比赛场数为 x，共有 n 名选手参赛. 由题意，可得 $50=C_{n-3}^2+x+(6-2x)$，即 $\frac{(n-3)(n-4)}{2}=44+x$. 由于 $0\leqslant x\leqslant 3$，经检验，仅当 $x=1$ 时，$n=13$ 是整数. 故选 B.

例 2　从 7 名男乒乓球队员和 5 名女乒乓球队员中选出 4 名进行男女混合双打，不同的分组方法有（　　）种.

A. $2C_7^2C_5^2$　　B. $4C_7^2C_5^2$　　C. $P_7^2P_5^2$　　D. $C_7^2C_5^2$

分析　这是一个典型的排列组合混合问题，用分步计数原理便可求出.

解　先从 7 名男乒乓球队员中选出 2 人，有 C_7^2 种选法，再从 5 名女乒乓球队员中选出 2 名，有 C_5^2 种选法，最后将选出的 4 名队员分组有 2 种分法，由分步计数原理得共有 $2C_7^2C_5^2$ 种分组方法. 故选 A.

例 3　（捆绑问题）8 名男生和 5 名女生排成一排，要求女生必须相邻，有多少种排法？